КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

НАВЧАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

для студентів механіко–математичного факультету

(І семестр першого курсу)

Видавничо-поліграфічний центр
"Київський університет"
2002

Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів механіко–математичного факультету (1 семестр першого курсу) / Упорядн. М. О. Денисьєвський, О. О. Курченко, В. Н. Нагорний, А. В. Чайковський. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2002. – 108 с.

Рецензенти

Г. Л. Кулініч, доктор фізико–математичних наук, професор

Ю. Ю. Трохимчук, доктор фізико–математичних наук, професор

Затверджено Вченою Радою
механіко–математичного факультету
2 жовтня 2002 року

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

В цьому методичному посібнику наведені теми практичних занять з математичного аналізу, умови задач, рекомендованих для розв'язання в аудиторії, а також задачі для домашньої роботи. Зміст задач і розміщення матеріалу точно відповідають навчальній програмі з математичного аналізу для студентів спеціальностей "математика", "статистика" механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка й узгоджені зі змістом лекцій.

Головна мета практичних занять — активне засвоєння студентами основних понять і положень курсу, набуття навичок їх застосування до розв'язання стандартних задач, опанування деяких спеціальних методів. Кількість задач, що розв'язуються в аудиторії, часто залежить від рівня підготовки студентів та інколи може виявитися великою. Однак зменшення обсягу чи заміну задач для аудиторної роботи треба проводити обережно, оскільки певні результати повинні бути відомими всім студентам. Пропонуються також завдання підвищеної складності для студентів з високим рівнем підготовки за умови повного виконання обов'язкової частини.

У першому семестрі проводяться дві контрольні роботи, зразки умов та розв'язання яких наведено в тексті посібника.

Умовам задач в кожному занятті передують кілька контрольних запитань, відповіді на які студенти мають підготувати вдома. У кожному занятті група задач А — задачі для аудиторної роботи, група Б — для домашнього завдання. Задачі підвищеної складності позначені літерою Д. Наведені відповіді до задач групи Б. В посібнику також вміщено програму курсу "Математичний аналіз"для студентів спеціальностей "математика" та "статистика" I курс, I семестр".

При підборі задач використано такі збірники задач:

Дороговцев А.Я. Математический анализ. Сборник задач. -- Киев, 1987.

Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М., 1969.

Виленкин Н.Я. и др. Задачник по курсу математического анализа. // Под ред. Н.Я.Виленкина – М., 1971, Ч.1.

Частина задач складена упорядниками. При підготовці цього учбового посібника автори суттєво використали методичну розробку "Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів механіко-математичного факультету (1 семестр першого курсу) // Упорядн. А.Я.Дороговцев, О.О.Курченко, М.О.Денисьєвський. – К.,1994.

ЗАНЯТТЯ 1
ЛОГІЧНІ СИМВОЛИ. МНОЖИНИ І ДІЇ НАД НИМИ. ПРАВИЛА ДЕ МОРГАНА

Контрольні запитання

1. *Логічні символи* $\Rightarrow; \Leftrightarrow; \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}\ \forall; \exists; \exists!; :=; \stackrel{\text{def}}{=}.$
2. *Способи задання множин.*
3. *Дії над множинами.*
4. *Правила де Моргана.*

А1

1. Що можна сказати про дійсне число x, якщо:

1) $\forall a > 0\ :\ x < a;$
2) $\forall a > 0\ :\ x \le a;$
3) $\forall a \ge 0\ :\ x < a;$
4) $\forall a < 0\ :\ x < a;$
5) $\exists a > 0\ :\ x < a;$
6) $\forall a < 0\ :\ x > a?$

2. Визначити множину A, якщо:

1) $\forall x \in A\ \exists n \in \mathbf{N}:\ x = 2n;$
2) $\forall x \in A\ \exists m \in \mathbf{Z}\ \exists n \in \mathbf{N}:\ x = \dfrac{m}{n};$
3) $\forall x \in A\ \exists y \in \mathbf{R},\ y \ge 1:\ 2^x = y;$
4) $\forall a \in A\ \exists x \in \mathbf{R}:\ x^2 + 2ax + a = 0;$
5) $A = \{x \mid \exists y \in \mathbf{R}:\ x^2 + y^2 = 1\};$
6) $\forall (x, y) \in A:\ \max(x, y) \ge 1.$

3. Чи вірні наступні висловлювання:

1) $\forall a \in \mathbf{R}\ \exists x \in \mathbf{R}:\ x^2 + ax = 0;$
2) $\forall a \in \mathbf{R}\ \exists x \in \mathbf{R}\ :\ x^2 + 2ax + a = 0?$

4. Записати в кванторах висловлювання:

1) "у множині A міститься більше одного елемента";
2) "у множині A містяться як завгодно великі числа".

5. Визначити множини $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A}$ та дати їх геометричну інтерпретацію, якщо:

1) $A = \{x \mid x^2 + 6x + 8 < 0\},\ B = \{x \mid x^2 + 3x < 0\};$
2) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\},\ B = \{(x, y) \mid xy \ge 0\}.$

6. Нехай для $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$ множина $A_{mn} = (m, m+n)$. Визначити такі множини:

1) $B_m = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{mn}, \quad C_m = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{mn}, \quad m \in \mathbf{Z};$
2) $\bigcap\limits_{m=-\infty}^{0} (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{mn}); \qquad \bigcap\limits_{m \in \mathbf{Z}} (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{mn}).$

7. Визначити множини $\bigcup\limits_{t\in T} A_t$, $\bigcap\limits_{t\in T} A_t$, де:

1) $A_t = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 |\ x = ty\}, \quad T = (0,\infty)$;
2) $A_t = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 |\ x = ty\}, \quad T = [-1,1]$.

8. Довести такі твердження:

1) якщо $A \subset B$, то $A \cap B = A,\ A \cup B = B$;
2) якщо $A \cap B = B$, то $B \subset A$;
3) якщо $A \cup B = B$, то $A \subset B$.

9. Довести закони дистрибутивності:

1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

10. Довести співвідношення:

1) $A \backslash C \subset (A \backslash B) \cup (B \backslash C)$;
2) $\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) \backslash \left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k\right) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (A_k \backslash B_k)$.

Навести приклади множин, для яких має місце строге включення.

11. За допомогою правил де Моргана спростити вирази:

1) $\overline{A \cup (B \cap (C \cup \overline{D}))}$; 2) $\overline{(A \cap \overline{B}) \cup (C \cap \overline{D})}$.

12. Довести рівності:

1) $\overline{A \backslash B} = \overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A} \cup B$;
2) $\overline{A \triangle B} = \overline{A \cup B} \cup (A \cap B)$, де $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ – симетрична різниця множин A та B;
3) $\overline{\overline{A \cup B} \cap (\overline{A} \cup \overline{B})} = A \cup B$.

Д1. Нижньою границею $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ послідовності множин $\{A_n\ :\ n \geq 1\}$ називається множина всіх тих елементів, які входять до всіх множин цієї послідовності за винятком скінченного числа множин. Записати нижню границю послідовності множин за допомогою операцій об'єднання та перетину множин.

Д2. Верхньою границею $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ послідовності множин $\{A_n\ :\ n \geq 1\}$ називається множина всіх тих елементів, які входять до нескінченної кількості множин цієї послідовності. Записати верхню границю послідовності множин за допомогою операцій об'єднання та перетину множин.

Д3. Для послідовності множин $\{A_n : n \geq 1\}$ довести, що
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \varliminf_{n\to\infty} A_n \subset \varlimsup_{n\to\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$
Навести приклад послідовності множин, для якої всі включення є строгими.

Д4. Послідовність множин $\{A_n : n \geq 1\}$ називається монотонно зростаючою, якщо
$$\forall n \in \mathbf{N} : A_n \subset A_{n+1},$$
послідовність називається монотонно спадною, якщо
$$\forall n \in \mathbf{N} : A_{n+1} \subset A_n.$$
Довести, що для монотонно зростаючої послідовності
$$\varliminf_{n\to\infty} A_n = \varlimsup_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$
для монотонно спадної послідовності
$$\varliminf_{n\to\infty} A_n = \varlimsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Б1

1. Визначити множину A, якщо:
1) $\forall a \in A\, \exists x \in \mathbf{R} : 3a + 2ax - x^2 > 0$;
2) $\forall a \in A\, \exists b \in \mathbf{R}\, \exists x \in \mathbf{R} : x^2 + 2ax + b^2 + 1 < 0.$

2. Чи правильні наступні висловлювання :
1) $\forall n \in \mathbf{N}\, \exists r_1 \in \mathbf{Q}\, \exists r_2 \in \mathbf{Q} : r_1 r_2 + r_1 = n$;
2) $\exists a \in \mathbf{R}\, \forall x \in \mathbf{R} : x^2 - 2ax + a > 0$?

3. Визначити множини $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A}$ та дати їх геометричну інтерпретацію, якщо:
1) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 6x - 7 < 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x < x^2\}$;
2) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 < |x - 3| \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid 2|x| < 3\}$;
3) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$,
$B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 2|y - 1| \leq 1,\ x \in \mathbf{R}\}$;
4) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy \geq 0\}$,
$B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geq x^2\}$;
5) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y\}$,
$B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$;
6) $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \sin(x - y) = 0\}$,
$B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \cos(x + y) = 0\}$;
7) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid \forall a \in \mathbf{R} : a^2 + 2ax + 1 > 0\}$,
$B = \{x \in \mathbf{R} \mid \forall a \in \mathbf{R} : a^2 x + 2x + 2a \leq 0\}$.

4. Нехай $A_{mn} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid m^2 \leq x^2 + y^2 \leq n^2\}$ для $m,\ n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $m < n$. Визначити множини:

$$\bigcup_{m=0}^{n-1} A_{mn}, \quad \bigcap_{m=0}^{n-1} A_{mn}, \quad \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n=m+1}^{\infty} A_{mn},$$
$$\bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcap_{n=m+1}^{\infty} A_{mn}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{n-1} A_{mn}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=0}^{n-1} A_{mn}.$$

5. Визначити множини $\bigcup\limits_{t\in T} A_t$ та $\bigcap\limits_{t\in T} A_t$, якщо:

1) $A_t = [t, t+1], \quad T = [0, +\infty)$;
2) $A_t = \{x \in \mathbf{R} \mid \sin x = t\}, \quad T = [0, 1]$;
3) $A_t = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq t^2\}, \quad T = [0, +\infty)$;
4) $A_t = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = tx^2\}, \quad T = (0, +\infty)$.

6. Довести включення:

1) $(A \cap C) \cup (B \cap D) \subset (A \cup B) \cap (C \cup D)$;
2) $(B \backslash C) \backslash (B \backslash A) \subset A \backslash C$.

7. Довести рівності:

1) $(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash C) \backslash (B \backslash C)$;
2) $(A \backslash B) \cup (B \backslash C) \cup (C \backslash A) \cup (A \cap B \cap C) = A \cup B \cup C$.

8. 1) Чи випливає з рівності $A \backslash B = C$, що $A = B \cup C$?
2) Чи випливає з рівності $A = B \cup C$, що $A \backslash B = C$?

9. Чи правильні рівності:

1) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \backslash C$;
2) $A \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \backslash C$;
3) $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash C$?

Якщо ні, то які включення мають місце?

10. Довести, що для довільних множин A, B, C:

1) $A \triangle A = \varnothing$;
2) $A \triangle \varnothing = A$;
3) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$;
4) $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$.

11. Нехай $A \triangle B = A$. Довести, що $B = \varnothing$.

12. Довести включення $(A \cup B) \triangle C \subset (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$. Навести приклад, коли має місце строге включення.

ЗАНЯТТЯ 2
ЗАГАЛЬНЕ ПОНЯТТЯ ВІДОБРАЖЕННЯ. ОБРАЗИ І ПРООБРАЗИ. СЮР'ЄКЦІЯ, ІН'ЄКЦІЯ, БІЄКЦІЯ. ОБЕРНЕНЕ ВІДОБРАЖЕННЯ. СУПЕРПОЗИЦІЯ

Контрольні запитання

1. *Загальне поняття відображення (функції), образи і прообрази.*
2. *Означення сюр'єкції, ін'єкції і бієкції.*
3. *Означення оберненого відображення.*
4. *Означення суперпозиції відображень.*

A2

1. Для функції $f(x) = x^2 - 3x + 2, \ \ x \in \mathbf{R}$, визначити наступні множини:

$$f(\{0\}),\ f(\{1\}),\ f(\{1,2\}),\ f((0,1)),\ f\left(\left(1,\tfrac{3}{2}\right)\right),\ f((1,2)),$$
$$f^{-1}(\{1\}),\ f^{-1}(\{-4,-3\}),\ f^{-1}((-5,6]),\ f^{-1}((-\infty,0]).$$

2. Для функції $f(x) = 1 + \sin x, \ \ x \in \mathbf{R}$, визначити наступні множини:

$$f(\{0,\pi\}),\ f\left(\left\{\tfrac{\pi}{6},\ \tfrac{\pi}{4},\ \tfrac{\pi}{2}\right\}\right),\ f\left(\left(0,\tfrac{3\pi}{2}\right]\right),$$
$$f^{-1}(\{0\}),\ f^{-1}\left(\left(\tfrac{1}{2},2\right]\right),\ f^{-1}\left(\left(\tfrac{1}{2},+\infty\right)\right).$$

3. Які з наступних відображень з $[-1,1]$ в $[-1,1]$ будуть сюр'єкціями? ін'єкціями? бієкціями?

$$x \mapsto x^3,\ \ x \mapsto x^2,\ \ x \mapsto 2^{x-1},\ \ x \mapsto 2^{|x|-1},\ \ x \mapsto \tfrac{x}{1+x^2}.$$

4. Нехай $f : X \longrightarrow Y$ і A, B – підмножини X. Довести, що:

1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$; 2) $A \subset f^{-1}(f(A))$.

5. Довести, що

$$f \text{ – ін'єкція} \Longleftrightarrow \forall A \subset X \ :\ f^{-1}(f(A)) = A.$$

6. Нехай $f : X \longrightarrow Y$ і A, B – підмножини Y. Довести, що:

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

7. Показати, що функція $y = x^2,\ x \in [-1,1]$, не має оберненої. Визначити обернені функції для функцій:

1) $y = x^2,\ \ x \in [-1,0]$; 2) $y = x^2,\ \ x \in [0,1]$.

8. 1) Записати суперпозицію функцій $f = g(h)$, де

$$g(x) = e^x,\ h(x) = \sin x,\ x \in \mathbf{R}.$$

2) Подати наступну функцію у вигляді суперпозиції кількох елементарних функцій:

$$f(x) = \sin^3 e^x.$$

Д1. Функція $f : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$ задана співвідношенням
$$f(n) = n(n+1), \ \ n \in \mathbf{Z}.$$
Визначити прообрази наступних множин
$$\{1\}, \quad \{2\}, \quad \mathbf{N}, \quad \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0\}.$$
Д2. Чи є відображення $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ бієкцією, якщо
$$f(x,y) = (x+y, x-y), \ \ (x,y) \in \mathbf{R}^2\,?$$

Д3. Чи є відображення $f : \mathbf{N}^2 \longrightarrow \mathbf{N}$ бієкцією, якщо
$$f(m,n) = m + \frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2}, \ \ (m,n) \in \mathbf{N}^2?$$

Д4. Нехай $f : \mathbf{R} \to \mathbf{N}, \ g : \ \mathbf{N} \to \mathbf{R}, \ h = g(f) : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Чи може h бути ін'єкцією? сюр'єкцією? бієкцією?

Д5. Довести, що жодне відображення $f : A \to 2^A$ не є бієкцією.

Б2

1. Для функції $f(x) = \dfrac{1}{|x|}, \ x \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$, визначити множини:
$$f(\{-1\}), \ f(\{-1,1\}), \ f((-2,0)), \ f([1,+\infty)),$$
$$f^{-1}(\{1\}), \ f^{-1}(\{-1\}), \ f^{-1}((0,1)), \ f^{-1}((-1,1)).$$

2. Які з наступних відображень $f \ : \ \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$

1) $(x,y) \mapsto (y,x)$; 3) $(x,y) \mapsto (x+1, y+1)$;
2) $(x,y) \mapsto (x,0)$; 4) $(x,y) \mapsto (2^x, 2^y)$

є сюр'єкцією? ін'єкцією? бієкцією? Для відображення f з 2) визначити $f^{-1}(A)$, де $A = \{(x,y) \,|\, 0 \le x \le 1, \ y = 0\}$. Для відображення f з 4) визначити $f^{-1}(A)$, де $A = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, \ y = 1\}$.

3. Нехай $f : X \longrightarrow Y$ і A, B - підмножини X. Довести, що :

1) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;
2) $f(A)\backslash f(B) \subset f(A\backslash B)$;
3) $A \subset B \Longrightarrow \ f(A) \subset f(B)$.

У випадках 1) та 2) навести приклади строгого включення.

4. Нехай $f : X \longrightarrow Y$ і A, B – підмножини Y. Довести, що:

1) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$; 3) $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$;
2) $f^{-1}(A\backslash B) = f^{-1}(A)\backslash f^{-1}(B)$; 4) $f(f^{-1}(A)) = A \cap f(X)$.

5. Для функції $f : X \longrightarrow Y$ довести, що:

1) f – ін'єкція $\Longleftrightarrow \forall A, \ B \subset X \ : \ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$;
2) f – ін'єкція $\Longleftrightarrow \forall A, \ B \subset X \ : \ f(A\backslash B) = f(A)\backslash f(B)$.

ЗАНЯТТЯ 3
ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ. МНОЖИНА ВИЗНАЧЕННЯ. ФУНКЦІЇ ПАРНІ, НЕПАРНІ, ПЕРІОДИЧНІ, МОНОТОННІ. ВІДПОВІДНІ ВЛАСТИВОСТІ ГРАФІКІВ. ОБЕРНЕНА ФУНКЦІЯ

Контрольні запитання

1. *Поняття функції. Область визначення та область значень функції.*
2. *Графік функції.*
3. *Функції непарні, парні, монотонні та періодичні.*
4. *Обернена функція.*

АЗ

1. Знайти множини визначення функцій:

1) $y = \sqrt{\cos\sqrt{x}}$; 2) $y = \operatorname{ctg}\pi x + \arccos(2^x)$.

2. Навести приклад функції з множиною визначення $D(f) = (-1, 1) \cup [2, 6]$.

3. Вказати множину, на якій виконується рівність $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = x + 3$.

4. Знайти множини визначення наступних функцій:

1) $y = \lg(x^2 - 4)$; 2) $y = \lg(x + 2) + \lg(x - 2)$;

Нехай функція f визначена на інтервалі $(0, 1)$. Знайти множини визначення функцій: 1) $f(\sin x)$; 2) $f(\lg x)$.

5. Знайти множину визначення та множину значень функції $y = \sqrt{2 + x - x^2}$.

6. Побудувати графіки функцій:

1) $y = x^3 + 1$; 3) $y = \frac{1-x}{1+x}$; 5) $y = x + \frac{1}{x}$;

2) $y = x^2 - x^4$; 4) $y = \frac{2x}{1+x^2}$; 6) $y = x\sqrt{\frac{x}{10-x}}$.

7. Побудувати графіки наступних степеневих функцій:

1) $y = x^{\frac{1}{2}}$; 3) $y = x^{\frac{1}{3}}$; 5) $y = x^{\frac{4}{3}}$;

2) $y = x^{\frac{3}{2}}$; 4) $y = x^{\frac{2}{3}}$; 6) $y = x^{\frac{3}{4}}$.

8. Визначити обернені функції та побудувати їх графіки для наступних функцій:

1) $y = \frac{2x}{1+x^2}$, $x \le -1$; 3) $y = \frac{2x}{1+x^2}$, $x \ge 1$.

2) $y = \frac{2x}{1+x^2}$, $-1 \le x \le 1$;

Д1. Знайти множину визначення та множину значень функції

$$y = \sqrt{x + 1} - x.$$

Д2. Знайти множину, на якій одночасно визначені всі функції
$$f_n(x) = \sqrt[2n]{\left(\tfrac{1}{n} - x\right) x},\ n \geq 1.$$

Д3. Довести, що довільну функцію $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ можна подати у вигляді суми парної та непарної функцій.

Д4. Довести, що функція $f(x) = \sin x^2,\ x \in \mathbf{R}$, не є періодичною.

Д5. Довести, що кожний многочлен, який є парною функцією, у канонічному вигляді має нульові коефіцієнти при непарних степенях незалежної змінної.

Б3

1. Для функції
$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{якщо } -1 < x < 0; \\ 1 + |x|, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$
знайти значення у точках $1,\ -\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ 0$. Чи існує $f(3)$?

2. Для функції
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & \text{якщо } -1 \leq x < 0; \\ |\sin x|, & \text{якщо } 0 \leq x \leq \pi; \\ \dfrac{x-1}{x+1}, & \text{якщо } \pi < x \leq 5 \end{cases}$$
знайти значення у точках $-1,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\pi}{4},\ 4$.

3. Виразити площу прямокутника, вписаного у коло радіуса R, як функцію однієї з його сторін. Вказати множину визначення цієї функції.

4. Виразити об'єм конуса, вписаного у кулю радіуса R, як функцію радіуса його основи. Вказати множину визначення цієї функції.

5. Знайти множини визначення наступних функцій:

1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x| + x}}$;
2) $y = \lg(4 - 5x)$;
3) $y = \lg(x^2 - 4x + 3)$;
4) $y = \lg(x^2 + 6x + 9) + \sqrt{x^2 - 2x - 8}$;
5) $y = \lg(\cos(\lg x))$;
6) $y = \arcsin(3x - 4)$.

6. Навести приклад функції f з множиною визначення
$$D(f) = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} (2n, 2n+1).$$

7. Чи рівні між собою функції $f(x) = \lg(x^2 - 6x + 8)$ та $g(x) = \lg(x-2) + \lg(x-4)$? Чи є одна з них продовженням іншої?

8. Які з наступних функцій парні? непарні? (У пунктах 4), 5) n – фіксоване натуральне число.)

1) $y = 3 - x^2 + 2x^4,\ x \in \mathbf{R};$

2) $y = \dfrac{x-1}{x+1},\ x \in \mathbf{R}\backslash\{-1\};$

3) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1},\ x \in \mathbf{R}\backslash\{-1, 1\};$

4) $y = x^{2n+1} + 3,\ x \in \mathbf{R};$

5) $y = x^{2n} + 3,\ x \in \mathbf{R};$

6) $y = \dfrac{x^2+x-1}{x^6+5},\ x \in \mathbf{R};$

7) $y = \cos x + \sin^4 x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right];$

8) $y = \dfrac{x^3 + \sin x}{x^2+1}, x \in [-4, 4];$

9) $y = \begin{cases} x^4 + 4, & \text{якщо } x \geq 0, \\ -x^4 - 4, & \text{якщо } x < 0; \end{cases}$

10) $y = \begin{cases} x^3 + \sin x, & \text{якщо } x \geq 0, \\ -x^3 - \sin x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$

9. Продовжити наступні функції на відповідну множину парним чином:

1) $y = \sin x + x \operatorname{tg} x,\ 0 \leq x < \frac{\pi}{2};$ 2) $y = x \lg x,\ x > 0;$

3) $y = \begin{cases} x^4 + 3x^2 + 2^x, & \text{якщо } 0 \leq x < 1, \\ x^3 + |x| + \lg x, & \text{якщо } 1 \leq x < 2. \end{cases}$

10. Продовжити наступні функції на відповідну множину непарним чином:

1) $y = \sin^2 x + \cos^4 x,\ x > 0;$

2) $y = \lg(x + \sqrt{x^2+1}),\ x \geq 0;$

3) $y = \begin{cases} x^4 + 1, & \text{якщо } 0 \leq x < 2, \\ x^3 + 1, & \text{якщо } 2 \leq x < 3. \end{cases}$

11. Відомо, що функція f непарна і $0 \in D(f)$. Знайти $f(0)$.

12. Дослідити періодичність наступних функцій:

1) $y = \cos\frac{x}{2},\ x \in \mathbf{R};$
2) $y = \sin 3x,\ x \in \mathbf{R};$
3) $y = \operatorname{tg} 5x,\ x \neq \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5},\ n \in \mathbf{N};$
4) $y = \sin\frac{2x+1}{2},\ x \in \mathbf{R};$
5) $y = \cos\pi x,\ x \in \mathbf{R};$
6) $y = 2\sin\left(\frac{x}{2} + 3\right),\ x \in \mathbf{R};$
7) $y = 2^{\sin x},\ x \in \mathbf{R};$
8) $y = \{2x\},\ x \in \mathbf{R}.$

13. Довести, що функції $y = \sin\frac{1}{x},\ x \neq 0$, та $y = \cos x^2,\ \ x \in \mathbf{R}$, не є періодичними.

14. Продовжити на числову вісь періодично (з періодом 2π) наступну функцію:

$$y = \begin{cases} 0, & \text{якщо } -\pi \leq x < 0, \\ \sin x, & \text{якщо } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Обчислити її значення у точках $-\frac{23\pi}{2},\ \frac{7\pi}{3},\ \frac{23\pi}{2}$.

15. Побудувати графіки наступних степеневих функцій:
$y = x,\ \ y = x^3,\ \ y = x^5,\ \ y = x^2,\ \ y = x^4,\ \ y = x^6;$
$y = \dfrac{1}{x},\ \ y = \dfrac{1}{x^3},\ \ y = \dfrac{1}{x^2},\ \ y = \dfrac{1}{x^4}.$

16. Побудувати графіки наступних функцій:

1) $y = (1 - x^2)(2 + x);$
2) $y = x(1 - x)^2(1 + x)^2;$
3) $y = x^2 + \dfrac{1}{x};$
4) $y = x + \dfrac{1}{x^2};$
5) $y = \dfrac{1}{1 + x^2};$
6) $y = \dfrac{x}{1 - x^2};$
7) $y = \sqrt{-x - 2};$
8) $y = \frac{1}{2}\sqrt{100 - x^2}.$

17. Знайти обернені функції та побудувати їх графіки:
1) $y = 2x - x^2,\ x \geq 1;$ 2) $y = 2x - x^2,\ x \leq 1.$

ЗАНЯТТЯ 4
ГРАФІКИ ФУНКЦІЙ (ПРОДОВЖЕННЯ)

Контрольне запитання

Поняття функції. Графік функції.

A4

1. Побудувати графіки наступних показникових функцій:

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad y = 2^x, \quad y = e^x, \quad y = 10^x.$$

2. Побудувати графіки наступних логарифмічних функцій:

$$y = \log_{0,5} x, \quad y = \log_2 x, \quad y = \ln x, \quad y = \lg x.$$

3. Побудувати графіки функцій $y = \lg(-x)$ та $y = -\lg x$.

4. Побудувати графіки функцій:

1) $y = \sin x^2$;
2) $y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$;
3) $y = x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$;
4) $y = e^x \cos x$;
5) $y = \ln(\cos x)$;
6) $y = \exp\left(\frac{1}{\sin x}\right)$;
7) $y = \arcsin(\sin x)$;
8) $y = \arcsin(\cos x)$;
9) $y = \arccos(\cos x)$;
10) $y = \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x)$;
11) $y = x + \sin x$;
12) $y = x\cos x$.

Д1. Скільки коренів має рівняння $|\sin x| = \dfrac{2x}{201\pi}$?

Д2. Скільки коренів має рівняння $x^2 - 3|x| + 2 = a$ у залежності від значень параметра a?

Д3. Скільки коренів має рівняння $x^5 - 5x = a$ в залежності від значень параметра a?

Д4. Скільки коренів має рівняння $x^{13} = a(x^{14} + 1)$ в залежності від значень параметра a?

Б4

1. Побудувати графіки функцій:

1) $y = \exp(x^2)$,
2) $y = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$,
3) $y = \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$,
4) $y = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$,
5) $y = \exp\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$.

2. Побудувати графіки функцій:

1) $y = \lg(1 + x^2)$,
2) $y = \lg(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$,
3) $y = \lg\frac{1-x}{1+x}$,
4) $y = \lg\frac{1}{x^2}$,
5) $y = \lg(1 + 10^x)$.

3. Звести функцію $y = a\sin x + b\cos x$ до вигляду $y = A\sin(x - x_0)$. За допомогою цього прийому побудувати графік функції $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$.

4. Побудувати графіки функцій:

1) $y = \sin^2 x$;
2) $y = \sin^3 x$;
3) $y = \mathrm{ctg}^2\, x$;
4) $y = \sin x \sin 3x$;
5) $y = \lg\, \sin x$;
6) $y = \lg \mathrm{tg}\, x$;
7) $y = \dfrac{1}{1 + \mathrm{arctg}^2\, x}$;
8) $y = 2^{\mathrm{tg}\, x}$;
9) $y = 2^{\sin x}$;
10) $y = \lg^2 x + 6\lg x$.

5. Розв'язати графічно рівняння:

1) $\sin x = \frac{x+1}{4}$;
2) $\lg x = 4 - x^2$;
3) $x = \cos x$;
4) $x^2 = e^x + 2$.

ЗАНЯТТЯ 5
ГРАФІКИ ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ ПАРАМЕТРИЧНО. ПОЛЯРНІ КООРДИНАТИ

Контрольне запитання

Поняття функції. Графік функції.

А5

1. Побудувати криві, задані параметрично:

1) $x = 1 - t, \quad y = 1 - t^2$ (парабола);
2) $x = t + \dfrac{1}{t},\ y = t + \dfrac{1}{t^2}$;
3) $x = 10\cos t,\ y = \sin t$ (еліпс);
4) $x = 2(t - \sin t),\ y = 2(1 - \cos t)$ (циклоїда).

2. У декартовій системі координат визначити множину точок, координати яких задовольняють співвідношенню:

1) $x^2 + y^2 - 4y = 0$;
2) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$ (астроїда).

3. Побудувати графіки функцій у полярній системі координат:

1) $r = \varphi$;
2) $r = 2^{\frac{\varphi}{2\pi}}$;
3) $r = 2(1 + \cos\varphi)$;
4) $r = 10\sin 3\varphi$.

Д1. Побудувати криву, задану параметрично наступними рівняннями:
$$x(t) = 2^t \cos t, \qquad y(t) = 2^t \sin t,\ t \in \mathbf{R}.$$

Д2. У декартовій системі координат визначити множину точок, координати яких задовольняють співвідношенню
$$x^2 - xy + y^2 = 1.$$

Д3. Довести, що графіком функції, заданої у полярних координатах співвідношенням $r = \sin\varphi,\ \varphi \in [0, \pi]$, є коло.

Д4. Встановити бієкцію між інтервалом $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ та множиною дійсних чисел $\mathbf{R}$.

Д5. Встановити бієкцію між відрізком $[0, 1]$ та півінтервалом $[0, 1)$.

Б5

1. Побудувати криві, задані параметрично:

1) $x = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \quad y = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$;

2) $x = 5\cos^2 t, \quad y = 3\sin^2 t$.

Примітка. Функції $\operatorname{sh} t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}),\ \operatorname{ch} t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \quad t \in \mathbf{R}$, називаються відповідно *гіперболічними синусом* та *косинусом*.

2. У декартовій системі координат визначити множину точок, координати яких задовольняють співвідношенню:

1) $x^3 - 3xy + y^3 = 1$ (декартів лист);

2) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

3. Побудувати графіки функцій у полярній системі координат:

1) $r = \dfrac{\pi}{\varphi},\ \varphi > 0,$ (гіперболічна спіраль);

2) $r = \dfrac{\varphi}{\varphi + 1},\ 0 \le \varphi < +\infty$;

3) $r^2 = 36\cos 2\varphi$ (лемніската Бернуллі).

4. Дослідити монотонність наступних функцій:

1) $y = x^n,$ де $n \in \mathbf{Z}$;

2) $y = x^{\frac{1}{n}},$ де $n \in \mathbf{Z}$;

3) $y = a^x$;

4) $y = \log_a x$;

5) $y = \cos x$;

6) $y = \arccos x$;

7) $y = \operatorname{tg} x,\ x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

8) $y = \operatorname{arctg} x$;

9) $y = \operatorname{ctg} x,\ x \in (0, \pi)$;

10) $y = \operatorname{arcctg} x$;

11) $y = \{x\}$;

12) $y = |x| - x$.

5. Нехай функція f зростає і додатна на деякій множині, а функція g спадає і від'ємна на цій же множині. Дослідити монотонність функцій:

1) $y = f(x)g(x)$;

2) $y = f^2(x)$;

3) $y = f(x) - 4g(x)$;

4) $y = g^2(x)$.

6. Дослідити монотонність функцій:

1) $y = x + \operatorname{arctg} x$;

2) $y = \dfrac{1}{x^2 + 4x + 5}$.

ЗАНЯТТЯ 6
ОБМЕЖЕНІ МНОЖИНИ. ТОЧНІ ВЕРХНЯ ТА НИЖНЯ МЕЖІ

Контрольні запитання

1. *Означення обмеженої зверху, обмеженої знизу та обмеженої числової множини.*
2. *Означення точної верхньої та точної нижньої межі числової множини.*

А6

1. Для довільних дійсних чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ довести нерівності:

1) $|a_1 + a_2| \le |a_1| + |a_2|$; 2) $|a_1 - a_2| \ge ||a_1| - |a_2||$;

3) $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$.

2. Довести, що наступні множини дійсних чисел обмежені:

1) $A = \left\{ \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2^k} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$; 3) $A = \left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$;

2) $A = \left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$; 4) $A = \left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$.

3. Довести обмеженість та визначити точні верхню та нижню межі наступних множин:

1) $\left\{ \frac{n+1}{n} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$; 3) $\left\{ \frac{n}{2n+1} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$;

2) $\left\{ \frac{n}{n+3}(2 + (-1)^n) \mid n \in \mathbf{N} \right\}$; 4) $\left\{ 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{\pi n}{2} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$.

4. Довести, що множина всіх правильних раціональних дробів

$$A = \left\{ \tfrac{p}{q} \mid p, q \in \mathbf{N},\ 0 < p < q \right\}$$

не має ні найменшого, ні найбільшого елементів. Знайти точні верхню та нижню межі цієї множини.

5. Довести, що множина дійсних чисел

$$A = \left\{ 1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N} \right\}.$$

необмежена зверху.

Д1. Довести, що наступні множини дійсних чисел обмежені:

1) $A = \left\{ \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{k}{2^k} \mid n \ge 0 \right\}$; 2) $A = \left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2^k}{k!} \mid n \ge 1 \right\}$.

Д2. Для обмежених непорожніх підмножин A та B множини дійсних чисел довести наступні рівності:

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}; \quad \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

Д3. Нехай $\{a\}$ – дробова частина числа a. Довести, що:

1) $\sup\limits_{n \in \mathbf{N}} \{\sqrt{n}\} = 1;$ 2) $\sup\limits_{n \in \mathbf{N}} \{\sqrt[3]{n}\} = 1;$ 3) $\sup\limits_{n \in \mathbf{N}} \sin n = 1.$

Б6

1. Методом математичної індукції довести, що для довільного натурального числа n виконуються наступні рівності:

1) $1 + 2 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2};$

2) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6};$

3) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4};$

4) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$

2. Для довільного натурального числа n довести нерівність Бернуллі:

$$(1 + x_1)(1 + x_2)\dots(1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

де $x_1, x_2, \dots, x_n$ – числа одного й того ж знаку, більші за -1.

3. Довести нерівності:

1) $\forall n \in \mathbf{N}: \ \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdots \dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}};$

2) $\forall n \geq 2: \ 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n};$

3) $\forall n \geq 3: \ n^{n+1} > (n+1)^n;$

4) $\forall n \in \mathbf{N}: \left| \sin\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \right) \right| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \sin x_k, \ x_k \in [0, \pi], k = \overline{1, n};$

5) $\forall n \in \mathbf{N}: \ (2n)! < 2^{2n}(n!)^2.$

4. Розв'язати нерівності:

1) $|x + 2| < 0,03;$

2) $|x - 5| \geq 12;$

3) $|x| > |x + 1|;$

4) $|2x - 1| < |x - 1|.$

5. Довести, що для довільних дійсних чисел $a,\ b$ виконуються наступні рівності:

$$\min(a,b) = \tfrac{1}{2}(a+b-|a-b|); \quad \max(a,b) = \tfrac{1}{2}(a+b+|a-b|).$$

6. Нехай $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ для $n \geq 3$. Довести, що

$$\forall n \in \mathbf{N}:\ a_n < (1,75)^n.$$

7. Які з наступних числових множин обмежені зверху, які обмежені знизу, які необмежені? Знайти точні верхні та нижні межі для обмежених множин.

1) Множина раціональних чисел $r = \frac{p}{q}$, для яких $0 < q < p$.

2) Множина раціональних чисел $r = \frac{p}{q}$, для яких $-q < p < 0 < q$.

3) $[2,7] \cap (\mathbf{R} \backslash \mathbf{Q})$.

4) Множина периметрів правильних 2^{n+1}-кутників, вписаних у коло радіуса R.

5) Множина площ правильних 2^{n+1}-кутників, вписаних у коло радіуса R.

6) Множина десяткових наближень з надлишком для $\sqrt{2}$.

7) Множина десяткових наближень з недостачею для $\sqrt{2}$.

8. Дослідити обмеженість та у випадку обмеженості визначити точні верхню та нижню межі наступних множин:

1) $\left\{\frac{n^3}{2n^3+1} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$; 3) $\left\{\frac{1}{n^2+1},\ \frac{n^2}{n+1} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$;

2) $\left\{\frac{n^3}{n^4+1} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$; 4) $\left\{((-1)^n+1)n^2 + \frac{(-1)^n-1}{n}\cos\frac{\pi n}{2} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$.

9. Наведіть приклад числової множини A такої, що $\inf A = 0$, $\sup A = 1$, але $A \neq [0,1]$.

10. Для яких числових множин $\inf A = \sup A$?

11. Знайти:

1) $\inf\limits_{n\in\mathbf{N}} \sup\limits_{m\in\mathbf{N}} \dfrac{m-n}{m+n}$;

2) $\sup\limits_{m\in\mathbf{N}} \inf\limits_{n\in\mathbf{N}} \dfrac{m-n}{m+n}$;

3) $\sup\limits_{m\in\mathbf{N}} \inf\limits_{n\in\mathbf{N}} \dfrac{m}{m+n}$;

4) $\inf\limits_{n\in\mathbf{N}} \sup\limits_{m\in\mathbf{N}} \dfrac{m}{m+n}$;

5) $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}} \inf\limits_{x\in\mathbf{R}} (x^2-2nx)$

6) $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}} \inf\limits_{x\in\mathbf{R}} \dfrac{1}{n+2+\operatorname{arctg} x}$.

ЗАНЯТТЯ 7
ТОЧНІ МЕЖІ. ДІЙСНІ ЧИСЛА ТА ДІЇ НАД НИМИ

Контрольні запитання

1. *Означення дійсного числа.*
2. *Означення дій над дійсними числами.*

А7

1. Для множини A визначити точні верхню та нижню межі, якщо
1) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x = 2,13\alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots;\ \alpha_n \in \{0, 1, \ldots, 9\},\ n \geq 3\}$;
2) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x = 0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots; \alpha_n \leq n - 3\left[\frac{n}{3}\right],\ n \geq 1\}$.

2. Нехай A і B – обмежені непорожні підмножини $\mathbf{R}$ і
$$C = \{x + y \mid x \in A,\ y \in B\}.$$
Довести, що $\sup C = \sup A + \sup B$.

3. Нехай $a > 0$. Довести істинність висловлювань:
1) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \geq 0\ :\ 0 \leq a - a'_n < \varepsilon$;
2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \geq 0\ :\ 0 \leq a''_n - a < \varepsilon$.

4. Довести, що для довільного $a > 0$ виконуються рівності
$$\sup_{n \geq 0} a'_n = a = \inf_{n \geq 0} a''_n.$$

5. Чи існує найменше ірраціональне число у множині всіх ірраціональних чисел, більших одиниці?

6. Побудувати найбільше дійсне число, яке не містить у десятковому запису цифру 9 і менше 0,9.

7. Довести, що число $\sqrt{3}$ – ірраціональне.

8. Довести, що число $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ – алгебраїчне.

9. Довести, що квадрат трансцендентного числа – число трансцендентне.

10. Для додатних дійсних чисел a і b довести рівності :

1) $a + b = b + a$; 2) $a + a = 2a$.

11. Довести, що
$$a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}},\ a > 0,\ m \in \mathbf{N},\ n \in \mathbf{N}.$$

Д1. Для додатних дійсних чисел a, b, c довести рівність
$$(a + b)c = ac + bc.$$

Д2. Описати, як отримувати наближені значення для числа $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$.

Б7

1. Довести, що не існує раціонального числа r, такого що:
$$r^2 = 5; \quad r^3 = 7; \quad r^2 + 3r + 1 = 0; \quad r^3 - 7r + 1 = 0.$$

2. Відрізок AB ділиться точкою C так, що $AB \cdot AC = BC^2$ (золотий поділ). Довести, що відношення $\frac{AC}{AB}$ ірраціональне.

3. Вказати два ірраціональних числа, різниця яких раціональна.

4. Вказати два ірраціональних числа, добуток яких раціональний.

5. Нехай $\alpha,\ \beta \notin \mathbf{Q},\ \alpha + \beta \in \mathbf{Q}$. Довести, що $\alpha - \beta,\ \alpha + 2\beta \notin \mathbf{Q}$.

6. Нехай $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q},\ r \in \mathbf{Q}$. Які з наступних чисел можуть виявитися раціональними: 1) $\alpha+\beta$; 2) $\alpha+r$; 3) $\sqrt{\alpha}$; 4) $\sqrt{r}$; 5) $\alpha\cdot\beta$; 6) $\alpha\cdot r$; 7) $\sqrt{\alpha+r}$; 8) $\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}$; 9) $\sqrt{\alpha+\sqrt{r}}$; 10) $\sqrt{r+\sqrt{\alpha}}$?

7. Довести, що число, виражене нескінченним десятковим дробом $0,1000000001000000\ldots$ (одиниці стоять на першому, десятому, сотому, тисячному і т.д. місці, інші цифри – нулі) – ірраціональне.

8. Довести, що дійсне число $0,12345678910111213\ldots$ – ірраціональне.

9. Чи існує найбільше ірраціональне число у множині всіх ірраціональних чисел, менших одиниці?

10. Побудувати найбільше дійсне число, яке не містить у десятковому запису цифр 8 і 9 та менше $0,9$.

11. Виписати десяткові наближення числа $\sqrt{2}$ з недостачею з точністю $0,1;\quad 0,01;\quad 0,001$ і знайти різницю між числом 2 і квадратами цих наближень. Зробити те саме з наближеннями з надлишком.

12. Показати, що якщо $\frac{m}{n}$ – хороше наближення до $\sqrt{2}$, то $\frac{m+2n}{m+n}$ – ще краще наближення і що похибки цих наближень будуть різних знаків. На основі цього твердження отримайте 4 наближення до $\sqrt{2}$, виходячи з наближення $\frac{1}{1}$. Оцініть їх точність.

13. Довести виходячи з означення, що $ab = ba$.

14. Якими співвідношеннями зв'язані точні межі непорожніх обмежених множин $A \subset \mathbf{R},\ B \subset \mathbf{R}$, якщо:

1) $B = \{-x \mid x \in A\}$;
2) $B = \{x + a \mid x \in A\},\ a \in \mathbf{R}$;
3) $B = \{ax \mid x \in A\},\ a \in \mathbf{R}$;
4) $B = \{x^2 \mid x \in A\}$;
5) $B = \{x^3 \mid x \in A\}$.

15. Припустимо, що для функцій $f : A \to \mathbf{R},\ g : A \to \mathbf{R}$ множини $\{f(x) \mid x \in A\},\ \{g(x) \mid x \in A\}$ обмежені. Довести наступні нерівності:
$$\inf_{x\in A}(f(x)+g(x)) \geq \inf_{x\in A} f(x) + \inf_{x\in A} g(x);$$
$$\sup_{x\in A}(f(x)+g(x)) \leq \sup_{x\in A} f(x) + \sup_{x\in A} g(x).$$

ЗАНЯТТЯ 8
КОНТРОЛЬНА РОБОТА. ДІЇ НАД МНОЖИНАМИ. ПОБУДОВА ГРАФІКІВ. ТОЧНІ МЕЖІ. ДІЙСНІ ЧИСЛА

Завдання індивідуальні. Зразок варіанта

1. Визначити множини $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, $\overline{A}$, якщо:
1) $A = \{x| \ \sin \pi x > 0\}$, $B = \{x| \ x^2 - x - 2 < 0\}$;
2) A – множина визначення функції $y = \operatorname{ctg} \pi x$, B – множина значень функції $y = \frac{2x+1}{x}$.

2. Побудувати графіки функцій:
1) $y = |x| + x^3$;
3) $y = \operatorname{tg} \frac{1}{x}$;
2) $y = \arccos(\cos x)$;
4) $y = e^{\sin x}$.

3. Визначити $\inf A$ і $\sup A$ для множин:
1) $A = \left\{ \dfrac{1 + n^{(-1)^n}}{1 + 2n} \mid n \geq 1 \right\}$;
2) $A = \left\{ \dfrac{2x}{1 + x^2} \mid x \in \mathbf{R} \right\}$.

4. Довести, що для невід'ємних дійсних чисел a, b
1) $a + a = 2a$;
2) $ab = ba$.

5. Нехай $A \subset \mathbf{R}$, $A \neq \varnothing$ і обмежена; $B := \{-x + 1| \ x \in A\}$. Довести, що $\inf B = -\sup A + 1$.

РОЗВ'ЯЗКИ

1. 1) Розв'яжемо нерівності, що визначають елементи множин A та B:
$$\sin \pi x > 0 \Leftrightarrow x \in \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} (2n, \, 2n+1), \quad A = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} (2n, \, 2n+1);$$
$$x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, \, 2), \quad B = (-1, \, 2).$$
Тому
$$A \cup B = (-1, \, 2) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbf{Z} \backslash \{0\}} (2n, \, 2n+1) \right), \quad A \cap B = (0, \, 1),$$
$$A \backslash B = \bigcup_{n \in \mathbf{Z} \backslash \{0\}} (2n, \, 2n+1), \quad B \backslash A = (-1, \, 0] \cup [1, \, 2),$$
$$\overline{A} = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} [2n+1, \, 2n+2].$$
2) Оскільки
$$A = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} (n, \, n+1), \quad B = (-\infty, \, 2) \cup (2, \, +\infty),$$
маємо
$$A \cup B = B, \ A \cap B = A, \ A \backslash B = \varnothing, \ B \backslash A = \mathbf{Z} \backslash \{2\}, \ \overline{A} = \mathbf{Z}.$$

3. 1) Для $n = 2k,\ k \in \mathbf{N}:$
$$\frac{1+n^{(-1)^n}}{1+2n} = \frac{1+2k}{1+4k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(1+4k)};$$
для $n = 2k-1,\ k \in \mathbf{N}:$
$$\frac{1+n^{(-1)^n}}{1+2n} = \frac{1+\frac{1}{2k-1}}{1+2(2k-1)} = \frac{2k}{(2k-1)(4k-1)} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-1}.$$
Тому $\forall x \in A\ :\ x \le \frac{2}{3} \in A$. Отже, $\sup A = \max A = \frac{2}{3}$.

Далі, $\forall x \in A\ :\ x \ge 0$ та
$$\forall d > 0\ \exists k \in \mathbf{N},\ k > \tfrac{d+1}{2d}\ :\ \tfrac{1}{2k-1} - \tfrac{1}{4k-1} < \tfrac{1}{2k-1} < d.$$
Звідси $\inf A = 0$.

2) З нерівності Коші між середніми арифметичним та геометричним випливає, що
$$\forall x \in \mathbf{R}\ :\ 2|x| \le 1 + x^2,$$
де знак рівності має місце при $|x| = 1$, тобто при $x = \pm 1$. Тому
$$\forall z \in A\ :\ -1 \le z \le 1,$$
причому $\{-1,\, 1\} \subset A$. Звідси $\inf A = -1, \quad \sup A = 1$.

4. 1) Оскільки число $2 \in \mathbf{N}$, для його десяткових наближень з недостачею мають місце рівності $2'_n = 2,\ n \ge 0$. Послідовно використовуючи означення суми невід'ємних дійсних чисел, властивості раціональних чисел та означення добутку дійсних чисел, одержуємо
$$a + a = \sup_{n\ge 0}(a'_n + a'_n) = \sup_{n\ge 0}(2a'_n) = \sup_{n\ge 0}(2'_n a'_n) = 2a.$$

2) Доведення випливає з означення добутку невід'ємних дійсних чисел та властивості комутативності добутку раціональних чисел:
$$ab = \sup_{n\ge 0}(a'_n b'_n) = \sup_{n\ge 0}(b'_n a'_n) = ba.$$

5. Для кожного $z \in B$ існує таке $x \in A$, що $z = -x + 1$, причому $x \le \sup A$. Тому
$$\forall z \in B\ :\ z \ge -\sup A + 1.$$
Нехай тепер d – довільне число, що задовольняє нерівності $d > -\sup A + 1$, тобто $1 - d < \sup A$. За теоремою про характеризацію точної верхньої межі
$$\exists x' \in A\ :\ x' > 1 - d.$$
Тоді для елемента $z' = -x' + 1 \in B$ виконується $z' < -(1-d) + 1 = d$. Таким чином, число $-\sup A + 1$ задовольняє умовам теореми про характеризацію точної нижньої межі множини B,
$$\inf B = -\sup A + 1.$$

ЗАНЯТТЯ 9

ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ.
ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦІ ЗА ОЗНАЧЕННЯМ

Контрольні запитання

1. *Означення границі послідовності.*
2. *Означення обмеженої послідовності.*
3. *Теорема про єдиність границі.*

А9

1. За означенням границі послідовності довести рівності:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+3}{4n+5} = \dfrac{1}{2}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n+6}{n+1} = 5$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n^3+1} = 0$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-\sqrt{n}} = 0$.

У випадку 2) заповнити наступну таблицю:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001
$N(\varepsilon)$				

2. Чи збіжна послідовність $1,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{3},\ 1,\ \frac{1}{4},\ \ldots$?

3. Знайти наступні границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\cos n!}{n+1}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n^2} + \cdots + \dfrac{n-1}{n^2}\right)$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}\right)$.

4. Довести наступні рівності:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n} = 0$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^{\sqrt{n}}} = 0$.

5. Який вираз приймає більші значення для всіх натуральних n, починаючи з деякого:

1) $100n+200$ чи $0,01n^2$; 2) 2^n чи n^{1000}; 3) 1000^n чи $n!$?

6. Нехай послідовність $\{a_n\ :\ n \geq 1\}$ обмежена, а послідовність $\{b_n\ :\ n \geq 1\}$ збіжна до нуля. Довести, що послідовність $\{a_n b_n\ :\ n \geq 1\}$ збігається до нуля.

7. Нехай $a > 0$. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} a'_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} a''_n$.

8. Нехай $\{a_n : n \geq 1\} \subset \mathbf{R}\backslash\{0\}$. Довести, що $|a_n| \to +\infty$ при $n \to +\infty$ тоді і тільки тоді, коли $\frac{1}{a_n} \to 0$ при $n \to +\infty$.

Д1. Нехай послідовність прямує до $+\infty$. Довести, що серед її членів є найменший.

Д2. Довести, що збіжна послідовність має найбільший або найменший член.

Д3. Нехай $\{a_n : n \geq 1\}$ – послідовність, яка збігається до числа a, $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ – бієкція. Довести, що послідовність $\{a_{\sigma(n)} : n \geq 1\}$ також збіжна до числа a.

Д4. Нехай послідовність $\{a_n : n \geq 1\}$ розбіжна. Довести, що для довільної бієкції $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ послідовність $\{a_{\sigma(n)} : n \geq 1\}$ розбіжна.

Д5. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Для яких значень a існує границя послідовності $\{\operatorname{sign} a_n : n \geq 1\}$, де

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x < 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \\ 1, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

Д6. Нехай послідовність $\{a_n : n \geq 1\}$ така, що $n^2(a_{n+1} - a_n) \to 1$ при $n \to +\infty$. Довести, що для довільних натуральних чисел k, m : $n^2(a_{n+k} - a_{n+m}) \to k - m$ при $n \to +\infty$.

Б9

1. За означенням границі послідовності довести рівності:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n!} = 0$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} 0,999^n = 0$.

У випадках 1), 2) заповнити наступну таблицю:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001
N				

2. Знайти наступні границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10000n}{n^3+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2n} - \dfrac{2}{2n} + \dfrac{3}{2n} - \cdots + \dfrac{2n-1}{2n} - \dfrac{2n}{2n}\right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^2}{n^3} + \dfrac{2^2}{n^3} + \cdots + \dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right)$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^2}{n^3} + \dfrac{3^2}{n^3} + \cdots + \dfrac{(2n-1)^2}{n^3}\right)$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$.

3. Довести наступні рівності:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0,$ де $k\in\mathbf{R},\ |a|>1;$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n=0,$ де $|q|<1;$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,$ де $a>0;$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

4. Чи зміниться зміст означення границі послідовності, якщо в означенні:

1) "$\forall\varepsilon>0$" замінити на "$\forall\varepsilon\in\mathbf{R}$";
2) "$\forall\varepsilon>0$" замінити на "$\exists\varepsilon>0$";
3) "$\exists N\in\mathbf{N}$" замінити на "$\exists N\in\mathbf{R}$";
4) "$\exists N\in\mathbf{N}$" замінити на "$\forall N\in\mathbf{N}$";
5) "$\exists N\in\mathbf{N}\ \ \forall n>N\ :\ |a_n-a|<\varepsilon$" замінити на "$\exists N\in\mathbf{N}\ :\ |a_N-a|<\varepsilon$";
6) "$|a_n-a|<\varepsilon$" замінити на "$|a_n-a|\le\varepsilon$" ?

5. Нехай $a\in\mathbf{R}$, $\{a_n\ :\ n\ge 1\}$ – послідовність дійсних чисел. Що означають наступні висловлювання:

1) $\exists\varepsilon>0\ \exists k\in\mathbf{N}\ \forall n>k:\ |a_n-a|<\varepsilon;$
2) $\exists\varepsilon>0\ \exists k\in\mathbf{N}\ \forall n>k:\ |a_n-a|>\varepsilon;$
3) $\exists\varepsilon>0\ \forall k\in\mathbf{N}\ \exists n>k:\ |a_n-a|<\varepsilon;$
4) $\exists\varepsilon>0\ \forall k\in\mathbf{N}\ \forall n>k:\ |a_n-a|<\varepsilon;$
5) $\forall\varepsilon>0\ \exists k\in\mathbf{N}\ \exists n>k:\ |a_n-a|<\varepsilon;$
6) $\forall\varepsilon>0\ \exists k\in\mathbf{N}\ \exists n>k:\ |a_n-a|>\varepsilon;$
7) $\forall\varepsilon>0\ \exists k\in\mathbf{N}\ \forall n>k:\ |a_n-a|>\varepsilon;$
8) $\forall\varepsilon>0\ \exists k\in\mathbf{N}\ \forall n>k:\ |a_n-a|<\varepsilon;$
9) $\forall\varepsilon>0\ \forall k\in\mathbf{N}\ \exists n>k:\ |a_n-a|>\varepsilon;$
10) $\forall\varepsilon>0\ \forall k\in\mathbf{N}\ \exists n>k:\ |a_n-a|<\varepsilon?$

6. Нехай $a\in\mathbf{R}$, $\{a_n:\ n\ge 1\}$ – послідовність дійсних чисел. Довести, що кожна з наступних умов означає необмеженість послідовності $\{a_n:\ n\ge 1\}$:

1) $\forall\varepsilon>0\ \forall k\in\mathbf{N}\ \exists n>k:\ |a_n-a|>\varepsilon;$
2) $\forall\varepsilon>0\ \forall k\in\mathbf{N}\ \exists n>k:\ |a_n|>\varepsilon.$

7. Нехай $a\in\mathbf{R}$, $\{a_n:\ n\ \ge 1\}$ – послідовність дійсних чисел. Довести, що кожна з умов

1) $\exists\varepsilon>0\ \forall k\in\mathbf{N}\ \forall n>k:\ |a_n-a|<\varepsilon;$
2) $\exists\varepsilon>0\ \exists k\in\mathbf{N}\ \forall n>k:\ |a_n-a|<\varepsilon;$
3) $\exists\varepsilon>0\ \forall n\in\mathbf{N}:\ |a_n-a|<\varepsilon;$
4) $\exists\varepsilon>0\ \forall n\in\mathbf{N}:\ |a_n|<\varepsilon$

означає обмеженість послідовності $\{a_n:n\ \ge 1\}$.

ЗАНЯТТЯ 10
ВЛАСТИВОСТІ ЗБІЖНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ. ТЕОРЕМА ПРО ГРАНИЦЮ СУМИ, ДОБУТКУ І ЧАСТКИ

Контрольні запитання

1. *Властивості збіжних послідовностей.*
2. *Теорема про три послідовності.*
3. *Теорема про границю суми, добутку та частки збіжних послідовностей.*

А10

1. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$, де $|a|<1,\ |b|<1$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_0n^r+a_1n^{r-1}+\cdots+a_r}{b_0n^s+b_1n^{s-1}+\cdots+b_s}$, де $r,\ s\in\mathbf{N}$;
$a_i,\ b_j\in\mathbf{R},\ 0\le i\le s, 0\le j\le r,\ a_0b_0\ne 0$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^{13}+(n+2)^{11}}{(n+3)^{13}+1}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+2^n+\cos n}{2^{n+1}+\sin n^2}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n\sin n+\sqrt{n}}{(n+\lg n)^2}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{1+a^n}$, де $a\ge 0$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+5^n}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n+1}{n+2}}$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-1})$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^4+n+1}-\sqrt{n^4+1})$;

12) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3+n+1}$;

13) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{\sqrt{n}}+n+1}$;

14) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n}$;

15) $\lim\limits_{n\to\infty} (2^n-n^6)$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log_{n^2} 2}$.

Д1. Знайти границю послідовності

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})\sqrt{k(k+1)}},\quad n\ge 1.$$

Д2. Нехай $a_n\to 0,\ n\to\infty;\ a_n\ge 0,\ n\ge 1,\ b_n\to+\infty,\ n\to\infty.$ До якого числа може збігатися послідовність a_nb_n? $b_n^{a_n}$?

Д3. Для числа $a \in \mathbf{R}$ послідовність визначається наступними співвідношеннями:

$$a_1 = a, \;\; a_{n+1} = \tfrac{n+1}{n}\, a_n + \tfrac{1}{n}, \; n \geq 1.$$

Визначити, для яких значень a ця послідовність збіжна.

Д4. Нехай $a_n \geq 0, \; n \in \mathbf{N}$ і для деякого $m \in \mathbf{N}$

$$a_n^m \to a, \; n \to \infty; \; a \in \mathbf{R}$$

Довести, що

$$a_n \to \sqrt[m]{a}, \text{ при } \; n \to \infty.$$

Д5. Послідовність $\{a_n : \; n \geq 1\}$ додатних чисел така, що

$$a_n + \frac{1}{a_n} \to 2 \text{ при } n \to \infty.$$

Довести, що $a_n \to 1$ при $n \to \infty$.

Б10

1. Нехай послідовності $\{a_n : \; n \geq 1\}$ і $\{b_n : \; n \geq 1\}$ розбіжні. Що можна стверджувати про збіжність послідовностей $\{a_n + b_n : \; n \geq 1\}$ та $\{a_n b_n : \; n \geq 1\}$? Навести відповідні приклади.

2. Нехай послідовність $\{a_n : \; n \geq 1\}$ збіжна, а послідовність $\{b_n : \; n \geq 1\}$ розбіжна і обмежена. В якому випадку послідовність $\{a_n b_n : \; n \geq 1\}$ збіжна? Чи може збігатися послідовність $\{a_n + b_n : \; n \geq 1\}$?

3. Нехай $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$. Чи можна стверджувати, що для довільної послідовності $\{b_n : \; n \geq 1\}$ має місце збіжність $a_n b_n \to 0$ при $n \to \infty$? Навести приклади.

4. Нехай $a_n b_n \to 0$ при $n \to \infty$. Чи можна стверджувати, що у цьому випадку хоча б одна з послідовностей $\{a_n : \; n \geq 1\}$, $\{b_n : \; n \geq 1\}$ збігається до нуля?

5. Обчислити границі послідовностей $\{x_n : \; n \geq 1\}$, якщо:

1) $x_n = \dfrac{3-n}{2n+1} - \dfrac{3n^2+2}{4n^2+1}$;

2) $x_n = \dfrac{2n}{2n^2-1} \cos \dfrac{n+1}{2n-1}$;

3) $x_n = \dfrac{(-1)^n n}{2n-1} \cdot \dfrac{n}{n^2+n+1}$;

4) $x_n = \dfrac{1-n-n^3}{(3n+1)^3}$;

5) $x_n = \dfrac{a^n}{1+a^n}$, де $a \neq -1$;

6) $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt{n}}$;

7) $x_n = \sqrt{n^2+2n+2} - \sqrt{n^2-2n+3}$;

8) $x_n = \sqrt[3]{n^2-n^3} + n$;

9) $x_n = \dfrac{n + \lg n + 2^n}{n^2 + \lg n - 2^n}$;

10) $x_n = \dfrac{2n}{2n^2+1} \sin \dfrac{n-1}{2n+1} + \dfrac{n}{2n-1} \cdot \dfrac{n(-1)^n}{n^2+1}$.

6. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n+1}{(n-1)^2}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^4+n^2+1}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-n}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \dfrac{n}{2} \right)$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|1-2+3-4+\cdots-2n|}{\sqrt{n^2+1}}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \left(\left(a+\dfrac{1}{n}\right)^2 + \left(a+\dfrac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(a+\dfrac{n-1}{n}\right)^2 \right)$,
де $a \in \mathbf{R}$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \left(\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^2} - \dfrac{n}{3} \right)$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3}$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)}{n^3}$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$.

7. Для додатних значень параметрів $a,\ b$ обчислити наступні границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdot\ldots\cdot(1+a^n)}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n+3b^n}{5a^n+7b^n}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+3^{\sqrt{n}}+n+1}{2^{n+1}+5^{\sqrt{n}}+7}$.

ЗАНЯТТЯ 11
ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ. ТЕОРЕМА ШТОЛЬЦА

Контрольні запитання

1. *Регулярне перетворення числових послідовностей.*
2. *Теорема Тьопліца.*
3. *Теорема Штольца.*

А11

1. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}+3\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} - \dfrac{\sqrt{n}+5\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt[3]{n}+1}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[5]{2n+1}-\sqrt[5]{n+1}}{\sqrt[5]{n}}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^k+2^k+\cdots+n^k}$, де $k\in\mathbf{N}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[k]{1^k+2^k+\cdots+n^k}-n)$, де $k\in\mathbf{N}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}}-\sqrt{n-\sqrt{n^2-1}})$.

2. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^3+2^3+\cdots+(2n)^3+(2n+1)^3}{n^4}$.

3. Нехай послідовність дійсних чисел $\{a_n\ :\ n\geq 1\}$ має границю. Довести, що послідовність середніх арифметичних

$$b_n = \frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n), \quad n\geq 1$$

також має границю і $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Обернене твердження, взагалі кажучи, не виконується. Навести відповідний приклад.

4. Нехай послідовність $\{a_n\ :\ n\geq 1\}\subset(0,+\infty)$ має границю. Довести, що послідовність середніх геометричних

$$b_n = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}, \quad n\geq 1$$

також має границю і $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

5. Нехай послідовність $\{a_n : n \geq 1\} \subset (0, +\infty)$, $a_0 = 1$ та існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$. Довести, що послідовність $\{\sqrt[n]{a_n} : n \geq 1\}$ також збігається і

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

6. Обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k+1}} \left(k! + \frac{(k+1)!}{1!} + \cdots + \frac{(k+n)!}{n!} \right), \text{ де } k \in \mathbf{N}.$$

Д1. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbf{R}$. Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} (a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n).$$

Д2. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbf{R}$, $q \in \mathbf{R}$, $|q| < 1$. Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty} (a_1 q^{n-1} + a_2 q^{n-2} + \cdots + a_{n-1} q + a_n).$$

Д3. Послідовність $\{a_n : n \geq 1\}$ така, що $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = a \in \mathbf{R}$. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$.

Д4. Для послідовності $\{a_n : n \geq 1\}$ виконуються наступні співвідношення:

$$\frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \to a \in \mathbf{R} \quad \text{при} \quad n \to \infty;$$

$$n(a_{n+1} - a_n) \to b \in \mathbf{R} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Довести, що послідовність $\{a_n : n \geq 1\}$ збіжна та знайти її границю.

Б11

1. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3^n + 2^{n+1} + n}{2^n + 1} - \frac{3^n + 2^n}{2n + 2^n + 1} \right)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n} \left(\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{n^2 + 1} \right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[4]{n^3}\left(\sqrt[4]{n+a}-\sqrt[4]{n+b}\right)$, де $a>0,\ b>0;$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1}-an),$ де $a\in\mathbf{R};$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{1!+2!+\cdots+n!};$

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{an^3+n^2+3n+1}{bn^3+2n^2+7}, \quad a,\ b\in\mathbf{R};$

7) $\lim\limits_{n\to\infty} (3^n-n^6);$

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{(-1)^n}}.$

2. За допомогою теореми Штольца знайти границі :

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{a^n}$, де $a>1;$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lg n}{n}.$

3. Нехай k – натуральне число. Довести, що

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\dfrac{1}{k+1};$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^k}-\dfrac{n}{k+1}\right)=\dfrac{1}{2};$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^k+3^k+\cdots+(2n-1)^k}{n^{k+1}}=\dfrac{2^k}{k+1}.$

4. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot a+2\cdot a^2+\cdots+n\cdot a^n}{n\cdot a^{n+1}}$, де $a>1;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^k}}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^k$, де $k\in\mathbf{N}.$

ЗАНЯТТЯ 12
ГРАНИЦЯ МОНОТОННОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

Контрольні запитання

1. *Означення монотонної послідовності.*
2. *Теорема про границю монотонної послідовності.*
3. *Число* $e := \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

A12

1. Визначити натуральне число n_0 так, щоб наступні послідовності були монотонними. Знайти границі цих послідовностей:

1) $\left\{a_n = \dfrac{n^5}{3^n} :\ n \ge n_0\right\}$;

2) $\left\{a_n = \dfrac{n^4}{2^n} :\ n \ge n_0\right\}$;

3) $\left\{a_n = \dfrac{n!}{n^n} :\ n \ge n_0\right\}$;

4) $\{a_n = n^2 - 49n + 50 :\ n \ge n_0\}$;

5) $\{a_n = 5^n + (-4)^n :\ n \ge n_0\}$.

2. Довести, що послідовність

$$a_1 = 9, \quad a_{n+1} = (a_n - 3)^2,\ n \ge 1,$$

зростає і необмежена зверху. Чому дорівнює границя цієї послідовності?

3. Нехай для $n \ge 1$

$$x_1 = \sqrt{2}, \qquad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}.$$

За допомогою теореми про границю монотонної послідовності довести збіжність цієї послідовності та знайти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

4. Нехай для $n \ge 1$

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1),$$

$$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Довести, що:

1) $\forall n \ge 1 :\ a_n < b_n$; 2) $\forall n \ge 1 :\ a_n < a_{n+1}$; 3) $\forall n \ge 1 :\ b_{n+1} < b_n$;

4) послідовності $\{a_n :\ n \ge 1\}$ і $\{b_n :\ n \ge 1\}$ збіжні до одного числа – сталої Ейлера γ ($\gamma = 0,5772156649\ldots$).

5. Довести, що послідовність

$$a_n = \left(1 + \tfrac{1}{n^2}\right)^n,\ n \ge 1,$$

спадає і збіжна до 1, а послідовність

$$b_n = \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^{n^2},\ n \ge 1,$$

зростає і прямує до $+\infty$.

6. За допомогою теореми про границю монотонної послідовності довести збіжність послідовності

$$x_n = 1 + \frac{1}{2\cdot 2^1} + \frac{1}{3\cdot 2^2} + \frac{1}{4\cdot 2^3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot 2^{n-1}},\ n \ge 1.$$

7. Довести, що послідовність

$$a_n = \left(1-\tfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\tfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\tfrac{1}{n^2}\right),\ n \ge 2$$

спадна і прямує до $\frac{1}{2}$ при $n \to \infty$.

Д1. Обчислити наступні границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+\ln n}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

Д2. Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln n}+\frac{\sqrt{2}}{2\ln n}+\frac{\sqrt{3}}{3\ln n}+\cdots+\frac{\sqrt{n}}{n\ln n}\right).$$

Д3. Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{2^n}}}.$$

Д4. Нехай для $n \ge 1$

$$a_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n+1},$$

$$b_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}.$$

Довести, що:

1) $\forall n \ge 1:\ a_n < b_n$; 2) $\forall n \ge 1:\ a_n < a_{n+1}$; 3) $\forall n \ge 1:\ b_{n+1} < b_n$;

4) послідовності $\{a_n:\ n \ge 1\}$ і $\{b_n:\ n \ge 1\}$ збіжні до одного й того ж від'ємного числа.

Д5. Довести, що послідовність

$$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}},\ n \ge 1,$$

зростає і збігається до числа e, а послідовність

$$\frac{n}{(\sqrt[n]{n!})^2},\ n \ge 1,$$

спадає і збіжна до нуля.

Б12

1. Довести монотонність наступних послідовностей:

1) $a_n = n^2 + 2^n \ n \geq 1;$

2) $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+10}, \ n \geq 1;$

3) $a_n = \dfrac{n^4+3n^2+1}{n^4+3n^2+6}, \ n \geq 1;$

4) $a_n = 3 + \arcsin \dfrac{1}{n^2+4}, \ n \geq 1;$

5) $a_n = \lg \left(1 + \dfrac{n^4}{n^4+8}\right), \ n \geq 1;$

6) $a_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2}, \ n \geq 1.$

2. Знайти найбільший член послідовностей:

1) $\dfrac{n}{n^3+100}, \ n \geq 1;$ 2) $\dfrac{(\sqrt{39})^n}{n!}, \ n \geq 1;$ 3) $\sin \dfrac{\pi n}{2}, \ n \geq 1.$

3. Нехай $x_1 = \sqrt{3}, \ \ x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n}, \ n \geq 1$. За допомогою теореми про границю монотонної послідовності довести збіжність цієї послідовності та знайти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

4. Нехай $\{a_n : \ n \geq 0\}$– обмежена послідовність невід'ємних чисел. Довести збіжність послідовності

$$x_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}, \ n \geq 1.$$

5. За допомогою теореми про границю монотонної послідовності довести збіжність наступних послідовностей:

1) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}, \ n \geq 1;$

2) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2+1} + \dfrac{1}{2^2+1} + \cdots + \dfrac{1}{2^n+1}, \ n \geq 1;$

3) $x_n = 1 + \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}, \ n \geq 1;$

4) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}, \ n \geq 1;$

5) $x_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}, \ n \geq 1;$

6) $x_n = \dfrac{10}{1} \cdot \dfrac{11}{3} \cdot \ldots \cdot \dfrac{n+9}{2n+1}, \ n \geq 1;$

7) $x_n = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\left(1 - \dfrac{1}{8}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right), \ n \geq 1;$

8) $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{2}\right)\left(1 + \dfrac{1}{4}\right)\left(1 + \dfrac{1}{8}\right) \cdots \left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right), \ n \geq 1.$

ЗАНЯТТЯ 13
ПІДПОСЛІДОВНОСТІ. ЧАСТКОВІ ГРАНИЦІ ТА ЇХ ХАРАКТЕРИЗАЦІЯ. ВЕРХНЯ ТА НИЖНЯ ГРАНИЦІ ПОСЛІДОВНОСТІ

Контрольні запитання

1. *Означення підпослідовності числової послідовності.*
2. *Означення часткової границі послідовності.*
3. *Теорема про характеризацію часткової границі.*
4. *Означення верхньої та нижньої границь послідовності.*

А13

1. Довести, що монотонна послідовність збіжна, якщо збіжна деяка її підпослідовність. Довести, що кожна підпослідовність монотонної обмеженої послідовності збіжна.

2. Знайти множину часткових границь, а також нижню та верхню границі послідовності $\{x_n\ :\ n \geq 1\}$, якщо:

1) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$; 4) $x_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}\cos\dfrac{2\pi n}{3}$;

2) $x_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{\pi n}{2}$; 5) $x_n = 3\left(1-\dfrac{1}{n}\right) + 2(-1)^n$;

3) $x_n = 1 + n\sin\dfrac{\pi n}{2}$; 6) $x_{2n-1} = \dfrac{1}{2^n},\ x_{2n} = \dfrac{2^n-1}{2^n},\ n \geq 1.$

3. Нехай $a_n \to 1$ при $n \to \infty$. Довести, що послідовності $\{x_n :\ n \geq 1\}$ та $\{a_n x_n :\ n \geq 1\}$ мають одні й ті ж часткові границі.

4. Нехай послідовність дійсних чисел $\{x_n :\ n \geq 1\}$ і число a такі, що для довільного $\varepsilon > 0$ множина $\{n \in \mathbf{N} \mid x_n < a - \varepsilon\}$ скінченна. Довести, що

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \geq a.$$

5. Довести, що для збіжної послідовності $\{x_n\ :\ n\ \geq\ 1\}$ і довільної послідовності $\{y_n :\ n \geq 1\}$ виконується рівність

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

Д1. Знайти множину часткових границь, а також нижню та верхню границі такої послідовності:

$$1, \tfrac{1}{2}, 1+\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, 1+\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, 1+\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4},$$
$$\tfrac{1}{5}, \cdots, \tfrac{1}{n}, 1+\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{n}, \cdots, \tfrac{1}{n-1}+\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n+1}, \cdots.$$

Д2. Нехай послідовність $\{x_n : n \geq 1\}$ така, що її підпослідовності $\{x_{2k} : k \geq 1\}$, $\{x_{2k-1} : n \geq 1\}$, $\{x_{3k} : n \geq 1\}$ збіжні. Довести, що послідовність $\{x_n : n \geq 1\}$ збіжна.

Д3. Нехай дано три числові послідовності такі, що $a_n \leq b_n \leq c_n,\ n \geq 1$, причому $a_n \to a,\ n \to \infty$ і $c_n \to c,\ n \to \infty$. Довести, що множина часткових границь послідовності $\{b_n : n \geq 1\}$ міститься у відрізку $[a, c]$.

Д4. Нехай $a_{2n} \to 0,\ n \to \infty$ і $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = 3$. Довести, що послідовність $\left\{\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} : n \geq 1\right\}$ не може збігатися до 2.

Д5. Довести, що послідовність

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n},\ \ n \geq 1$$

збіжна та знайти її границю.

Д6. Нехай невід'ємні числа $\{c_{nk} : 1 \leq k \leq n, n \geq 1\}$ задовольняють умовам:

1) $\forall k \geq 1 :\ c_{nk} \to 0,\ n \to \infty$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{n} c_{nk} \to 1,\ n \to \infty.$

Довести, що для довільної числової послідовності $\{a_n : n \geq 1\}$ виконуються нерівності:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} c_{nk} a_k \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} c_{nk} a_k \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n.$$

Д7. Нехай для послідовності $\{a_n : n \geq 1\}$

$$b_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n),\ n \geq 1.$$

Довести, що

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \leq \underline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n.$$

Б13

1. Знайти множину часткових границь, а також нижню та верхню границі наступних послідовностей:

1) $x_n = \dfrac{1}{n - 10,5}, \quad n \ge 1;$

2) $x_n = (-1)^n \left(2 + \dfrac{3}{n}\right), \quad n \ge 1;$

3) $x_n = 1 + 2 \cdot (-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}, \quad n \ge 1;$

4) $x_n = \dfrac{n-1}{n+1} \cos \dfrac{2\pi n}{3}, \quad n \ge 1;$

5) $x_n = (-1)^n n, \quad n \ge 1;$

6) $x_n = -(2 + (-1)^n)n, \quad n \ge 1;$

7) $x_n = n^{(-1)^n}, \quad n \ge 1;$

8) $x_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n + \sin \dfrac{\pi n}{4}, \quad n \ge 1;$

9) $x_n = \dfrac{n}{n+1} \sin^2 \dfrac{\pi n}{4}, \quad n \ge 1;$

10) $x_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}, \quad n \ge 1;$

11) $x_n = \cos^n \dfrac{2\pi n}{3}, \quad n \ge 1.$

2. Знайти множину часткових границь послідовності

$$\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}, \ldots .$$

3. Для обмежених послідовностей $\{a_n : n \ge 1\}$, $\{b_n : n \ge 1\}$ довести нерівності:

1) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} b_n \le \varliminf\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) \le \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n;$

2) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n \le \varlimsup\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) \le \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n.$

Навести приклади, коли в цих співвідношеннях мають місце строгі нерівності.

4. Нехай $\{a_n : n \ge 1\}$, $\{b_n : n \ge 1\}$ – обмежені послідовності невід'ємних чисел. Довести нерівності:

1) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n \varliminf\limits_{n\to\infty} b_n \le \varliminf\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) \le \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n;$

2) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n \le \varlimsup\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) \le \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n.$

Навести приклади, коли в цих співвідношеннях мають місце строгі нерівності.

ЗАНЯТТЯ 14
ФУНДАМЕНТАЛЬНІ ПОСЛІДОВНОСТІ. КРИТЕРІЙ КОШІ

Контрольні запитання

1. *Означення фундаментальної послідовності.*
2. *Властивості фундаментальних послідовностей (обмеженість, збіжність).*
3. *Теорема про характеризацію часткової границі.*
4. *Критерій Коші збіжності числової послідовності.*

А14

1. Нехай $\{a_n : \ n \geq 1\}$ і $\{b_n : \ n \geq 1\}$ – фундаментальні послідовності. Довести фундаментальність наступних послідовностей:

1) $\{|a_n| : \ n \geq 1\}$;
2) $\{a_n b_n : \ n \geq 1\}$;
3) $\{a_n^2 : \ n \geq 1\}$;
4) $\{a_n + b_n : \ n \geq 1\}$;
5) $\{a_n a_{n+2} : \ n \geq 1\}$;
6) $\{\max\{a_n, \ b_n\} : \ n \geq 1\}$;
7) $\{\min\{a_n, \ b_n\} : \ n \geq 1\}$;
8) $\{\sqrt{|a_n|} : \ n \geq 1\}$.

2. За допомогою критерію Коші довести збіжність наступних послідовностей:

1) $x_n = \dfrac{\cos 1}{2} + \dfrac{\cos 2}{2^2} + \dfrac{\cos 3}{2^3} + \cdots + \dfrac{\cos n}{2^n}$, $n \geq 1$;

2) $x_n = \dfrac{\sin 2}{1 \cdot 2} + \dfrac{\sin 3}{2 \cdot 3} + \dfrac{\sin 4}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{\sin n}{(n-1)n}$, $n \geq 2$.

3. Нехай $\{a_n : \ n \geq 1\}$ – послідовність дійсних чисел і
$$\forall n \geq 1 : \ |a_{n+1} - a_n| < 2^{-n}.$$
Довести, що ця послідовність фундаментальна.

4. Довести, що послідовність
$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n}, \ n \geq 1,$$
не є фундаментальною. Чи має границю ця послідовність?

Д1. Нехай $\{a_n : \ n \geq 1\}$ – послідовність дійсних чисел і
$$\forall n \geq 1 : \ |a_{n+1} - a_n| < \tfrac{1}{n(n+1)}.$$
Довести, що ця послідовність фундаментальна.

Д2. Нехай $\{a_n : \ n \geq 1\}$ – послідовність дійсних чисел і
$$\forall n \geq 2 : \ |a_{n+1} - a_n| < \alpha |a_n - a_{n-1}|,$$
де $\alpha \in (0, 1)$ – фіксоване число. Довести, що ця послідовність фундаментальна.

Д3. За означенням, послідовність $\{a_n : \ n \geq 1\}$ має обмежену варіацію, якщо
$$\exists C > 0 \ \forall n \geq 2 : \ |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_n - a_{n-1}| < C.$$

Довести, що послідовність з обмеженою варіацією фундаментальна. Обернене твердження, взагалі кажучи, хибне. Навести приклад.

Д4. Нехай $n^\alpha |a_{n+1} - a_n| \to 0,\ n \to \infty$. При яких $\alpha \in \mathbf{R}$ з цієї умови випливає збіжність послідовності $\{a_n\ :\ n \ge 1\}$?

Б14

1. Довести, що підпослідовність фундаментальної послідовності фундаментальна.

2. Нехай $\{a_n :\ n \ge 1\}$, $\{b_n :\ n \ge 1\}$ – фундаментальні послідовності і

$$\exists C > 0\ \forall\, n \ge 1 :\ |b_n| > C.$$

Довести, що послідовність $\left\{ \dfrac{a_n}{b_n} :\ n \ge 1 \right\}$ фундаментальна.

3. Нехай послідовність $\{a_n\ :\ n \ge 1\}$ – фундаментальна. Довести, що послідовність $\{ \sqrt[3]{a_n} :\ n \ge 1\}$ фундаментальна.

4. Нехай $\{a_n\ :\ n \ge 0\}$ – обмежена послідовність і $|q| < 1$. Довести, що послідовність

$$x_n = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \cdots + a_n q^n,\ n \ge 1$$

фундаментальна.

5. За допомогою критерію Коші довести збіжність наступних послідовностей:

1) $x_n = \dfrac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \dfrac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \dfrac{\cos 3!}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{\cos n!}{n(n+1)},\ n \ge 1;$

2) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2},\ n \ge 1.$

6. Нехай послідовність $\{a_n\ :\ n \ge 0\}$ така, що $a_{n+1} - a_n \to 0$. Чи обов'язково ця послідовність збіжна? Навести відповідні приклади.

7. Нехай $\{a_{m(k)}\ :\ k \ge 1\}$ – деяка підпослідовність послідовності $\{a_n :\ n \ge 1\}$. Довести, що

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n \le \varliminf_{k\to\infty} a_{m(k)} \le \varlimsup_{k\to\infty} a_{m(k)} \le \varlimsup_{n\to\infty} a_n.$$

Навести приклад послідовності та її підпослідовності, для якої всі нерівності строгі.

8. Довести, що

1) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} (-a_n);$

2) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (\inf\limits_{k\ge n} a_k) = \sup\limits_{n\ge 1}(\inf\limits_{k\ge n} a_k);$

3) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (\sup\limits_{k\ge n} a_k) = \inf\limits_{n\ge 1}(\sup\limits_{k\ge n} a_k);$

4) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n^2 = \max((\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n)^2,\ (\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n)^2).$

ЗАНЯТТЯ 15
ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ У ТОЧЦІ. АРИФМЕТИЧНІ ДІЇ НАД ГРАНИЦЯМИ

Контрольні запитання

1. *Означення граничної точки числової множини.*
2. *Означення границі функції в точці за Коші.*
3. *Означення границі функції в точці за Гейне.*
4. *Теорема про рівносильність означень границі функції в точці за Коші і за Гейне.*

А15

1. За означенням Коші границі функції в точці довести, що:
1) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)=1;$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-2)=1.$

Для кожного з цих випадків заповнити наступну таблицю :

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\delta(\varepsilon)$				

2. За означенням Коші границі функції в точці довести, що

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty.$$

Заповнити наступну таблицю:

C	10	100	1000	10000
$\delta(C)$				

3. Нехай

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & \text{якщо } x\neq 0;\\ 0, & \text{якщо } x=0.\end{cases}$$

Довести, що границя функції f у точці 0 не існує.

4. Для $\alpha>0,\ b\in\mathbf{R}$ довести, що:
1) $|x|^\alpha\to 0,\ x\to 0;$ 3) $|x-b|^\alpha\to 0,\ x\to b;$
2) $x^{-\alpha}\to 0,\ x\to+\infty.$

5. Для $m\in\mathbf{N},\ k,\ b,\ x_0\in\mathbf{R}$ довести, що

$$(kx+b)^m\to(kx_0+b)^m,\ \ x\to x_0.$$

6. Нехай $n,m\in\mathbf{N};\quad a_i\in\mathbf{R},\ 0\le i\le n;\quad b_j\in\mathbf{R},\ 0\le j\le m;$ $a_0b_0\neq 0$. Довести, що:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots b_m}=\begin{cases}\infty, & \text{якщо } n>m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{якщо } n=m,\\ 0, & \text{якщо } n<m.\end{cases}$$

7. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

8. Знайти наступні границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^2-12x+16)^{10}}$.

Д1. 1) Чи можна в означенні Гейне границі функції в точці замінити слова "довільна послідовність" на слова "довільна монотонна послідовність", не змінивши його змісту?

2) Нехай $\delta>0,\ x_0\in\mathbf{R},\ f:(x_0-\delta,x_0+\delta)\to\mathbf{R}$ і для довільної послідовності $x_n\to x_0,\ n\to\infty$, послідовність $\{f(x_n)\ :\ n\ge 1\}$ збіжна. Довести, що існує $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

3) Нехай $\delta>0,\ x_0\in\mathbf{R},\ f:(x_0-\delta,x_0+\delta)\to\mathbf{R}$ і для довільної монотонної послідовності $x_n\to x_0,\ n\to\infty$, послідовність $\{f(x_n):\ n\ge 1\}$ збіжна. Чи обов'язково існує $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$?

Д2. Функція $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ визначена так: $f(x)=q,$ якщо $x\in\mathbf{Q}$, $x=\frac{p}{q}$, де $p,\ q$ – взаємно прості числа і $f(x)=0$, якщо x – ірраціональне число. Довести, що функція f необмежена у довільному околі довільної точки $x_0\in\mathbf{R}$.

Д3. Нехай $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ \ f(x)\to 0,\ x\to 0$. Довести, що

$$f(2x)+f(x)\to 0,\ x\to 0.$$

Навести приклад, який показує, що обернене твердження хибне.

Д4. Нехай $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ \ f(2x)+f(x)\to 0,\ \ x\to 0$ і

$$\exists\delta>0\ \forall x\in(-\delta,\delta),\ x\ne 0\ :\ f(x)\ge-\sqrt{|x|}.$$

Довести, що $f(x)\to 0,\ x\to 0$.

Д5. Нехай $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ \ f(x)\to 0,\ x\to 0$ і

$$\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\to 0,\ x\to 0.$$

Довести, що $\dfrac{f(x)}{x}\to 0,\ x\to 0$.

Б15

1. Нехай $f(x)=\dfrac{x}{1+x},\ x\ge 0$. Знайти $\inf f([0,+\infty)),\ \sup f([0,+\infty))$.

2. Знайти $\inf\{\sin x\mid x>0\},\ \sup\{\sin x\mid x>0\}$.

3. Нехай функція $f:[a,+\infty)\to\mathbf{R}$ обмежена на кожному відрізку $[a,b]$. Покладемо:

$$m(x)=\inf\{f(t)\mid a\le t\le x\},\quad M(x)=\sup\{f(t)\mid a\le t\le x\}.$$

Побудувати графіки функцій $y=m(x),\ y=M(x),\ x\ge 0$, якщо:

1) $f(x)=\sin x,\ x\ge 0;$ 2) $f(x)=\cos x,\ x\ge 0.$

4. Сформулювати означення Коші границі функції у точці для таких границь:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=p;$
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=p;$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=p;$
4) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty;$
5) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty;$
6) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty;$
7) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty;$
8) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty;$
9) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty;$
10) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty;$
11) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty;$
12) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty;$
13) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty;$
14) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty;$
15) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$

5. За означенням Коші границі функції у точці довести, що:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{3x+2}=\dfrac{1}{3};$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=0.$

Для кожного з цих випадків заповнити наступну таблицю:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001
$C(\varepsilon)$				

6. За означенням Коші границі функції у точці довести, що:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty\ (a>1);$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0\ \ (a>1).$

7. Знайти $\lim\limits_{x\to0} x\sin\frac{1}{x}$.

8. Довести, що не існують границі $\lim\limits_{x\to a}\sin x,\ \lim\limits_{x\to a}\operatorname{tg} x$, де $a=-\infty,\ \infty,\ +\infty.$

9. Дослідити поведінку коренів $x_1,\ x_2$ квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$ при $a\to0$, де $b,\ c$ – сталі, $b\ne0$.

10. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^4-2x^2+1}{10x^5-x^4+3};$
2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^4+3x^2-1};$
3) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+3x-1}{x^3+1};$
4) $\lim\limits_{x\to0}(x^2-x)\exp\left(-x^{-2}\right);$
5) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-3x-2}{x^3-8};$
6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^2-3x}{2x^2-9x};$

7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$;

8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x+2\operatorname{ctg} x}{(\pi-x)\sin\frac{x}{2}}$;

9) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}$;

10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$;

11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$;

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$;

14) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-4}}$;

15) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$;

16) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x+1}}$;

17) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;

18) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x-\sin x+1}{\cos x+\sin x-1}$;

19) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$;

20) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{12}-3x^{11}+2}{x^{50}+2x^{30}-3}$;

21) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+1)^5-(1-3x^2)^6}{3x^2-x^3}$;

22) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$;

23) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{2x}+\dfrac{7}{3-\sqrt[3]{x}}+1\right)$;

24) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5-x}}+\dfrac{3}{x}-2\right)$;

25) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{2x-1}{4x^2-1}\right)$;

26) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-3x^4+7x-1}{3x^5+2x^3-3}$;

27) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x+10}{5x^2+3x-1}$;

28) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+5}{3x^4-7x+1}$;

29) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-3}}$;

30) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-\sqrt{x^2-1})^{20}-(x+\sqrt{x^2+1})^{20}}{x^{20}}$;

31) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+3x-2}}{\sqrt{9x^2-x+3}}$;

32) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1})$.

11. Для натуральних чисел $m,\ n$ знайти наступні границі:

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$.

ЗАНЯТТЯ 16
ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ В ТОЧЦІ (ПРОДОВЖЕННЯ)

Контрольне запитання

Теорема про границю суми, різниці, добутку та частки функцій.

A16

1. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ де $m,n\in\mathbf{N}$;

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$;

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$.

2. Довести рівності:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} x_0,\ x_0\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

3. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$, де $m,n\in\mathbf{N}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{x}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{\sin x}$.

Д1. Знайти

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{N}\right)+\cdots+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{N}\cdot 2N\right)}{x}$$

при $N\in\mathbf{N}$.

Д2. Нехай $f(x) = \sin(\sin(\ldots(\sin x)\ldots))$, $|x| \in \left(\frac{1}{(n+1)^2}, \frac{1}{n^2}\right]$, $n \geq 1$ (n дужок), $f(0) = 0$. Довести, що

$$\frac{f(x)}{x} \to 1,\ x \to 0.$$

Б16

1. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$;

2) $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to-8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$;

5) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$;

6) $\lim\limits_{x\to16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$;

7) $\lim\limits_{x\to8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$;

8) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$, де $n \in \mathbf{N}$;

9) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$;

10) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$;

11) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$;

12) $\lim\limits_{x\to7} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$;

13) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}$, де $m, n \in \mathbf{N}$;

14) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$;

15) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$;

16) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)$;

17) $\lim\limits_{x\to0+} \left(\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}-\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}\right)$;

18) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)$.

2. Знайти сталі a_1, a_2, b_1, b_2 з наступних умов:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1\right)=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-a_2x-b_2\right)=0.$$

3. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$;

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 7x-\sin 2x}{\sin x}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$;

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x-\sin 2x}$;

6) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\operatorname{tg}(x-1)}{x^2-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\operatorname{tg}2x}$;

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$;

9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{2x^2}$;

10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 2x-1}{x\sin x}$;

11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$;

12) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{\operatorname{tg}^2 x+1-\cos 2x}$;

13) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}-1}{2\sin^2 x-1}$;

14) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\operatorname{tg}^2 x}$;

15) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\arcsin x}$;

16) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$;

17) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}(x^2+3x)}{\arcsin 2x}$;

18) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{1-\operatorname{tg}^3 x}$;

19) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}+2^{-(x-2)^{-2}}\right)$;

20) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$.

ЗАНЯТТЯ 17
ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ У ТОЧЦІ (ПРОДОВЖЕННЯ)

Контрольне запитання

Теорема про границю суми, різниці, добутку та частки функцій.

А17

1. Знайти границі :

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\dfrac{x}{\sqrt{n}}$;

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\ln(1+x)}{x}$;

8) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$, де $a>0$;

9) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$;

10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$;

11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^\varepsilon}$, де $\varepsilon>0$;

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$;

13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$;

14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

2. Побудувати графіки функцій:

1) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n},\ x\geq 0$;

2) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n},\ x\geq 0$;

3) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(2^n+x^n\right)}{n},\ x\geq 0$.

Д1. Знайти границю

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-5x+6)(x^2-5x+8)-(x-2)(x-3)}{(x^2-1)x(x+2)-24}.$$

Д2. Нехай для функції $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\backslash\{0\}$

$$\lim_{x\to\ x_0} \left(f(x) + \frac{1}{|f(x)|} \right) = 0.$$

Знайти $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Д3. Нехай $f(x) \to 0,\ x \to 0$. Довести, що $f(x) + f(2x) \to 0,\ x \to 0$. Навести приклад, який показує, що обернене твердження, взагалі кажучи, не виконується.

Д4. Нехай

1) $f(x) \geq -\sqrt{|x|},\ x \neq 0$;
2) $f(x) + f(2x) \to 0,\ x \to 0$.

Довести, що $f(x) \to 0,\ x \to 0$.

Б17

1. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{2+x}{2x-1} \right)^{x^2}$;

5) $\lim\limits_{n\to \infty} \left(\dfrac{n+x}{n-1} \right)^{n}$;

6) $\lim\limits_{n\to \infty} \sin^n \dfrac{2\pi n}{3n+1}$;

7) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}+} \left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{8} + x \right) \right)^{\operatorname{tg} 2x}$;

8) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2} \right)^{\frac{1}{x}}$;

9) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x+a}{x-a} \right)^{x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 1} (1+\sin \pi x)^{\operatorname{ctg} \pi x}$;

11) $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}$;

12) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$;

13) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$;

14) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$;

15) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x \right) \right)^{\operatorname{ctg} x}$;

16) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sin \dfrac{1}{x} + \cos \dfrac{1}{x} \right)^{x}$;

17) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$;

18) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^2}{1-x}}$;

19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}x}{x}$;

20) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\dfrac{x+1}{x}$;

21) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$;

22) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\ln(x+1)-\sin\ln x)$;

23) $\lim\limits_{x\to\infty}\lg\dfrac{100+x^2}{1+100x^2}$;

24) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$;

25) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\lg(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\lg(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$;

26) $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$;

27) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{x}-1)$, де $x>0$;

28) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$,

де $a,\ b,\ c\in(0,+\infty)$.

2. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}(2e^{\frac{x}{1+x}}-1)^{\frac{x^2+1}{x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{100}}e^{-\frac{1}{x^2}}$;

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$;

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$.

3. Побудувати графіки функцій:

1) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$, $x\neq 0$;

2) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$;

3) $y=\lim\limits_{n\to\infty}(x-1)\operatorname{arctg}x^n$.

ЗАНЯТТЯ 18
ОДНОСТОРОННІ ГРАНИЦІ.
ВІДНОШЕННЯ "O", "o" ТА ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ

Контрольні запитання

1. *Означеня односторонніх границь.*
2. *Означення відношення "O".*
3. *Означення відношення "o".*
4. *Означення відношення еквівалентності.*

A18

1. Знайти односторонні границі функції $f(x) = \dfrac{\sin x}{|x|},\ \ x \neq 0,$ при $x \to 0.$

2. Чи має функція $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$, $x \neq 0$, односторонні границі при $x \to 0$?

3. Довести такі властивості відношень $"O"$ та $"o"$:

1) $O(O(f(x))) = O(f(x)),\ x \to x_0;$
2) $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n),\ x \to 0,$ де $0 < n < m;$
3) $o(o(f(x))) = o(f(x)),\ x \to x_0.$

4. Довести наступні твердження:

1) $x \sin \frac{1}{x} = O(|x|),\ x \to 0;$
2) $\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = O(1),\ x \to 0;$
3) $\ln x = o\left(x^{-\varepsilon}\right),\ x \to 0, \varepsilon > 0;$
4) $\ln x = o(x^{\varepsilon}),\ x \to +\infty, \varepsilon > 0;$
5) $x^2 = o(e^x),\ x \to +\infty;$
6) $x \ln x = o(e^x),\ x \to +\infty;$
7) $x^{\ln x} = o(e^x),\ x \to +\infty;$
8) $x = o(x^2),\ x \to \infty;$
9) $\ln x \neq O\left(o(\ln x^2)\right),\ x \to +\infty;$
10) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt[8]{x},\ x \to 0;$
11) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt{x},\ x \to +\infty;$
12) $x^2 + x \ln^{100} x \sim x^2,\ x \to +\infty.$

5. Нехай $g(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$ і $f(x) = o(g(x))$ при $x \to +\infty$. Довести, що $e^{f(x)} = o(e^{g(x)})$ при $x \to +\infty$.

6. Визначити головну частину функції f відносно шкали порівняння $\{x^{\alpha} \mid \alpha > 0\}$ при $x \to 0,$ якщо:

1) $f(x) = 2x - 3x^3 + x^5;$ 2) $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}.$

7. Визначити головну частину функції $f(x) = x^3 - 3x + 2$ відносно шкали порівняння $\{(x-1)^\alpha \mid \alpha > 0\}$ при $x \to 1$.

8. Визначити головну частину функції f відносно шкали порівняння $\left\{x^{-\alpha} \mid \alpha > 0\ \right\}$ при $x \to +\infty$, якщо:

1) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^4+1}$; 2) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

Д1. Нехай $f(x) = o(g(x)),\ x \to 0$. Довести, що існує функція h така, що $f(x) = o(h(x)),\ x \to 0$ і $h(x) = o(g(x)),\ x \to 0$.

Д2. Чи існує функція $f\ :\ \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) > 0,\ x \neq 0$, така, що $f(x) = o(x^n),\ x \to 0$ для кожного $n \in \mathbf{N}$?

Д3. Довести, що $f(x) = O(g(x)),\ x \to 0$, і $g(x) = O(f(x)),\ x \to 0$, тоді і лише тоді, коли функція

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{g(x)} + \dfrac{g(x)}{f(x)}, & \text{якщо } f(x) \neq 0,\ g(x) \neq 0; \\ 0, & \text{якщо } f(x) = 0,\ g(x) = 0; \end{cases}$$

визначена і обмежена в деякому околі точки 0.

Д4. Довести, що $\left\{g_n(x) = e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^x}}}}} : n \geq 1\right\}$ (n експонент) – шкала порівняння при $x \to +\infty$. Чи існує функція $f(x)$ така, що $g_n(x) = o(f(x)), x \to +\infty$, для кожного $n \geq 1$?

Б18

1. Знайти односторонні границі наступних функцій при $x \to x_0$:

1) $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{якщо } x \leq 2, \\ -2x+1, & \text{якщо } x > 2, \quad x_0 = 2; \end{cases}$

2) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{|x-1|},\ x \neq 1, \quad x_0 = 1;$

3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x},\ x \neq 0, \quad x_0 = 0;$

4) $f(x) = \dfrac{x^x}{(x-3)^3},\ x \neq 3, \quad x_0 = 3;$

5) $f(x) = x + \dfrac{2}{1+2^{\frac{1}{2-x}}},\ x \neq 2, \quad x_0 = 2;$

6) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x < 1, \\ -2x, & \text{якщо } x \geq 1, \quad x_0 = 1; \end{cases}$

7) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}, & \text{якщо } x<0,\\ 1, & \text{якщо } x=0,\\ 0, & \text{якщо } x>0, \quad x_0=0;\end{cases}$

8) $f(x)=\dfrac{\cos x}{3-2^{\frac{1}{\sin x}}}, \quad x\neq 0, \quad x_0=0;$

9) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} x}{x^2-3x}, \quad x\neq 0, \quad x_0=0.$

2. Довести наступні співвідношення:

1) $O(o(f(x)))=o(f(x)), \quad x\to x_0;$
2) $o(O(f(x)))=o(f(x)), \quad x\to x_0;$
3) $O(f(x))+o(f(x))=O(f(x)), \ x\to x_0;$
4) $CO(x^n)=O(x^n), \ x\to 0$, де $C\neq 0, \ n>0;$
5) $O(x^n)O(x^m)=O(x^{n+m}), \ x\to 0,$ де $n, \ m>0.$

3. Довести рівності:

1) $2x-x^2=O(x), \ x\to 0;$
2) $x\sin\sqrt{x}=O(x^{\frac{3}{2}}), \ x\to 0;$
3) $(1+x)^n=1+nx+o(x), \ x\to 0,$ де $n\in\mathbf{R};$
4) $2x^3-3x^2+1=O(x^3), \ x\to+\infty;$
5) $\dfrac{x+1}{x^2+1}=O\left(\dfrac{1}{x}\right), \ x\to+\infty;$
6) $x+x^2\sin x=O(x^2), \ x\to+\infty;$
7) $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}=O\left(\dfrac{1}{x^2}\right), \ x\to\infty;$

4. Визначити головну частину функції f відносно шкали порівняння $\left\{\dfrac{1}{x^\alpha} \mid \alpha\in\mathbf{R}\right\}$ при $x\to+\infty$, якщо:

1) $f(x)=\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x};$
2) $f(x)=\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}.$

5. Визначити головну частину функції f відносно шкали порівняння $\big\{(x-1)^{-\alpha} \mid \alpha > 0\big\}$ при $x \to 1,$ якщо:

1) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1};$

2) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}};$

3) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}};$

4) $f(x) = \dfrac{1}{\sin \pi x};$

5) $f(x) = \dfrac{\ln x}{(1-x)^2}.$

6. Знайти порядки відносно функції $\beta(x) = x$ при $x \to 0$ наступних функцій:

1) $f(x) = -\frac{x}{2};$

2) $f(x) = \sqrt[3]{\sin x};$

3) $f(x) = \sqrt{x+4} - 2;$

4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}};$

5) $f(x) = x + \sqrt[3]{\sin x};$

6) $f(x) = \operatorname{tg} x - \sin x;$

7) $f(x) = \operatorname{tg} \sqrt[3]{x\sqrt[3]{x}};$

8) $f(x) = \ln\left(1 - \dfrac{\sin x}{2}\right);$

9) $f(x) = \sqrt{1+2x} - \sqrt{1-x};$

10) $f(x) = \sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}.$

7. Знайти порядки відносно функції $\beta(x) = x$ при $x \to +\infty$ наступних функцій:

1) $f(x) = x^3 + 2x - 3;$

2) $f(x) = \dfrac{3x^3}{1-2x+x^2};$

3) $f(x) = \sqrt[5]{x^3 - \sqrt{x}} + \sqrt{x};$

4) $f(x) = \ln(2 + e^{3x^2});$

5) $f(x) = \sqrt{3 + \sqrt{x}}.$

8. Знайти порядки відносно функції $\beta(x) = x - 1$ при $x \to 1$ наступних функцій:

1) $f(x) = 3x^2 + 5x - 3;$

2) $f(x) = \ln(x^2 + x - 1);$

3) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x}};$

4) $f(x) = x^x - 1.$

9. Знайти порядки відносно функції $\beta(x) = \dfrac{1}{x-1}$ при $x \to 1$ наступних функцій:

1) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4-1};$

2) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{1-x^2}};$

3) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}};$

4) $f(x) = \dfrac{1}{\sin \pi x};$

5) $f(x) = \dfrac{1}{\exp\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right) - 1}.$

ЗАНЯТТЯ 19
КОНТРОЛЬНА РОБОТА.
ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ У ТОЧЦІ

Завдання індивідуальні. Зразок варіанта

1. Нехай послідовність $\{a_n + b_n \ : \ n \geq 1\}$ обмежена, $a_n \to 0, \ n \to \infty$. Довести, що $a_n \cdot b_n \to 0, \ n \to \infty$.

2. Нехай $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Обчислити

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3(n+1)^{10} + \sin n + \ln n + 7}{(n-1)^{13} + \sqrt{n} + 1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n + 2^n}{a^n}$.

3. Довести, що послідовність

$$a_1 = \tfrac{1}{4}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n}, \quad n \geq 1,$$

монотонна та обмежена. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

4. За означенням границі функції в точці довести, що

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}, \quad x_0 \geq 0.$$

5. Обчислити:

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[5]{x} - 1}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sin \dfrac{1}{x} + \cos \dfrac{1}{x}\right)^x$.

РОЗВ'ЯЗКИ

1. Обмеженість послідовності $\{a_n + b_n \ : \ n \geq 1\}$ означає, що

$$\exists\, c_1 > 0\, \forall n \geq 1 \ : \ |a_n + b_n| \leq c_1.$$

Збіжна послідовність $\{a_n \ : \ n \geq 1\}$ обмежена, тобто

$$\exists\, c_2 > 0\, \forall n \geq 1 \ : \ |a_n| \leq c_2.$$

Тому

$$\forall\, n \geq 1 \ : \ |b_n| = |(a_n + b_n) - a_n| \leq |a_n + b_n| + |a_n| \leq c_1 + c_2.$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ за означенням збіжної послідовності виберемо $n_0 \geq 1$ таке, що

$$\forall\, n \geq n_0 \ : \ |a_n| < \frac{\varepsilon}{c_1 + c_2}.$$

Тоді

$$\forall\, n \geq n_0 \ : \ |a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < \frac{\varepsilon}{c_1 + c_2} \cdot (c_1 + c_2) = \varepsilon.$$

За означенням, маємо збіжність $a_n b_n \to 0, \ n \to \infty$.

2. 1) Безпосереднє використання теореми про границю дробу неможливе, оскільки чисельник та знаменник одночасно розбігаються до $+\infty$. Розділимо чисельник і знаменник дробу на n^{13} та використаємо теорему про арифметичні дії. Враховуючи співвідношення

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n^{13}}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{13}}=0,\ \text{ для } \alpha>0\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=0,$$

маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(n+1)^{10}+\sin n+\ln n+7}{(n-1)^{13}+\sqrt{n}+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n^{-1})^{10}+n^{-13}\sin n+n^{-13}\ln n+7n^{-13}}{(1-n^{-1})^{13}+n^{-25/2}+n^{-13}}=$$

$$=\frac{1+0+0+0}{1+0+0}=1.$$

2) При $|a|<2,\ a\neq 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+2^n}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{2}{a}\right)^n}{1}=\infty.$$

При $a=-2$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+2^n}{2^n}$ не існує, оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^{2n}+2^{2n}}{2^{2n}}\to 2,\ n\to\infty;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^{2n-1}+2^{2n-1}}{2^{2n-1}}\to 0,\ n\to\infty.$$

При $a=2$ маємо $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+2^n}{2^n}=2$. При $|a|>2$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+2^n}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{2}{a}\right)^n\right)=1.$$

3. Доведемо обмеженість послідовності зверху числом 1. Для цього використаємо принцип математичної індукції. Для $n=1:\ a_1=1/4<1$. Припустимо, що для натурального n виконується нерівність $0<a_n<1$. Тоді $a_{n+1}=\sqrt{a_n}<1$. Монотонне зростання послідовності випливає з нерівності

$$a_{n+1}=\sqrt{a_n}>a_n,\ n\geq 1.$$

За теоремою про існування границі монотонної послідовності маємо збіжність послідовності до деякого числа $a\in(1/4,\,1]$. Якщо в рівностях

$$a_{n+1}=\sqrt{a_n},\ n\geq 1,$$

перейти до границі при $n \to \infty$, одержимо $a = \sqrt{a}$. Звідси $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

4. Оскільки

$$\forall\,\{x_0, x\} \subset [0, +\infty)\ :\ |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \le \sqrt{|x - x_0|},$$

то

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \varepsilon^2\ \forall x \in [0, +\infty) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} :$$
$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \le \sqrt{|x - x_0|} < \sqrt{\delta} = \varepsilon.$$

Таким чином, виконані умови означення Коші границі функції в точці.

5. 1) Маємо невизначеність типу $\left(\frac{0}{0}\right)$. Усунемо цю невизначеність алгебраїчними перетвореннями та застосуємо теорему про арифметичні дії:

$$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[5]{x} - 1} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x^{4/5} + x^{3/5} + x^{2/5} + x^{1/5} + 1)}{(x-1)(x^{2/3} + x^{1/3} + 1)} = \frac{5}{3}.$$

2) Маємо невизначеність типу (1^∞). Зведемо задачу до застосування співвідношення $\lim\limits_{u\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e$.

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right)^x =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x} - 1\right)\right)^{\frac{1\cdot x\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}} =$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)}.$$

Оскільки $\lim\limits_{u\to0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$, то

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sin\tfrac{1}{x} + \cos\tfrac{1}{x} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\sin(1/x)}{1/x} + \frac{-2\sin^2(1/2x)}{4x\cdot(1/2x)^2}\right) = 1.$$

Остаточно,

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

ЗАНЯТТЯ 20
НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ. ТОЧКИ РОЗРИВУ

Контрольні запитання

1. *Означення неперервності функції в точці.*
2. *Теорема про неперервність суми, різниці, добутку та частки неперервних функцій.*
3. *Теорема про суперпозицію неперервних функцій.*

A20

1. Нехай $f(x) = x^2,\ x \in \mathbf{R}$. За означенням Коші довести неперервність функції f в точці $x_0 \in \mathbf{R}$. Дати геометричну інтерпретацію неперервності функції f в точці $x_0 \in \mathbf{R}$.

2. Застосувати означення неперервності $(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0))$ для доведення неперервності на $\mathbf{R}$ функції:

$$y = \frac{x^5 \sin x^2}{x^2+1}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

3. Застосувати теореми про неперервність суперпозиції неперервних функцій та про арифметичні дії над неперервними функціями для доведення неперервності на $\mathbf{R}$ функції

$$f(x) = \sin^3 2x + e^{3x}(x^2 - x - 5), \quad x \in \mathbf{R}.$$

4. Дослідити неперервність та побудувати графіки наступних функцій ($a \in \mathbf{R}$):

1) $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{якщо}\, x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо}\, x = 0; \end{cases}$ 3) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{якщо}\, x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо}\, x = 0; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & \text{якщо}\, x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо}\, x = 0; \end{cases}$ 4) $f(x) = \begin{cases} x\ln^2 x, & \text{якщо}\, x \neq 0, \\ a, & \text{якщо}\, x = 0, \end{cases}$

5. Визначити точки розриву функцій та дослідити характер розривів, якщо:

1) $y = \dfrac{x+1}{x^3+1}$; 2) $y = \exp\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.

6. Дослідити неперервність наступних функцій:

1) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, & \text{якщо } 1 < x \le 2; \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } |x| \le 1, \\ 1, & \text{якщо } |x| > 1. \end{cases}$

7. Наступні функції визначити в точці 0 так, щоб вони були неперервними у цій точці:

1) $y = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$; 2) $y = \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}$.

8. Чи обов'язково розривна в точці x_0 сума двох функцій, одна з яких неперервна в точці x_0, а друга розривна в точці x_0 ? Чи обов'язково розривна в точці x_0 сума двох розривних в точці x_0 функцій?

Д1. Функція

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{якщо } x \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q} \end{cases}$$

називається функцією Діріхле. Довести, що в кожній точці $x_0 \in \mathbf{R}$ ця функція має розрив другого роду.

Д2. Нехай функція $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ обмежена на $\mathbf{R}$. Коливанням функції f на відрізку $[x-\delta, x+\delta]$, де $x \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, називається число

$$\omega(x,\delta) = \sup\{f(x) \mid x \in [x-\delta, x+\delta]\} - \\ - \inf\{f(x) \mid x \in [x-\delta, x+\delta]\}.$$

Довести наступні твердження:

1) $\omega(x,\delta) = \sup\{f(s) - f(t) \mid t,\ s \in [x-\delta, x+\delta]\}$;

2) $\omega(x,\delta_1) \le \omega(x,\delta_2)$, де $0 < \delta_1 \le \delta_2$;

3) існує $\lim\limits_{\delta\to 0+} \omega(x,\delta) =: \omega(x) \in \mathbf{R}$;

4) функція f неперервна в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли $\omega(x_0) = 0$;

5) для неспадної на $\mathbf{R}$ функції f

$$\omega(x) = f(x+) - f(x-), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Д3. Дослідити неперервність наступної функції:

$$f(x) = \begin{cases} x(x-2), & \text{якщо } x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{якщо } x \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Д4. Знайти функцію $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, неперервну у точці 0, яка для всіх $x \in \mathbf{R}$ задовольняє співвідношення $f(x) + f\left(\frac{x}{2}\right) = x$.

Д5. Навести приклад функції $f : (0,1) \to \mathbf{R}$, неперервної в усіх раціональних точках і розривної в незліченній множині точок.

Б20

1. За означенням Коші (у термінах $\varepsilon-\delta$) довести неперервність наступних функцій:

1) $y = \dfrac{x+3}{2-3x}$ у точці $x_0 = \frac{1}{2}$; 2) $y = \sqrt{x}$ у точці $x_0 > 0$.

2. Застосувати означення неперервності $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\right)$ для доведення неперервності на $\mathbf{R}$ функцій:

1) $y = \dfrac{x^5+3}{x^2-x+1},\ x \in \mathbf{R}$; 2) $y = \cos(ax+b),\ x \in \mathbf{R}$.

3. Застосувати теореми про неперервність суперпозиції неперервних функцій та про арифметичні дії над неперервними функціями для доведення неперервності на $\mathbf{R}$ функцій

1) $y = 2^{\frac{1}{1+x^2}},\ x \in \mathbf{R}$; 2) $y = \operatorname{arctg}\left(\cos\frac{x}{2}\right),\ x \in \mathbf{R}$.

4. Дослідити неперервність, неперервність справа і зліва, характер точок розриву і побудувати графіки наступних функцій:

1) $y = \dfrac{x^3-1}{x-1}$; 2) $y = \begin{cases} \frac{x^3}{x-1}, & \text{якщо } x \neq 1, \\ 4, & \text{якщо } x = 1. \end{cases}$

5. Знайти точки розриву та визначити характер розривів таких функцій:

1) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2}, & x \in [0,1), \\ x^2+1, & x \geq 1; \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ x^3, & x > 1; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ 1-x, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{1-x}, & x > 1; \end{cases}$ 4) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ \operatorname{tg} x + 1, & x > 0. \end{cases}$

6. Функція f не визначена у точці 0. Визначити функцію f у нулі так, щоб вона була неперервною у цій точці:

1) $f(x) = \dfrac{\ln(1-3x)}{x}$; 5) $f(x) = \sin x \cdot \sin\dfrac{1}{x}$;

2) $f(x) = \dfrac{\sqrt[5]{1+2x}-1}{\sin x}$; 6) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$;

3) $f(x) = \dfrac{2^{3x}-1}{3x}$; 7) $f(x) = x^x$;

4) $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{2\operatorname{tg} x}$; 8) $f(x) = x\ln^2 x$.

7. Нехай $f, g : (a,b) \to \mathbf{R}$. Чи обов'язково добуток цих функцій має розрив у точці $x_0 \in (a,b)$, якщо:

1) функція f неперервна в точці x_0, а функція g розривна в цій точці?
2) обидві функції розривні в точці x_0?

Навести відповідні приклади.

8. Нехай функції $f, g : (a,b) \to \mathbf{R}$ неперервні на інтервалі (a,b). Довести, що функції $\max(f(x), g(x))$ та $\min(f(x), g(x)),\ x \in (a,b)$, також неперервні на (a,b).

ЗАНЯТТЯ 21
ВЛАСТИВОСТІ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ. РІВНОМІРНА НЕПЕРЕРВНІСТЬ

Контрольні запитання

1. *Означення рівномірно неперервної функції.*
2. *Теорема Кантора.*

А21

1. Нехай функція $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ і виконуються наступні умови:
1) $f \in C((a, b))$; 2) $\forall\, x \in (a, b) \ : \ f(x) \neq 0$.
Довести, що функція f зберігає знак на інтервалі (a, b).
2. Розв'язати нерівність
$$(2x - 1)(x - 2)^3(x + 1)(x + 2)^2 < 0$$
методом інтервалів та обгрунтувати цей метод.
3. Довести, що многочлен $P(x) = x^5 - 3x + 1, \ x \in \mathbf{R}$, має корінь на інтервалі $(1, 2)$.
4. Довести, що довільне алгебраїчне рівняння непарного степеня з дійсними коефіцієнтами має принаймні один дійсний корінь.
5. Довести, що неперервна на $\mathbf{R}$ періодична функція приймає найбільше і найменше значення на $\mathbf{R}$.
6. Застосувати теорему про існування та властивості оберненої функції до функцій:
1) $f(x) = \cos x, \ x \in [0, \pi]$; 3) $f(x) = x^2 - 2x, \ x \geq 1$.
2) $f(x) = x^2 - 2x, \ x \leq 1$;
7. Нехай $f(x) = \frac{1}{x}, \ x \neq 0$. За означенням Коші довести неперервність функції f в точці $x_0 > 0$. Дати геометричну інтерпретацію неперервності функції f в точці $x_0 > 0$. Як змінюється $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ зі зменшенням ε? зі зменшенням додатного x_0? Чи є функція f рівномірно неперервною на множині $(0, 1)$?
8. Довести, що функція $f(x) = 5x - 3, \ x \in \mathbf{R}$, рівномірно неперервна на $\mathbf{R}$.
9. Довести, що сума двох рівномірно неперервних на множині A функцій є рівномірно неперервною на цій множині функцією.
10. В термінах $(\varepsilon - \delta)$ сформулювати, що функція $f : A \to \mathbf{R}$ не є рівномірно неперервною на множині $\mathbf{R}$. Довести, що функція f неперервна на множині A, але не рівномірно неперервна на цій множині, якщо:
1) $f(x) = \frac{1}{x}, \ x \in A = (0, 1)$; 3) $f(x) = x^2, \ x \in A = \mathbf{R}$;
2) $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}, \ x \in A = (0, 1)$; 4) $f(x) = \sin x^2, \ x \in A = \mathbf{R}$.

11. Застосувати теорему Кантора для доведення рівномірної неперервності на множині A наступних функцій:

1) $f(x) = \dfrac{x}{4 - x^2}, \quad A = [-1, 1];$ 2) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}, \quad A = (0, \pi).$

Д1. Знайти всі неперервні на $\mathbf{R}$ функції, які задовольняють співвідношенню

$$\forall\, x,\ y \in \mathbf{R}:\ f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Це співвідношення називають *функціональним рівнянням Коші*.

Д2. Довести, що функція $f(x) = \sqrt{x},\ x \geq 0$, рівномірно неперервна на $[0, +\infty)$.

Д3. Нехай функція $f : [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ і виконуються наступні умови:

1) $f \in C([a, +\infty))$;

2) існує $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = p \in \mathbf{R}$.

Довести, що функція f рівномірно неперервна на $[a, +\infty)$.

Д4. Нехай $f \in C([0, 2])$ і $f(0) = f(2)$. Довести, що існують числа $x, y \in [0, 2]$ такі, що $y - x = 1$, $f(x) = f(y)$. Дати геометричну інтерпретацію.

Д5. 1) Довести, що монотонна функція $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ є неперервною тоді і тільки тоді, коли для неї на відрізку $[a, b]$ справджується теорема Коші про проміжні значення.

2) Довести, що неперервна функція $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ є монотонною тоді і тільки тоді, коли для неї на відрізку $[a, b]$ справджується теорема Коші про проміжні значення, причому кожне значення досягається рівно один раз.

Д6. Нехай A, B – множини, на кожній з яких функція f є рівномірно неперервною.

1) Чи завжди f є неперервною на $A \cup B$?

2) Чи завжди f є рівномірно неперервною на $A \cup B$?

3) Довести, що f рівномірно неперервна на $A \cup B$, якщо A і B замкнені множини, A – обмежена множина.

Б21

1. Розв'язати нерівності:

1) $\dfrac{(x+3)(x+2)^3(x+1)(x-2)}{x(x-3)(x-4)} > 0;$ 3) $\sin 2x - \sin 3x > 0;$

2) $\dfrac{(x^3-1)(x^2+5x+6)}{(x^3+8)(x-3)} < 0;$ 4) $0,5^{x^4 - 2x^2} < 2^{-8x^2 + 9}$.

2. Довести, що наступні рівняння мають розв'язки на вказаних інтервалах:

1) $x^5 - 6x^2 + 3x - 7 = 0,\ x \in (0, 2)$;
2) $8^x - 2^x - 16 = 0,\ x \in (0, 2)$;
3) $3\sin^3 x - 5\sin x + 1 = 0,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

3. Знайти обернену функцію до розривної в точці 0 функції $y = (1 + x^2)\,\mathrm{sign}\, x,\ x \in \mathbf{R}$, і довести, що обернена функція неперервна на множині визначення.

4. Застосувати теорему про існування та властивості оберненої функції для функцій:

1) $y = \dfrac{2x}{1 + x^2},\ x \leq -1$;
2) $y = \dfrac{2x}{1 + x^2},\ -1 \leq x \leq 1$;
3) $y = \dfrac{2x}{1 + x^2},\ x \geq 1$;
4) $y = \mathrm{ctg}\, x,\ \ x \in (0, \pi)$.

5. Довести, що многочлен $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x,\ \ x \in \mathbf{R}$, набуває найбільшого і найменшого значення на інтервалі $(-1, 1)$.

6. Довести, що функція $f(x) = 2\cos(3x + 5),\ x \in \mathbf{R}$, рівномірно неперервна на $\mathbf{R}$.

7. Довести рівномірну неперервність на множині A наступних функцій:

1) $y = x^2,\ A = (-1, 1)$;
2) $y = \sin x^2,\ A = (-2, 3)$;
3) $y = \sqrt{x},\ A = [1, +\infty)$.

8. Довести, що функція $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$, не рівномірно неперервна на $\mathbf{R}$.

9. Довести, що добуток скінченного числа рівномірно неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій є рівномірно неперервною на $[a, b]$ функцією.

10. Довести, що функція $f(x) = \dfrac{|\sin x|}{x},\ x \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$, рівномірно неперервна на кожному з інтервалів $(-1, 0)$ та $(0, 1)$, але не рівномірно неперервна на об'єднанні цих інтервалів.

11. Нехай функція $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ і виконано такі умови:

1) f обмежена на (a, b);
2) $f \in C((a, b))$;
3) f монотонна на (a, b).

Довести, що функція f рівномірно неперервна на (a, b).

ЗАНЯТТЯ 22
ОЗНАЧЕННЯ ПОХІДНОЇ. ОБЧИСЛЕННЯ ПОХІДНИХ

Контрольні запитання

1. *Означення похідної функції в точці.*
2. *Таблиця похідних.*
3. *Теореми про похідну від суми, різниці, добутку та частки функцій.*

А22

1. За означенням похідної знайти похідну функції f в точці x_0, якщо
1) $f(x) = \sin x,\ x \in \mathbf{R},\ x_0 = 0;$ 2) $f(x) = \ln x,\ x > 0,\ x_0 = 1.$

2. Довести, що функція $f(x) = e^{|x|},\ x \in \mathbf{R}$, не має похідної в точці $x_0 = 0$. Побудувати графік цієї функції.

3. За означенням похідної знайти похідну функції f, якщо:
1) $f(x) = \sqrt{x},\ x > 0;$ 2) $f(x) = \operatorname{arctg} x,\ x \in \mathbf{R}.$

4. Нехай функція f має похідну в точці x_0 . Довести, що
$$\lim_{n\to\infty} n\left(f\left(x_0 + \tfrac{1}{n}\right) - f(x_0)\right) = f'(x_0).$$
Навести приклад, коли ця границя існує, але функція не має похідної в точці x_0.

5. За допомогою таблиці похідних та правил знаходження похідних знайти похідні наступних функцій:

1) $y = (5+2x)^{10}(3-4x)^{20};$
2) $y = \dfrac{2x}{1-x^2};$
3) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}};$
4) $y = \cos 2x - 2\sin x;$
5) $y = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x;$
6) $y = e^x(x^2 - 2x + 2);$
7) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{e^x};$
8) $y = \ln(\ln(\ln x));$
9) $y = \frac{1}{4}\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1};$
10) $y = \ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2};$
11) $y = \arccos\dfrac{1}{x};$
12) $y = x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x));$
13) $y = x\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x};$
14) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x};$
15) $y = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x;$

16) $y = \dfrac{e^x \cos x}{\sin x^2}$;

17) $y = \cos^3 x^3 - e^{x^2} \operatorname{tg} x$;

18) $y = \exp(\operatorname{arctg} \sqrt{x+4})^2$;

19) $y = \sqrt{1+x^2} - \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

Д1. Знайти точки, в яких функція

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{якщо } x \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}, \end{cases}$$

має похідну.

Д2. Для яких значень параметра α функція

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \end{cases}$$

має похідну в точці $x_0 = 0$?

Д3. Нехай функція f має похідну в точці x_0, а послідовності $\{x_n \,:\, n \geq 1\}$ та $\{z_n \,:\, n \geq 1\}$ такі, що

$$\forall n \geq 1 : \; x_n \neq x_0, \; z_n \neq x_0; \quad x_n \to x_0, \; z_n \to x_0, \; n \to \infty.$$

Чи існує границя

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(z_n)}{x_n - z_n} \, ?$$

Навести відповідні приклади.

Д4. Нехай функція f має похідну в точці x_0 і число $k \in \mathbf{N}$ фіксоване. Знайти границю

$$\lim_{n \to \infty} n \left(f \left(x_0 + \tfrac{1}{n} \right) + f \left(x_0 + \tfrac{2}{n} \right) + \dots + f \left(x_0 + \tfrac{k}{n} \right) - k f(x_0) \right).$$

Д5. Нехай $f \in C^1([a,b]), \; x_0 \in (a,b)$. Довести, що для довільних послідовностей $\{x_n \,:\, n \geq 1\}$ і $\{z_n \,:\, n \geq 1\}$ таких, що $x_n \to x_0, \; n \to \infty$, $z_n \to x_0, \; n \to \infty$, вірно, що

$$\frac{f(x_n) - f(z_n)}{x_n - z_n} \to f'(x_0), \; x \to x_0.$$

Чи можна відмовитися від умови неперервності похідної?

Б22

1. За означенням похідної знайти похідну функції f у точці x_0, якщо

1) $f(x) = \cos x, \; x \in \mathbf{R}, \quad x_0 = 0$;
2) $f(x) = \sqrt[3]{x}, \; x \in \mathbf{R}, \quad x_0 = 1$.

2. Довести, що функція $f(x) = (1 + |x|)^2, \quad x \in \mathbf{R}$, не має похідної в точці $x_0 = 0$. Побудувати графік цієї функції.

3. За означенням похідної знайти похідну функції f, якщо:

1) $f(x) = e^x, \ x \in \mathbf{R}$;

2) $f(x) = \operatorname{tg} x, \ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}$.

4. Нехай $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$. Знайти $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(3)$.

5. Знайти $f'(1)$, якщо $f(x) = x + (x-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$.

6. Використовуючи таблицю похідних та правила диференціювання, знайти похідні наступних функцій:

1) $y = \dfrac{x^p(1-x)^q}{1+x}$;

2) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$;

3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}$;

4) $y = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$;

5) $y = 4\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x} + \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^8 x}$;

6) $y = e^x(1 + \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2})$;

7) $y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$;

8) $y = \ln(\ln^2(\ln^3 x))$;

9) $y = \ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$;

10) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$;

11) $y = \sin(\cos^2 x)\cdot\cos(\sin^2 x)$;

12) $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$;

13) $y = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$;

14) $y = \sqrt{x+1} - \ln(1+\sqrt{x+1})$;

15) $y = \ln\left(\dfrac{1}{x} + \ln\left(\dfrac{1}{x} + \ln\dfrac{1}{x}\right)\right)$;

16) $y = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x + \ln\sin x$;

17) $y = \ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - \cos x\cdot\ln\operatorname{tg} x$;

18) $y = \arcsin\dfrac{x}{2}$;

19) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{2}}{x}$;

20) $y = \arcsin(\sin x)$;

21) $y = \arccos(\cos^2 x)$;

22) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$;

23) $y = \ln\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$;

24) $y = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{1+x^2})$.

ЗАНЯТТЯ 23
ОБЧИСЛЕННЯ ПОХІДНИХ (ПРОДОВЖЕННЯ)

Контрольне запитання

Теорема про похідну суперпозиції функцій.

А23

1. Знайти похідні наступних функцій:
1) $y = \arcsin(\sin x^2) + \arccos(\cos x^2)$;
2) $y = \operatorname{arctg} e^x - \ln \sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$;
3) $y = \dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} - \dfrac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arcctg} \dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. Нехай функції $u : A \to (0, +\infty)$, $v : A \to \mathbf{R}$ мають похідні в точці x_0. Довести, що функція $f(x) = u(x)^{v(x)}$, $x \in \mathbf{R}$, має похідну в точці x_0 та знайти цю похідну.

3. Нехай $f : A \to (0, +\infty)$ має похідну на множині A. Похідна від логарифма функції f називається логарифмічною похідною функції f:
$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$
Знайти логарифмічну похідну функції
$$f(x) = (x - a_1)^{\alpha_1}(x - a_2)^{\alpha_2} \dots (x - a_n)^{\alpha_n}.$$

4. Знайти похідні:
1) $y = x^{\sin x}$;
2) $y = x + x^x + x^{x^x}$;
3) $y = (\ln x)^x : x^{\ln x}$;
4) $y = \log_x e$.

5. Знайти похідні, побудувати графіки наступних функцій та їх похідних:
1) $y = |x|$; 2) $y = x|x|$; 3) $y = \ln |x|$.

6. Довести, що функція
$$y = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \end{cases}$$
має похідну на $\mathbf{R}$. Дослідити неперервність цієї похідної.

7. Навести приклад неперервної на $\mathbf{R}$ функції, яка не має похідної в заданих точках $a_1,\ a_2,\ \dots, a_n$.

8. Отримати формули для сум:

1) $P_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$;
2) $Q_n(x) = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1}$.

9. Нехай парна функція має похідну на множині визначення. Довести, що ця похідна є непарною функцією. Аналогічно, довести, що похідна непарної функції є функція парна.

Д1. Нехай функції $f, g : A \to (0, +\infty)$; $h : A \to \mathbf{R}$ мають похідну в точці x_0. Довести, що функція $f(x)^{g(x)^{h(x)}}$ має похідну в точці x_0 і знайти цю похідну.

Д2. Нехай функція f має похідну в точці x_0. Знайти границю

$$\lim_{n\to\infty} \left(f\left(x_0 + \tfrac{1}{n}\right) + f\left(x_0 + \tfrac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(x_0 + \tfrac{n}{n^2}\right) - nf(x_0)\right)$$

Д3. Функція f має похідну в точці a, причому $f(a) > 0$. Знайти наступні границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n$; 2) $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f(x)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{\ln x - \ln a}}$.

Д4. Обчислити наступні суми:

1) $x + 3x^3 + 5x^5 + \cdots + (2n+1)x^{2n+1}$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k$; 3) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2C_n^k$.

Б23

1. За допомогою таблиці похідних та правил їх знаходження знайти похідні наступних функцій:

1) $y = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}} - \dfrac{1}{4\sqrt{2}}$;
2) $y = \arccos(\sin x^2 - \cos x^2)$;
3) $y = e^{m \arcsin x}(\cos(m \arcsin x) + \sin(m \arcsin x))$;
4) $y = \operatorname{arcctg} \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg} \frac{1}{x^2}}}$;
5) $y = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^a}$;
6) $y = x^{\frac{1}{x}}$;
7) $y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$;
8) $y = \ln(\operatorname{ch} x) + \dfrac{1}{2\operatorname{ch}^2 x}$;
9) $y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x})$;
10) $y = \dfrac{a^x}{1 + a^{2x}} - \dfrac{1 - a^{2x}}{1 + a^{2x}} \operatorname{arcctg} a^{-x}$.

2. Знайти похідні і побудувати графіки функцій та їх похідних:

1) $y = \begin{cases} (1-x)(2-x), & \text{якщо } 1 \le x \le 2, \\ -(2-x), & \text{якщо } x > 2; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} x, & \text{якщо } x < 0, \\ \ln(1+x), & \text{якщо } x \ge 0; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & \text{якщо } |x| \le 1, \\ \frac{1}{e}, & \text{якщо } |x| > 1. \end{cases}$

3. Знайти логарифмічну похідну функції y, якщо:

1) $y = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; 2) $y = (x + \sqrt{1+x^2})^n$.

4. Для яких значень параметра $n \in \mathbf{Z}$ функція

$$y = \begin{cases} x^n \sin \dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x \ne 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \end{cases}$$

1) неперервна на $\mathbf{R}$; 2) має неперервну похідну на $\mathbf{R}$?

5. Довести, що функція

$$y = \begin{cases} x^2 \left|\cos \dfrac{\pi}{x}\right|, & \text{якщо } x \ne 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \end{cases}$$

не має похідної в точках будь-якого околу точки 0, але ісрує похідна $f'(0)$.

6. Чи можна твердити, що сума функцій f та g не має похідної у точці x_0, якщо:

1) функція f має похідну у точці x_0, а функція g не має похідної у цій точці?
2) обидві функції f, g не мають похідної в точці x_0?

7. Чи можна твердити, що добуток функцій f та g не має похідної у точці x_0, якщо:

1) функція f має похідну у точці x_0, а функція g не має похідної у цій точці?
2) обидві функції f, g не мають похідної в точці x_0?

Розглянути приклади:

1) $f(x) = x, \ \ g(x) = |x|$;
2) $f(x) = |x|, \ g(x) = |x|$, де $x_0 = 0$.

8. Чи можна твердити, що суперпозиція $h = g(f)$ функцій f та g не має похідної у точці x_0, якщо:

1) функція g має похідну у точці $y_0 = f(x_0)$, а функція f не має похідної у точці x_0?

2) функція g не має похідної у точці y_0, а функція f має похідну у точці x_0?

3) функція g не має похідної у точці y_0 і функція f не має похідної у точці x_0?

Розглянути приклади:

1) $g(x) = x^2, \;\; f(x) = |x|$;
2) $g(x) = |x|, \; f(x) = x^2$,
3) $g(x) = 2x + |x|, \; f(x) = \frac{2}{3}\,x - \frac{1}{3}\,|x|$, де $x_0 = 0$.

9. Нехай періодична функція має похідну на $\mathbf{R}$. Довести, що ця похідна також функція періодична з тим самим періодом.

10. Нехай функції $f, \; g$ мають похідну на множині A. Знайти похідну функції y, якщо:

1) $y = \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$;
2) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{f(x)}{g(x)}$;
3) $y = (g(x))^{\frac{1}{f(x)}}$, де $f(x) \neq 0, \; g(x) > 0, \; x \in A$;
4) $y = \log_{f(x)} g(x)$, де $f(x) > 0, \; f(x) \neq 1, \; g(x) > 0, \; x \in A$.

11. Довести наступне правило диференціювання визначника n-го порядку:

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kn}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix},$$

для $x \in A$, де функції $f_{ij}, \; 1 \leq i, \; j \; \leq n$ мають похідні на множині A.

ЗАНЯТТЯ 24
ОБЧИСЛЕННЯ ПОХІДНИХ (ПРОДОВЖЕННЯ). ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ

Контрольне запитання

Геометричний зміст похідної.

А24

1. За допомогою теореми про похідну оберненої функції, знайти похідну функції, оберненої до функції $g(y), y \in A$:

1) $g(y) = y^3 + 3y,\ y \in \mathbf{R}$; 3) $g(y) = y + e^y,\ y \in \mathbf{R}$;
2) $g(y) = y + \ln y,\ y > 0$.

2. Знайти похідні функцій, заданих параметрично:

1) $x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}},\ y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}}$;
2) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$.

3. Функція $y = y(x),\ x \in A$ задана у неявному вигляді співвідношенням

$$x^2 + 2xy - y^2 = 2x.$$

Знайти похідну y'. Обчислити y', якщо $x = 2$ і $y = 4$; якщо $x = 2$ і $y = 0$.

4. Записати формули переходу від полярної системи координат (r, φ) до декартової системи координат (x, y), якщо полюс співпадає з початком декартової системи координат, а напрямок полярної вісі з напрямком вісі абсцис. Знайти y'_x, якщо

$$r = a\varphi \quad \text{(спіраль Архімеда).}$$

5. Під яким кутом графік функції $y = \ln x,\ x > 0$, перетинає вісь абсцис?

6. При яких значеннях незалежної змінної дотичні до графіків функцій $y = x^2$ і $y = x^3$ паралельні?

7. На параболі $y = x^2$ вибрано дві точки з абсцисами $x_1 = 1$ і $x_2 = 3$. Через ці точки проведена січна. У якій точці на параболі дотична до неї паралельна проведеній січній?

Д1. Довести, що сімейства гіпербол $x^2 - y^2 = a,\ a > 0$ і $xy = b$, $b > 0$ утворюють ортогональну сітку, тобто криві цих сімейств перетинаються під прямими кутами.

Д2. Довести, що дотична до логарифмічної спіралі $r = ae^{m\varphi}$, де $a,\ m$ – фіксовані, утворює сталий кут з радіусом-вектором точки дотику.

Д3. *Піддотичною* називається проекція на вісь абсцис відрізка дотичної від точки дотику до перетину з віссю абсцис. Довести, що графік параболи $y^2 = 2px$ має таку властивість: довжина піддотичної дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику. Дати спосіб побудови дотичної до параболи за допомогою циркуля та лінійки.

Д4. Нехай $a > 0$. Графік функції $y = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a},\ x \in \mathbf{R}$, називається *ланцюговою лінією*. Записати рівняння нормалі до графіка цієї функції у точці $M(x_0, y_0)$. Знайти довжину відрізка MK, де K – точка перетину цієї нормалі з віссю абсцис.

Б24

1. Нехай $0 \le \varepsilon < 1$. Довести, що функція $g(y) = y - \varepsilon \sin y, \quad y \in \mathbf{R}$, має обернену функцію. Знайти похідну оберненої функції.

2. Вказати інтервали, на яких наступні функції мають обернені функції. Побудувати графіки обернених функцій і знайти їх похідні, якщо:

1) $y = 2x^2 - x^4$;
2) $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$;
3) $y = 2e^{-x} - e^{-2x}$.

3. Знайти похідні функцій, заданих параметрично:

1) $x = \sin^2 t, \ \ y = \cos^2 t, \ t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$;
2) $x = a\cos t, \ \ y = a\sin t, \ t \in (0, \pi)$;
3) $x = a(t - \sin t), \ \ y = a(1 - \cos t), \ t \in \mathbf{R}$.

4. Знайти похідну $y'(x)$ наступних функцій, заданих у неявному вигляді:

1) $y^2 = 2px$ (парабола);
2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (еліпс);
3) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ (логарифмічна спіраль).

5. Нехай (r, φ) - полярні координати, $x = r\cos\varphi, \ y = r\sin\varphi$. Знайти похідну $y'(x)$, якщо:

1) $r = a(1 + \cos\varphi)$ (кардіоїда);
2) $r = ae^{m\varphi}$ (логарифмічна спіраль).

6. Під якими кутами перетинаються графіки наступних функцій:

1) $y = \sin x$ і $y = \cos x$;
2) $y = \dfrac{1}{x}$ і $y = \sqrt{x}$?

ЗАНЯТТЯ 25
ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ. ДИФЕРЕНЦІАЛ

Контрольні запитання

1. *Означення диференційовності функції в точці.*
2. *Означення диференціалу функції в точці.*
3. *Геометричний зміст диференціалу.*
4. *Критерій диференційовності функції в точці.*

A25

1. Записати повний приріст та диференціал функції $f(x) = x^3,\ x \in \mathbf{R}$, у точці $x_0 = 1$. Обчислити та порівняти їх значення при таких значеннях приросту аргумента: 1) $\Delta x = 1$; 2) $\Delta x = 0,1$; 3) $\Delta x = 0,01$.

2. Нехай функція f має похідну у точці x_0, $f'(x_0) \neq 0$. Довести, що $df(x_0) \sim \Delta f(x_0)$ при $\Delta x \to 0$.

3. У яких точках диференціал функції $y = \sin x,\ x \in \mathbf{R}$, не еквівалентний її приросту при $\Delta x \to 0$?

4. Довести, що наступні функції не мають диференціалів:

1) $f(x) = |x - 1|$ у точці $x = 1$;
2) $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ у точці $x = 1$.

5. Знайти диференціал функції, якщо:

1) $y = \dfrac{1}{x}$; 2) $y = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$.

6. Знайти диференціали:

1) $d\left(\sin x - x\cos x\right)$;
2) $d\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$;
3) $d\left(\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$;
4) $d\ln(1 - x^2)$.

7. Замінити повний приріст функції диференціалом і знайти наближене значення $\operatorname{arctg} 1,01$. Порівняти з табличним значенням.

8. Дослідити диференційовність функції

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \in \mathbf{Q}, \\ -x^2, & \text{якщо } x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}. \end{cases}$$

9. Довести, що функція

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{n}}, & \text{якщо } \dfrac{1}{n+1}\le |x|<\dfrac{1}{n},\ n\in \mathbf{N},\\ 0, & \text{якщо } x=0.\end{cases}$$

недиференційовна у точці 0.

Д1. Знайти диференціал функції $y=y(x)$, заданої у полярній системі координат рівнянням $r=a(1+\cos\varphi),\ 0<\varphi<\pi$, в точці $(0,a)$.

Б25

1. Нехай формула $x=5t^2$, де час t вимірюється у секундах, а шлях x у метрах, задає рівняння руху. Для моменту часу $t=2$ сек. визначити приріст шляху Δx і диференціал шляху dx, якщо:

1) $\Delta t=1$ сек.; 2) $\Delta t=0,1$ сек.; 3) $\Delta t=0,01$ сек.

2. Знайти диференціал функції, якщо:

1) $y=\ln|x+\sqrt{x^2+a}|$; 2) $y=\arcsin\frac{x}{a}$.

3. Знайти диференціали:

1) $d(xe^x)$;

2) $d\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$;

3) $d(\sqrt{x^2+a^2})$;

4) $d\left(\arccos\dfrac{1}{|x|}\right)$;

5) $d\left(\dfrac{\sin x}{2\cos^2 x}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|\right)$.

4. Нехай $u,\ v,\ w$ - диференційовні на множині A функції. Знайти на множині A диференціал функції y, якщо:

1) $y=uvw$; 2) $y=\operatorname{arctg}\frac{u}{v}$; 3) $y=u^v$.

5. Знайти:

1) $\dfrac{d(x^3-2x^6-x^9)}{d(x^3)}$; 2) $\dfrac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$; 3) $\dfrac{d(\operatorname{tg} x)}{d(\operatorname{ctg} x)}$.

6. Знайти наближені значення

1) $\sin 29°$; 2) $\cos 151°$; 3) $\lg 11$

за допомогою заміни приросту функції диференціалом. Порівняти з табличними значеннями.

7. Дослідити диференційовність наступних функцій:

1) $y = \sqrt[5]{(x-1)^2}$;

2) $y = |\ln x|$;

3) $y = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0; \end{cases}$

4) $y = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$

8. Довести, що функція

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2}, & \text{якщо } \dfrac{1}{n+1} \leq |x| < \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbf{N}, \\ 0, & \text{якщо } x = 0 \end{cases}$$

диференційовна у точці 0.

9. Дослідити диференційовність наступних функцій. Чи існують односторонні похідні у точках недиференційовності?

1) $y = \sqrt{1 - \cos 2x}$;

2) $y = \ln |x^2 - 4x + 3|$;

3) $y = \arccos \dfrac{1}{x}$;

4) $y = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$.

10. Дослідити диференційовність функції

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} + x^2 \cos \dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0; \end{cases}$$

11. Знайти приріст і диференціал площі квадрата зі стороною x при деякому прирості Δx сторони x. Дати геометричну інтерпретацію.

ЗАНЯТТЯ 26
ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Контрольні запитання

1. *Означення похідних вищих порядків.*
2. *Похідні порядку* $n,\ n \in \mathbf{N}$, *для функцій* $x^{\alpha},\ x > 0\ (\alpha \in \mathbf{R})$; $a^x,\ x \in \mathbf{R}\,(a > 0)$; $\sin x,\ x \in \mathbf{R}$; $\cos x,\ x \in \mathbf{R}$; $\ln x,\ x > 0$.
3. *Означення диференціалів вищих порядків.*

А26

1. Знайти другу похідну таких функцій:

1) $y = e^{-x}$; 2) $y = (1 + x^2)\operatorname{arctg} x$.

2. Нехай $u : A \to (0, +\infty)$ та $v : A \to \mathbf{R}$ двічі диференційовні на множині A функції. Знайти другу похідну функції $y = u^v$.

3. Знайти $d^2(\sqrt{1 + x^2})$.

4. Нехай $u : A \to \mathbf{R}$ та $v : A \to \mathbf{R}$ двічі диференційовні на множині A функції. Знайти другий диференціал функції $y = \operatorname{arctg} \frac{u}{v}$.

5. Нехай $x(t) = 2t - t^2,\quad y(t) = 3t - t^3$. Знайти похідні

$$\frac{dy}{dx},\qquad \frac{d^2y}{dx^2},\qquad \frac{d^3y}{dx^3}.$$

6. Знайти похідну порядку 100 функції $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

7. Знайти $d^3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

8. Знайти похідну n-го порядку таких функцій :

1) $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$; 2) $y = \cos^2 x$; 3) $y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$.

9. Нехай $y = x^n e^x$, де n – натуральне число. Знайти $d^n y$.

10. Знайти $f^{(n)}(0)$, якщо:

1) $f(x) = \dfrac{1}{(1 - 2x)(1 + x)}$; 2) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x}}$.

Д1. Знайти похідну n-го порядку функції $y = \operatorname{arctg} x$.

Д2. Знайти диференціал третього порядку суперпозиції двох функцій.

Д3. Нехай функція $f : A \to \mathbf{R}$ двічі диференційовна у точці $x_0 \in A$. Довести, що

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 - \Delta x) - 2f(x_0)}{(\Delta x)^2} = f''(x_0).$$

Навести приклад, коли границя у лівій частині цієї рівності існує, але функція f не має похідної другого порядку у точці x_0.

Б26

1. Знайти другу похідну таких функцій:

1) $y = x\sqrt{1+x^2}$;
2) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;
3) $y = e^{-x^2}$;
4) $y = \operatorname{tg} x$;
5) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;
6) $y = x \ln x$.

2. Нехай $u : A \to \mathbf{R}$ та $v : A \to \mathbf{R}$ двічі диференційовні на множині A функції, $u(x)v(x) > 0,\ x \in A$. Знайти другу похідну функції $y = \ln \frac{u}{v}$.

3. Знайти $d^2\left(\frac{\ln x}{x}\right)$.

4. Нехай $u : A \to \mathbf{R}$ та $v : A \to \mathbf{R}$ двічі диференційовні на множині A функції. Знайти другий диференціал функції $y = \frac{u}{v}$.

5. Знайти похідні $\dfrac{dy}{dx},\ \dfrac{d^2y}{dx^2},\ \dfrac{d^3y}{dx^3}$ наступних функцій, заданих параметрично:

1) $x = a\cos t, \quad y = a\sin t$;
2) $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$.

6. Знайти похідну порядку n наступних функцій:

1) $y = \dfrac{x^2}{1-x},\ n = 8$;
2) $y = \dfrac{e^x}{x},\ n = 10$;
3) $y = \sin x \sin 2x \sin 3x,\ n = 10$.

7. Знайти $d^{10}(x\cos 2x)$.

8. Знайти похідну n-го порядку таких функцій:

1) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$;
2) $y = \sin^2 x$;
3) $y = \cos ax \cos bx$;
4) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$;
5) $y = \dfrac{e^x}{x}$;
6) $y = e^x \sin x$.

9. Нехай $y = \frac{\ln x}{x}$, де n – натуральне число. Знайти $d^n y$.

10. Знайти $f^{(n)}(0)$, якщо:

1) $f(x) = x^2 e^{ax}$;
2) $f(x) = e^{ax}\cos bx$.

11. Довести, що функція

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right), & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \end{cases}$$

нескінченно диференційовна у точці $x = 0$.

ЗАНЯТТЯ 27
ТЕОРЕМИ РОЛЛЯ, ЛАГРАНЖА І КОШІ. ПРАВИЛА ЛОПІТАЛЯ

Контрольні запитання

1. *Теореми Ролля, Лагранжа та Коші.*
2. *Правила Лопіталя.*
3. *Означення диференціалів вищих порядків.*

A27

1. Нехай для деякого натурального n функція $f \in \mathbf{C}^{(n-1)}([a_0, a_n])$, n раз диференційовна на інтервалі (a_0, a_n) і виконуються рівності

$$f(a_0) = f(a_1) = \cdots = f(a_n), \text{ де } a_0 < a_1 < \cdots < a_n.$$

Довести, що існує точка $c \in (a_0, a_n)$ така, що $f^{(n)}(c) = 0$.

2. Застосувати теорему Лагранжа до функції $f(t) = \sqrt{t}$, $t \geq 0$ на відрізку $[x, x+1]$, де $x \geq 0$. Довести, що $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x + \theta(x)}}$, де $\theta(x) \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, причому $\lim\limits_{x\to 0+} \theta(x) = \frac{1}{4}$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \theta(x) = \frac{1}{2}$.

3. Для довільних $x,\ y \in \mathbf{R}$ довести нерівності:

1) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$;
2) $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$.

4. Знайти наступні границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$;
2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^n}{e^{ax}}$, де $a > 0,\ n > 0$;
3) $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\varepsilon} \ln x$ де $\varepsilon > 0$;
4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$;
5) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$;
6) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$.

Д1. Многочленом Лежандра степеня n називається функція

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}((x^2 - 1)^n), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Довести, що P_n – многочлен n-го степеня, всі корені якого дійсні і містяться в інтервалі $(-1,\ 1)$.

Д2. Многочленом Чебишева–Лагерра степеня n називається функція

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^x).$$

Довести, що L_n – многочлен n-го степеня, всі корені якого додатні.

Д3. Нехай функція $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ має похідну у кожній точці (a,b), причому ця похідна обмежена на (a,b). Довести, що функція f рівномірно неперервна на (a,b).

Д4. Нехай для функцій $f,\ g:[a,b]\to\mathbf{R}$ при деякому натуральному числі n виконуються умови:

1) $f,\ g\in\mathbf{C}([a,b])$;
2) $\forall\,x\in(a,b)\,\exists\,f^{(n+1)}(x),g^{(n+1)}(x)$;
3) $\forall\,x\in(a,b):\ g^{(n+1)}(x)\neq 0.$

Тоді довести, що існує точка $c\in(a,b)$ така, що

$$\frac{f(b)-f(a)-\dfrac{f'(a)}{1!}(b-a)-\ldots-\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n}{g(b)-g(a)-\dfrac{g'(a)}{1!}(b-a)-\ldots-\dfrac{g^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n}=\frac{f^{(n+1)}(c)}{g^{(n+1)}(c)}.$$

Б27

1. За допомогою теореми Ролля довести, що рівняння

$$x^4-4x-1=0$$

не може мати більше двох дійсних коренів. Показати, що два дійсних кореня існують (можна застосувати теорему про нуль неперервної функції).

2. Довести, що всі корені похідної многочлена

$$P(x)=(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$$

дійсні числа і вказати інтервали, на яких вони знаходяться.

3. Чи задовольняє функція

$$y=\begin{cases}x+1, & \text{якщо } x\le 0,\\ \sin x, & \text{якщо } 0<x<\pi,\end{cases}$$

умови теореми Ролля на відрізку $[-1,1]$?

4. На яких відрізках функція

$$y=\begin{cases}x+2, & \text{якщо } x\le -1,\\ x^4, & \text{якщо } x>-1,\end{cases}$$

задовольняє умови теореми Ролля?

5. Чи задовольняє функція $f(x)=\frac{1}{x}$ умови теореми Лагранжа на відрізку $[a,b]$, якщо $ab<0$?

6. Чи задовольняють наступні функції умови теореми Лагранжа на відрізку $[-1,1]$:

1) $y=|x|$; 2) $y=\sqrt[3]{x^2}$?

Дати геометричну інтерпретацію.

7. Чи виконуються умови теореми Лагранжа для функції

$$y = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \le 1, \\ \frac{1}{x}, & \text{якщо } x > 1, \end{cases}$$

на відрізку $[0, 4]$?

8. Перевірити, що наступні функції задовольняють умови теореми Лагранжа на вказаних відрізках та визначити у кожному випадку можливі значення c:

1) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6,\ x \in [1, 2]$;
2) $f(x) = x^2,\ x \in [-1, 1]$;
3) $f(x) = 5x^3 + 2x,\ x \in [0, 1]$;
4) $f(x) = \sqrt{x},\ x \in [0, 1]$.

9. На яких відрізках функції $f(x) = x^3$ і $g(x) = x^2 + 1$ задовольняють умови теореми Коші?

10. Перевірити, що функції $f(x) = \sin x$ і $g(x) = 1 + \cos x$ задовольняють умови теореми Коші на відрізку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ та знайти значення c.

11. Довести нерівності:

1) $py^{p-1}(x-y) \le x^p - y^p \le px^{p-1}(x-y)$, де $0 < y < x,\ p > 1$;
2) $\forall\, a,\ b \in \mathbf{R}:\ |\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \le |a - b|$;
3) $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$, де $0 < b < a$.

12. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3 \operatorname{tg} 4x - 12 \operatorname{tg} x}{3 \sin 4x - 12 \sin x}$;
2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}$;
3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}$;
4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\varepsilon}$, де $\varepsilon > 0$;
5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{x^{100}}$;
6) $\lim\limits_{x \to 1-} \ln x \ln(1 - x)$;
7) $\lim\limits_{x \to 0+} x^x$;
8) $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$;
9) $\lim\limits_{x \to 0+} \left(\ln \dfrac{1}{x}\right)^x$;
10) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x - 1}\right)$;
11) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$;
12) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;
13) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{(1 + x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$.

ЗАНЯТТЯ 28
ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Контрольні запитання

1. *Формула Тейлора із залишковим членом у формі Пеано.*
2. *Формула Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа.*
3. *Формула Тейлора-Маклорена для функцій* e^x, $\sin x$, $\cos x$, $x \in \mathbf{R}$; $\ln(1+x)$, $x > -1$; $(1+x)^\alpha$, $x > -1$ $(\alpha \in \mathbf{R})$.

А28

1. Записати перші п'ять членів асимптотичного розкладу функції
$$f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$$
відносно шкали порівняння $\{x^n : n \geq 1\}$ при $x \to 0$. Чому дорівнює $f^{(4)}(0)$?

2. Записати формулу Маклорена із залишковим членом у формі Пеано для функції
$$f(x) = \sin\left(2x + \tfrac{\pi}{4}\right).$$

3. Записати формулу Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа для функції $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in \mathbf{R}$, у точці $x_0 = 1$.

4. Розкласти за формулою Маклорена із залишковим членом у формі Пеано наступні функції:

1) $f(x) = \exp\left(\dfrac{x}{2} + 2\right)$;
2) $f(x) = \dfrac{1}{2x+3}$;
3) $f(x) = (x-1)e^{2x}$;
4) $f(x) = \ln\dfrac{3+x}{5+x}$;
5) $f(x) = e^x \ln(1+x)$, $n = 4$;
6) $f(x) = \dfrac{5}{x^2+x-12}$;
7) $f(x) = e^{x\cos x}$;
8) $f(x) = \cos^2 x$.

5. За допомогою формули Тейлора оцінити абсолютну похибку наближеної формули
$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, \ |x| \leq 1.$$

6. Застосувати формулу Тейлора для обчислення наступних границь:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$;
2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2\operatorname{tg} x} - e^x + x^2}{\arcsin x - \sin x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - x + \dfrac{x^3}{6}}{x - \sin x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2\operatorname{tg} x}{x+\sin x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

Д1. Нехай $f \in \mathbf{C}^2((-1,1))$, $f''(0) \neq 0$ і для кожного $x \in (-1,1)$ значення $\theta(x)$ визначається як одне з чисел θ, для яких

$$f(x) - f(0) = f'(\theta)x,$$

де θ належить інтервалу з кінцями 0 та x. Знайти границю

$$\lim_{x\to 0} \frac{\theta(x)}{x}.$$

Д2. Нехай $f \in \mathbf{C}^3((-1,1))$, $f'''(0) \neq 0$ і для кожного $x \in (-1,1)$ значення $\theta(x)$ визначається як одне з чисел θ, для яких

$$f(x) - f(0) = f'(0)\,x + \frac{1}{2}f''(\theta)\,x^2,$$

де θ належить інтервалу з кінцями 0 та x. Знайти границю

$$\lim_{x\to 0} \frac{\theta(x)}{x}.$$

Д3. Нехай $f,\ g \in \mathbf{C}^2([0,1])$, причому $g'(x) \neq 0$ для всіх $x \in (0,1)$ і $f'(0)g''(0) \neq f''(0)g'(0)$. Для кожного $x \in (0,1)$ значення $\theta(x)$ визначається як одне з чисел $\theta \in (0,1)$, для яких

$$\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)} = \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)}.$$

Довести, що

$$\lim_{x\to 0} \frac{\theta(x)}{x} = \frac{1}{2}.$$

Д4. Нехай $f \in \mathbf{C}^2((0,+\infty))$ і $xf(x) \to 0,\ xf''(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Довести, що $xf'(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Б28

1. Многочлен

$$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$$

розкласти за натуральними степенями двочлена $x+1$.

2. Записати формулу Маклорена із залишковим членом у формі Пеано з точністю до x^3 включно для таких функцій:

1) $f(x) = \sin(\sin x)$;
2) $f(x) = \dfrac{1}{1-2x}$;
3) $f(x) = \cos\left(2 + \dfrac{x}{2}\right)$;
4) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$;
5) $f(x) = x\sin^2 2x$;
6) $f(x) = \dfrac{x^2}{3x^2-4}$.

3. Функцію розкласти за формулою Тейлора із залишковим членом $o((x-x_0)^n)$, якщо:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x_0 = 2$;
2) $f(x) = \sin(2x-3), \quad x_0 = 1$;
3) $f(x) = \ln(2x+1), \quad x_0 = \dfrac{1}{2}$;
4) $f(x) = \ln\sqrt[4]{\dfrac{x-2}{5-x}}, \quad x_0 = 3$.

4. Функцію розкласти за формулою Тейлора із залишковим членом $o((x-x_0)^{2n})$, якщо:

1) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-2x+5}, \quad x_0 = 1$;
2) $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt[3]{x^2-4x+5}}, \quad x_0 = 2$.

5. Обчислити:

1) число e з точністю до 10^{-9};
2) $\sqrt{5}$ з точністю до 10^{-4}.

6. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(x^3 - x^2 + \dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6+1}\right)$;
2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$;
3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x\sin x}{2\operatorname{ch} x - 2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;
4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$.

ЗАНЯТТЯ 29
ДОСЛІДЖЕННЯ МОНОТОННОСТІ ФУНКЦІЙ. ЛОКАЛЬНІ ЕКСТРЕМУМИ

Контрольні запитання

1. *Означення точок локального екстремума функції.*
2. *Необхідна умова локального екстремуму.*
3. *Достатня умова локального екстремуму.*
4. *Дослідження монотонності функцій за допомогою похідної.*

А29

1. Дослідити монотонність та знайти точки локального екстремуму функції $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 3$. Знайти найменше й найбільше значення цієї функції на відрізку $[0, 4]$.

2. Довести нерівність $e^x > 1 + x$ при $x \neq 0$.

3. Знайти проміжки монотонності та точки локальних екстремумів наступних функцій:

1) $f(x) = (x+1)e^{2x}$;

2) $f(x) = \dfrac{1}{1-2x}$;

3) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$;

4) $f(x) = \operatorname{ch} x + \cos x$.

4. Знайти найменше й найбільше значення функції $f(x) = (x-3)^3 e^{|x|}$ на відрізку $[-1, 4]$.

5. Довести, що похідна функції

$$f(x) = \begin{cases} x^4\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right), & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \end{cases}$$

не зберігає знак ні праворуч, ні ліворуч точки 0, яка є точкою строгого локального мінімуму функції f.

6. Знайти найменше значення функції

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2, \quad x \in \mathbf{R},$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – фіксовані дійсні числа.

7. Для яких значень параметра a функція $f(x) = \sin x + ax$ зростає на $\mathbf{R}$?

8. Знайти найменше та найбільше значення на $\mathbf{R}$ функції

$$f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x.$$

Д1. Нехай a – додатне дійсне число. Довести, що для всіх додатних x

$$x^a \geq 1 + a \ln x.$$

Д2. Нехай f – парна, неперервно диференційовна на $\mathbf{R}$ функція, $f''(0) \neq 0$. Довести, що 0 – точка строгого локального екстремуму цієї функції.

Д3. Знайти найбільший член послідовності $\left\{ \dfrac{\sqrt{n}}{n+20} \ : \ n \geq 1 \right\}$.

Д4. Нехай $f, g \ : \ [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, функція g монотонно зростає, функція f обмежена, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. Чи обов'язково функція $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ буде монотонно спадною на $(x_0, +\infty)$ для деякого $x_0 > 0$?

Д5. Нехай $f \in C(\mathbf{R})$.

1) Чи може f мати на відрізку $[0, 1]$ зліченну кількість строгих локальних максимумів?

2) Чи може f мати на відрізку $[0, 1]$ зліченну кількість строгих локальних максимумів, в яких досягаються однакові значення?

Д6. Нехай функція $f \in C([a, b])$ має на $[a, b]$ рівно n локальних максимумів. Довести, що вона має $n-1, n$ або $n+1$ локальний мінімум.

Б29

1. Довести, що функція $y = \operatorname{arctg} x - x$ спадає на $\mathbf{R}$.

2. Для яких значень параметра a функція $f(x) = x^3 - ax$ зростає на $\mathbf{R}$?

3. Знайти проміжки монотонності наступних функцій:

1) $f(x) = 2 + x - x^2$;
2) $f(x) = 3x - x^3$;
3) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+100}$;
4) $f(x) = x + \sin x$;
5) $f(x) = 2^{-x} x^2$;
6) $f(x) = x^n e^{-x}$.

4. Довести нерівності:

1) $\forall x \neq 0 \ : \ \cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$;
2) $\forall x \geq 0 \ : \ e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$;
3) $\forall x > 0 \ : \ x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$;
4) $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \ : \ \operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{6}$.

5. Знайти проміжки монотонності, локальні екстремуми наступних функцій та побудувати їх графіки:

1) $y = x^2(x - 4)$;
2) $y = \operatorname{ch} x$.

6. Чи існують найменше й найбільше значення функції $y = \frac{1}{x} + x^2$, $x \in (0, 4]$?

7. Довести, що функція

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \end{cases}$$

має зліченну кількість точок максимуму й мінімуму на відрізку $[0, 1]$.

8. Знайти сторони прямокутника найбільшого периметра, вписаного у півколо радіуса R.

9. Якими мають бути розміри скрині у формі паралелепіпеда з квадратною основою й об'ємом V, щоб площа її поверхні (без кришки) була мінімальною?

ЗАНЯТТЯ 30
ОПУКЛІСТЬ ФУНКЦІЇ. ПОБУДОВА ГРАФІКІВ

Контрольні запитання

1. *Означення опуклої функції.*
2. *Дослідженя опуклості функцій.*
3. *Достатня умова локального екстремума.*
4. *Схема побудови графіка функції.*

А30

1. Дослідити опуклість і знайти точки перегину наступних функцій:

1) $y = x + \sin x$; 2) $y = e^{-x^2}$.

2. Дослідити наступні функції та побудувати їх графіки:

1) $y = 3x - x^3$;
2) $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x}$;
3) $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$;
4) $y = \cos^3 x + \sin^3 x$;
5) $y = \ln(x^2 - 1)$;
6) $y = x + e^{-x}$;
7) $y = e^{-2x} \sin^2 x$;
8) $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Д1. Для чисел $\{a_n \ : \ n \ge 1\} \subset \mathbf{R}$ означимо їх "середнє експоненціальне" формулою

$$E_n := \ln\Big(\frac{e^{a_1} + e^{a_2} + \ldots + e^{a_n}}{n}\Big), \ a_n \in (0,1), \ n \ge 1,$$

та "середнє арктангенціальне" формулою

$$AT_n := \mathrm{tg}\Big(\frac{\mathrm{arctg}\, a_1 + \mathrm{arctg}\, a_2 + \cdots + \mathrm{arctg}\, a_n}{n}\Big),$$
$$a_n \in \ \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big), \ n \ge 1.$$

Порівняти їх значення з середніми арифметичним, геометричним, гармонійним і квадратичним для тих же чисел.

Д2. Нехай функція f опукла на інтервалі (a,b). Довести, що $f \in C((a,b))$.

Б30

1. Дослідити опуклість і знайти точки перегину наступних функцій:

1) $y = 3x^2 - x^3$;
2) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$;
3) $y = x + \sqrt[3]{x}$;
4) $y = \sqrt{1+x^2}$.

2. Побудувати графіки наступних раціональних функцій:

1) $y = x(x-1)^3$;
2) $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$;
3) $y = \dfrac{x^2-1}{x^4}$;
4) $y = 2x^2 - \dfrac{3}{x^3}$.

3. Побудувати графіки наступних ірраціональних функцій:

1) $y = \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}$;
2) $y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$.

4. Дослідити функції й побудувати їх графіки:

1) $y = \sin^2 x + \cos x$;
2) $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$;
3) $y = e^{x^2-2x}$;
4) $y = \dfrac{e^{-x}}{x+1}$;
5) $y = x + \dfrac{\ln x}{x}$;
6) $y = x\,(\ln x + 1)$;
7) $y = \sqrt{8x^2 - x^4}$;
8) $y = \dfrac{\cos x}{\cos 2x}$;
9) $y = x + \operatorname{arctg} x$;
10) $y = x^x$.

ЗАНЯТТЯ 31
ПОБУДОВА ГРАФІКІВ (ПРОДОВЖЕННЯ)

Контрольне запитання

Означення вертикальних, горизонтальних та похилих асимптот для графіка функції.

А31

1. Дослідити функції та побудувати їх графіки:

1) $y = \dfrac{x^3+3x^2+1}{2x^2-1}$;

2) $y = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x}$;

3) $y = \dfrac{1-4x}{x^2-2x+2}$;

4) $y = \dfrac{x^4+2}{2x^2+1}$;

5) $y = \dfrac{3x+|\,x^2-4|}{|\,x-2|}$;

6) $y = \dfrac{x}{|\,x-2|} + \dfrac{x-2}{|\,x|}$;

7) $y = x + \sqrt{|\,1-x^2|}$;

8) $y = \dfrac{2x}{1-x^2} + \ln\dfrac{1+x}{1-x}$;

9) $y = x - 2 - 2\ln x$;

10) $y = \log_{|\,x|} 2$;

11) $y = \dfrac{\sin x + \sin 3x}{\sqrt{1+\cos 2x}} + \dfrac{\cos x - \cos 3x}{\sqrt{1-\cos 2x}}$;

12) $y = \arcsin x - x\sqrt{1-x^2}$.

ВІДПОВІДІ

Б1

1. 1) $A \subset (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$; 2) $A \subset (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.
2. 1) Так. Наприклад, $r_1 = 1,\ r_2 = n - 1$; 2) Так. Наприклад, $a = \frac{1}{2}$.
3. 1) $A \cup B = \mathbf{R}$, $A \cap B = (-1, 0) \cup (1, 7)$, $A \backslash B = (-1, 0]$, $B \backslash A = (-\infty, -1] \cup [7, +\infty)$, $\overline{A} = (-\infty, -1] \cup [7, +\infty)$.
2) $A \cup B = \left(-\frac{3}{2}, 2\right) \cup (4, 5]$, $A \cap B = \left[1, \frac{3}{2}\right)$, $B \backslash A = \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$, $A \backslash B = \left[\frac{3}{2}, 2\right) \cup (4, 5]$, $\overline{A} = (-\infty, 1) \cup [2, 4] \cup [5, +\infty)$.
7) $A \cup B = (-\infty, 1)$, $A \cap B = \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $A \backslash B = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$, $B \backslash A = (-\infty, -1], \overline{A} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

4. 1) $\bigcup\limits_{m=0}^{n-1} A_{m\,n} = A_{0\,n}$,
2) $\bigcap\limits_{m=0}^{n-1} A_{mn} = A_{n-1\,n}$
3) $\bigcap\limits_{m=0}^{\infty} \bigcup\limits_{n=m+1}^{\infty} A_{m\,n} = \varnothing$,
4) $\bigcup\limits_{m=0}^{\infty} \bigcap\limits_{n=m+1}^{\infty} A_{m\,n} = \mathbf{R}^2$,
5) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{m=0}^{n-1} A_{m\,n} = A_{0\,1}$,
6) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{m=0}^{n-1} A_{m\,n} = \mathbf{R}^2$.

5. 1) $\bigcup\limits_{t \in T} A_t = [0, +\infty)$, $\bigcap\limits_{t \in T} A_t = \varnothing$;
2) $\bigcup\limits_{t \in T} A_t = \bigcup\limits_{m \in \mathbf{Z}} [2\pi m, 2\pi m + \pi]$, $\bigcap\limits_{t \in T} A_t = \varnothing$;
3) $\bigcup\limits_{t \in T} A_t = \mathbf{R}^2$, $\bigcap\limits_{t \in T} A_t = \{(0, 0)\}$;
4) $\bigcup\limits_{t \in T} A_t = \{(x, y) \mid x \neq 0,\ y > 0\} \cup \{(0, 0)\}$, $\bigcap\limits_{t \in T} A_t = \{(0, 0)\}$.
8. 1) Ні. Приклад: $A = \{1\},\ B = \{1, 2\},\ C = \varnothing$;
2) Ні. Приклад: $A = B = C = \{1\}$.
9. 1) Так. 2) Ні. Приклад: $A = B = C = \{1\}$; $A \cup (B \backslash C) \supset (A \cup B) \backslash C$.
3) Так.
12. Приклад: $A = C = \{1\},\ B = \varnothing$.

Б2

1. $f(\{-1\}) = \{1\}$, $f(\{-1, 1\}) = \{1\}$, $f((-2, 0)) = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, $f([1, +\infty)) = (0, 1]$, $f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$, $f^{-1}(\{-1\}) = \varnothing$, $f^{-1}((0, 1)) = f^{-1}((-1, 1)) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

2. 1), 3) – бієкції;
2) – не ін'єкція, не сюр'єкція, $f^{-1}(A) = [0, 1] \times \mathbf{R}$;
4) – ін'єкція, не сюр'єкція, $f^{-1}(A) = (-\infty, 0] \times \{0\}$.
3. 1), 2) Приклад: $f(x) = x^2$, $A = [-2, -1]$, $B = [1, 2]$.

Б3

1. $f(1) = 2,\ f(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \frac{\pi}{2},\ f(0) = 1,\ f(3)$ не існує.
2. $f(-1) = 1,\ f(\frac{1}{2}) = \sin\frac{1}{2},\ f(0) = 0,\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ f(4) = \frac{3}{5}$.
3. $S = a\sqrt{4R^2 - a^2},\ 0 < a < 2R.$
4. $V = \dfrac{\pi r^2}{3}\,(R \pm \sqrt{R^2 - r^2}),\ 0 < r < R.$
5. 1) $(0, +\infty)$; 2) $\left(-\infty, \frac{4}{5}\right)$; 3) $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$;
4) $(-\infty, -3) \cup (-3, -2] \cup [4, +\infty)$; 5) $\bigcup\limits_{n \in \mathbf{Z}} \left(10^{-\frac{\pi}{2}+2\pi n}, 10^{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\right)$; 6) $\left[1, \frac{5}{3}\right]$.
6. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin \pi x}}$.
7. Не рівні. Функція f є продовженням функції g.
8. 1),3),5),7),10) – парні, 8) – непарна, 2),4),6),9) – ні парні, ні непарні.
9. 1) $y = -\sin x + x \operatorname{tg} x,\ -\frac{\pi}{2} < x \le 0$;
2) $y = -x \lg(-x),\ x < 0$;
3) $y = \begin{cases} -x^3 + |x| + \lg(-x), & -2 < x \le -1, \\ x^4 + 3x^2 + 2^{-x}, & -1 < x \le 0. \end{cases}$
10. 1) $y = -\sin^2 x - \cos^4 x,\ x < 0$;
2) $y = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1}),\ x \le 0$;
3) $y = \begin{cases} x^3 - 1, & -3 < x \le -2, \\ -x^4 - 1, & -2 < x < 0. \end{cases}$
11. $f(0) = 0$.
12. 1) $T = 2\pi$; 2) $T = \frac{2\pi}{3}$; 3) $T = \frac{\pi}{5}$; 4) $T = 2\pi$; 5) $T = 2$; 6) $T = 4\pi$; 7) $T = 2\pi$; 8) $T = \frac{1}{2}$.
14. $y = \begin{cases} 0, & -\pi + 2\pi k \le x < 2\pi k, \\ \sin x, & 2\pi k \le x < \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}; \end{cases}$
$y\left(-\frac{23}{2}\pi\right) = 1,\ y\left(\frac{7}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},\ y\left(\frac{23}{2}\pi\right) = 0.$
17. 1) $y = 1 + \sqrt{1 - x}$; 2) $y = 1 - \sqrt{1 - x}$.

Б4

3. $y=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right),\ a>0;$
$y=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+\operatorname{arctg}\frac{b}{a}+\pi\right),\ a<0;$
$y=b\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\ a=0.$

5. 1) $x=-2,70;\ x=0,34;\ x=2,21;$ 2) $x=1,93;$
3) $x=0,74;$ 4) $x=-1,50.$

Б5

4. 1) $n>0,\ n-$ парне: спадає на $(-\infty,0]$, зростає на $[0,+\infty)$; $n>0,\ n-$ непарне: зростає на $\mathbf{R}$; $n=0:$ стала; $n<0,\ n-$ парне: зростає на $(-\infty,0)$, спадає на $(0,+\infty)$; $n<0,\ n-$ непарне: спадає на $(-\infty,0)$ і на $(0,+\infty)$.

2) $n>0,\ n-$ парне: зростає на $[0,+\infty)$; $n>0,\ n-$ непарне: зростає на $\mathbf{R}$; $n<0,\ n-$ парне: спадає на $(0,+\infty)$; $n<0,\ n-$ непарне: спадає на$(-\infty,0)$ і на $(0,+\infty)$;

3) $a>1:$ зростає на $\mathbf{R}$; $0<a<1:$ спадає на $\mathbf{R}$;

4) $a>1:$ зростає на $(0,+\infty)$; $0<a<1:$ спадає на $(0,+\infty)$;

5) Зростає на $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\frac{\pi}{2}+2\pi k\right],\ k\in\mathbf{Z}$;
спадає на $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k,\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right],\ k\in\mathbf{Z}$.

6) Спадає на $[-1,1]$.
7) Зростає на $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.
8) Зростає на $\mathbf{R}$.
9) Спадає на $(0,\pi)$.
10) Спадає на $\mathbf{R}$.
11) Зростає на $[n,n+1),\ n\in\mathbf{Z}$.
12) Спадає на $(-\infty,0]$, стала на $[0,+\infty)$.

5. 1) - спадає, 2), 3), 4) - зростає.

6. 1) Зростає; 2) Зростає на $(-\infty,-2)$, спадає на $(-2,+\infty)$.

Б6

4. 1) $x\in(-\frac{203}{100},-\frac{197}{100})$; 2) $x\in(-\infty,-7]\cup[17,+\infty)$; 3) $x\in(-\infty,-\frac{1}{2})$;
4) $x\in(0,\frac{2}{3})$.

7. 1) $\inf A=1,\ \sup A=+\infty;$
2) $\inf A=-1,\ \sup A=0;$
3) $\inf A=2,\ \sup A=7;$
4) $\inf A=4\sqrt{2}R,\ \sup A=2\pi R;$
5) $\inf A=2R^2,\sup A=\pi R^2;$
6) $\inf A=\sqrt{2},\ \sup A=2;$
7) $\inf A=1,\ \sup A=\sqrt{2}.$

8. 1) $\inf A = \frac{1}{3},\ \sup A = \frac{1}{2}$; 3) $\inf A = 0,\ \sup A = +\infty$;
2) $\inf A = 0,\ \sup A = \frac{1}{2}$; 4) $\inf A = 0,\ \sup A = +\infty$.

9. $A = [0, 1)$.

10. Для одноточкових.

11. $1)\ 1;\quad 2)\ -1;\quad 3)\ 0;\quad 4)\ 1;\quad 5)\ -1;\quad 6)\ \dfrac{2}{6+\pi}.$

Б7

3. $(\sqrt{2}+1)$ і $\sqrt{2}$.

4. $\sqrt{2}$ і $\sqrt{2}$.

6. 1), 4), 5), 6), 8), 9) - можуть, 2), 3), 7), 10) - не можуть.

9. Ні.

10. 0,(7).

11. $(\sqrt{2})'_1 = 1,4;\ 2 - \left((\sqrt{2})'_1\right)^2 = 0,04;$
$(\sqrt{2})''_1 = 1,5;\ \left((\sqrt{2})''_1\right)^2 - 2 = 0,25;$
$(\sqrt{2})'_2 = 1,41;\ 2 - \left((\sqrt{2})'_2\right)^2 = 0,0119;$
$(\sqrt{2})''_2 = 1,42;\ \left((\sqrt{2})''_2\right)^2 - 2 = 0,0164;$
$(\sqrt{2})'_3 = 1,414;\ 2 - \left((\sqrt{2})'_3\right)^2 = 0,000604;$
$(\sqrt{2})''_3 = 1,415;\ \left((\sqrt{2})''_3\right)^2 - 2 = 0,002225.$

12. $x_0 = \dfrac{1}{1};\ \sqrt{2} - x_0 \approx 0,4142;$
$x_1 = \dfrac{3}{2};\ x_1 - \sqrt{2} \approx 0,0858;$
$x_2 = \dfrac{7}{5};\ \sqrt{2} - x_2 \approx 0,0142;$
$x_3 = \dfrac{17}{12};\ x_3 - \sqrt{2} \approx 0,0025;$
$x_4 = \dfrac{41}{29};\ \sqrt{2} - x_4 \approx 0,0004.$

14. 1) $\inf A = -\sup B,\ \sup A = -\inf B$;
2) $\sup B = \sup A + a,\ \inf B = \inf A + a$;
3) $a \geq 0:\ \sup B = a \sup A,\ \inf B = a \inf A$;
$a < 0:\ \sup B = a \inf A,\ \inf B = a \sup A$;
4) $\sup B = \max\{(\sup A)^2, (\inf A)^2\}$;
5) $\sup B = (\sup A)^3,\ \inf B = (\inf A)^3$.

Б9

2. 1) 0; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{4}{3}$; 5) 3.

4. 1), 2), 4), 5) -так; 3), 6) - ні.

5. 1) послідовність обмежена;

2) послідовність не має підпослідовності, збіжної до a;

3) послідовність не збігається до нескінченності;

4) послідовність обмежена;

5) або деякий елемент послідовності, за виключенням першого, дорівнює a, або послідовність має підпослідовність, збіжну до a;

6) послідовність необмежена;

7) послідовність збігається до нескінченності;

8) послідовність збігається до a;

9) послідовність необмежена;

10) послідовність має підпослідовність, збіжну до a.

Б10

1. Можуть як збігатися (наприклад, $a_{2n} = b_{2n-1} = 0,\ a_{2n-1} = b_{2n} = 1,\ n \geq 1$), так і розбігатися ($a_n = b_n = n,\ n \geq 1$).

2. Послідовність $\{a_n b_n : n \geq 1\}$ збіжна, якщо $a_n \to 0,\ n \to \infty$, і розбіжна в інших випадках. Послідовність $\{a_n + b_n : n \geq 1\}$ завжди розбіжна.

3. Не для довільної. Це вірно для послідовностей $a_n = \frac{1}{n},\ b_n = (-1)^n$, $n \geq 1$, і невірно для послідовностей $a_n = \frac{1}{n},\ b_n = n,\ n \geq 1$.

4. Ні. Приклад: $a_n = 1 + (-1)^n,\ b_n = 1 - (-1)^n,\ n \geq 1$.

5. 1) $-\frac{5}{4}$; 2) 0; 3) 0; 4) $-\frac{1}{27}$; 5) $0,\ |a| < 1;\ 1,\ |a| > 1;\ \frac{1}{2},\ a = 1$; 6) 1; 7) 2; 8) $\frac{1}{3}$; 9) -1; 10) 0.

6. 1) 1; 2) 0; 3) 0; 4) -1; 5) $-\frac{1}{2}$; 6) 1; 7) $a^2 + a + \frac{1}{3}$; 8) $\frac{1}{2}$; 9) $\frac{1}{3}$; 10) 1.

7. 1) $0,\ a \neq 1;\ \frac{1}{2},\ a = 1$; 2) 0; 3) $1,\ a > 1;\ -1,\ 0 < a < 1;\ 0,\ a = 1$; 4) $\frac{1}{5},\ a > b;\ \frac{3}{7},\ b > a;\ \frac{1}{3},\ a = b$; 5) $\frac{1}{2}$.

Б11

1. 1) 1; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{(a-b)}{4}$; 4) $+\infty,\ a < 1;\ -\infty,\ a > 1;\ 0, a = 1$; 5) 1; 6) $\frac{a}{b},\ b \neq 0;\ +\infty,\ a > 0,\ b = 0;\ -\infty,\ a < 0,\ b = 0;\ \frac{1}{2},\ a = b = 0$; 7) $+\infty$; 8) 1.

2. 1) 0; 2) 0.

4. 1) $\frac{1}{a-1}$; 2) 2^k.

Б12

2. 1) $a_8 = \frac{1}{41}$; 2) $a_6 = \frac{(\sqrt{39})^6}{720}$; 3) $a_{4k+1} = 1,\ k \geq 0.$

3. $\frac{\sqrt{13}+1}{2}.$

Б13

1. 1) $A = \{0\},\ \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 0;$

2) $A = \{-2, 2\},\ \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -2,\ \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 2;$

3) $A = \{-4, 0, 2, 6\},\ \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -4,\ \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 6;$

4) $A = \left\{-\dfrac{1}{2}, 1\right\},\ \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\dfrac{1}{2},\ \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1;$

5) $A = \{-\infty, +\infty\},\ \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty,\ \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty;$

6) $A = \{-\infty\},\ \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty;$

7) $A = \{0, +\infty\},\ \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0; \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty;$

8) $A = \left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}} - e, -\dfrac{1}{\sqrt{2}} - e, e, 1 + e, -1 + e\right\},$

$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} - e,\ \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = e + 1;$

9) $A = \left\{0, \dfrac{1}{2}, 1\right\},\ \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0,\ \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1;$

10) $A = \{1, 2\},\ \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 1,\ \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 2;$

11) $A = \{0, 1\},\ \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0,\ \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1.$

2. $A = [0, 1].$

3. 1) $a_n = \frac{(-1)^n+3}{2},\ b_n = 1 - (-1)^n;$

2) $a_n = 1 - (-1)^n,\ b_n = \frac{(-1)^n+3}{2}.$

4. 1) $a_n = \frac{(-1)^n+3}{2},\ b_n = 2 - (-1)^n;$

2) $a_n = 2 - (-1)^n,\ b_n = \frac{(-1)^n+3}{2}.$

Б14

6. Ні. При $a_n = \frac{1}{n}$ збіжна, при $a_n = \sqrt{n}$ розбіжна до $+\infty$, при $a_n = \sin\sqrt{n}$ розбіжна.
7. $a_n = \sin\frac{\pi n}{4},\ m(k) = 2k-1,\ k \geq 1.$

Б15

1. $\inf f([0,+\infty)) = 0,\ \sup f([0,+\infty)) = 1.$
2. $\inf A = -1,\ \sup A = 1.$
4. 1) $\forall\varepsilon > 0\ \exists C > 0\ \forall x,\ |x| > C\ :\ |f(x) - p| < \varepsilon;$
2) $\forall\varepsilon > 0\ \exists C > 0\ \forall x,\ x < -C\ :\ |f(x) - p| < \varepsilon;$
3) $\forall\varepsilon > 0\ \exists C > 0\ \forall x,\ x > C\ :\ |f(x) - p| < \varepsilon;$
4) $\forall L > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x,\ |x - a| < \delta\ :\ |f(x)| > L;$
5) $\forall L > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x,\ |x - a| < \delta\ :\ f(x) < -L;$
6) $\forall L > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x,\ |x - a| < \delta\ :\ f(x) > L;$
7) $\forall L > 0\ \exists C > 0\ \forall x,\ |x| > C\ :\ |f(x)| > L;$
8) $\forall L > 0\ \exists C > 0\ \forall x,\ |x| > C\ :\ f(x) < -L;$
9) $\forall L > 0\ \exists C > 0\ \forall x,\ |x| > C\ :\ f(x) > L;$
10) $\forall L > 0\ \exists C > 0\ \forall x,\ x < -C\ :\ |f(x)| > L;$
11) $\forall L > 0\ \exists C > 0\ \forall x,\ x < -C\ :\ f(x) < -L;$
12) $\forall L > 0\ \exists C > 0\ \forall x,\ x < -C\ :\ f(x) > L;$
13) $\forall L > 0\ \exists C > 0\ \forall x,\ x > C\ :\ |f(x)| > L;$
14) $\forall L > 0\ \exists C > 0\ \forall x,\ x > C\ :\ f(x) < -L;$
15) $\forall L > 0\ \exists C > 0\ \forall x,\ x > C\ :\ f(x) > L.$
7. 0.
9. $c = 0:\ x_1 = 0,\ x_2 \to \infty;\ c \neq 0 : x_1 \to -\frac{c}{b},\ x_2 \to \infty.$
10. 1) $\frac{1}{3}$; 2) 0; 3) ∞; 4) 0; 5) $\frac{3}{4}$; 6) $\frac{1}{3}$; 7) $-\frac{1}{3}$; 8) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$; 9) $\frac{1}{2}$; 10) -3; 11) $\frac{1}{2}$; 12) 4; 13) $-\frac{2}{3}$; 14) $\frac{1}{2}$; 15) $-\frac{1}{2}$; 16) 0; 17) $-\frac{1}{56}$; 18) 1; 19) $\frac{5}{3}$; 20) $-\frac{21}{110}$; 21) $\frac{23}{3}$; 22) $\frac{7}{36}$; 23) 1; 24) -2; 25) 0; 26) 1; 27) ∞; 28) 0; 29) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; 30) -2^{20}; 31) $\frac{2}{3}$; 32) 1.
11. 1) $\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}$; 2) $\frac{m-n}{2}$.

Б16

1. 1) 1; 2) $\frac{4}{3}$; 3) -2; 4) $-\frac{1}{16}$; 5) $\frac{1}{144}$; 6) $\frac{1}{4}$; 7) $\frac{12}{5}$; 8) $\frac{1}{n}$; 9) $\frac{1}{4}$; 10) $\frac{2}{27}$; 11) $\frac{3}{2}$; 12) $\frac{112}{27}$; 13) $\frac{a}{m} - \frac{b}{n}$; 14) $\frac{a+b}{2}$; 15) -2; 16) $-\frac{1}{4}$; 17) 1; 18) $\frac{2}{3}$.

2. $a_1 = -1,\ b_1 = \frac{1}{2};\ a_2 = 1,\ b_2 = -\frac{1}{2}.$
3. 1) 1; 2) $\frac{3}{2}$; 3) 5; 4) $\frac{1}{2}$; 5) 0; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $\frac{9}{4}$; 8) 0; 9) $\frac{1}{8}$; 10) -2; 11) 8; 12) $\frac{1}{3}$; 13) $\frac{1}{3}$; 14) $\frac{1}{4}$; 15) 1; 16) $\frac{1}{2}$; 17) $\frac{3}{2}$; 18) $-\frac{1}{3\sqrt{2}}$; 19) $\frac{1}{4}$; 20) 3.

Б17

1. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; 3) 1; 4) $\frac{1}{2}$; 5) e^{x+1}; 6) 0; 7) 0; 8) 1; 9) e^{2a}; 10) $\frac{1}{e}$; 11) $e^{\operatorname{ctg} a}$; 12) $e^{\frac{3}{2}}$; 13) $\frac{1}{e}$; 14) 1; 15) $\frac{1}{e^2}$; 16) e; 17) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; 18) 0; 19) 1; 20) 1; 21) $\frac{1}{a}$; 22) 0; 23) -2; 24) $\frac{3}{2}$; 25) $\frac{3}{2}$; 25) $\frac{3}{2}$; 26) e^2; 27) $\ln x$; 28) $\sqrt[3]{abc}$.
2. 1) 1; 2) e^2; 3) 0; 4) -1; 5) 1.

Б18

1. 1) $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = 3,\ \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = -3;$
2) $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = -3,\ \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = 3;$
3) $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = -\sqrt{2},\ \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \sqrt{2};$
4) $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = +\infty;$
5) $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = 2,\ \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = 4;$
6) $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = 1,\ \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = -2;$
7) $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = -\frac{1}{2},\ \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = 0;$
8) $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \frac{1}{3},\ \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = 0;$
9) $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = -\frac{1}{3}.$
4. 1) $f(x) \sim -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$; 2) $f(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
5. 1) $\dfrac{1}{2(x-1)}$; 2) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}$; 3) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{1-x}}$; 4) $-\dfrac{1}{\pi(x-1)}$; 5) $\dfrac{1}{x-1}$.
6. 1) 1; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 1; 4) 1; 5) $\frac{1}{3}$; 6) 3; 7) $\frac{4}{9}$; 8) 1; 9) 1; 10) 2.
7. 1) 3; 2) 1; 3) $\frac{3}{5}$; 4) 2; 5) $\frac{1}{4}$.
8. 1) 0; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 1.
9. 1) 1; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 1; 5) 1.

Б20

4. 1) $y \in C(\mathbf{R}\backslash\{1\}),\ x_0 = 1 -$ точка усувного розриву;
2) $y \in C(\mathbf{R}\backslash\{1\}),\ x_0 = 1 -$ точка розриву 2 роду.

5. 1) $x_0 = 1 -$ точка розриву 1 роду;
2) немає точок розриву;
3) $x_0 = 0 -$точка розриву 1 роду, $x_0 = 1 -$точка розриву 2 роду;
4) $x_0 = 0 -$ точка розриву 1 роду.

6. 1) -3; 2) $\frac{2}{5}$; 3) $\ln 2$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) 0; 6) 0; 7) 1; 8) 0.

7. Не обов'язково. Приклад: $f(x) = x,\ g(x) = \operatorname{sign} x$;
Не обов'язково. Приклад: $f(x) = (1 - \operatorname{sign} x) \cdot \operatorname{sign} x$, $g(x) = (1 + \operatorname{sign} x) \cdot \operatorname{sign} x$.

Б21

1. 1) $x \in (-3, -2) \cup (-1, 0) \cup (2, 3) \cup (4, +\infty)$;
2) $x \in (-\infty, -3) \cup (1, 3)$;
3) $x \in \bigcup\limits_{k \in \mathbf{Z}} \Big(\big(\frac{\pi}{5} + 2\pi k, \frac{3\pi}{5} + 2\pi k\big) \cup$
$\cup \big(\pi + 2\pi k, \frac{7\pi}{5} + 2\pi k\big) \cup \big(\frac{9\pi}{2} + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k\big) \Big)$;
4) $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 1) \cup (3, +\infty)$;

4. $y = \operatorname{sign} x \cdot \sqrt{|x| - 1},\ |x| \geq 1$.

Б22

1. 1) $f'(0) = 0$; 2) $f'(1) = \frac{1}{3}$.

3. 1) $f'(x) = e^x$; 2) $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

4. $f'(1) = -8,\ f'(2) = f'(3) = 0$.

5. $f'(1) = 1 + \frac{\pi}{4}$.

6. 1) $\dfrac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1+x)^2}[p - (q+1)x - (p+q-1)x^2]$;

2) $\dfrac{2x^2}{1 - x^6}\sqrt[3]{\dfrac{1 + x^3}{1 - x^3}}$; 3) $-(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$;

4) $\dfrac{1}{27}\left[x\big(1 + \sqrt[3]{x}\big)\left(1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}\right)\right]^{-\frac{2}{3}}$;

5) $-\dfrac{8}{3}\dfrac{\operatorname{ctg}^{-\frac{1}{3}} x}{\sin^4 x}$;

6) $\dfrac{e^x(\sin x - \cos x)}{2\sin^2\dfrac{x}{2}}$;

7) $a^a \cdot x^{a^a-1} + ax^{a-1}a^{x^a}\ln a + a^x a^{a^x}\ln^2 a$;

8) $\dfrac{2}{x\ln x\ln(\ln x)}$;

12) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$;

9) $\dfrac{1}{\cos x}$;

13) $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$;

10) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

11) $-\sin 2x\cdot\cos(\cos 2x)$;

14) $\dfrac{1}{2(1+\sqrt{x+1})}$;

15) $-\left[\dfrac{1}{x^2}+\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{1}{x}+\ln\dfrac{1}{x}\right)^{-1}\right]\cdot\left[\dfrac{1}{x}+\ln\left(\dfrac{1}{x}+\ln\dfrac{1}{x}\right)\right]^{-1}$;

16) $-\operatorname{ctg}^3 x$;

17) $\sin x\cdot\ln\operatorname{tg} x$;

21) $\dfrac{2\cos x\cdot\operatorname{sign}\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$;

18) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;

22) $\dfrac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$;

19) $\dfrac{1}{x^2+2}$;

23) $\left(2x\sqrt{x-1}\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-1}$;

20) $\operatorname{sign}(\cos x)$, $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$;

24) $\dfrac{1}{2(x^2+1)}$.

Б23

1. 1) $\dfrac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}$;

2) $-\dfrac{2x(\cos x^2+\sin x^2)}{\sqrt{\sin(2x^2)}}$;

3) $\dfrac{2m\cos(m\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}e^{m\arcsin x}$;

4) $-\dfrac{1}{x^3\cos\dfrac{1}{x^2}\left(\sin\dfrac{1}{x^2}+\cos\dfrac{1}{x^2}\right)\sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{1}{x^2}}}$;

5) $x^{x^a}x^{a-1}(1+a\ln x)+x^{a^x}a^x\left(\ln a\ln x+\dfrac{1}{x}\right)+$
$+a^{x^x}x^x\ln a(1+\ln x)$;

6) $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$;

7) $(\sin x)^{\cos x}\left(\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x\ln\sin x\right)+$
$+(\cos x)^{\sin x}\left(-\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}+\cos x\ln\cos x\right)$;

8) $\operatorname{th}^3 x$; 9) $-\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}$; 10) $\dfrac{4a^{2x}\ln a}{(1+a^{2x})^2}\operatorname{arcctg} a^{-x}$.

2. 1) $y'=\begin{cases}2x-3, & 1\le x\le 2,\\ 1, & x>2;\end{cases}$ 2) $y'=\begin{cases}1, & x<0,\\ \dfrac{1}{1+x}, & x\ge 0;\end{cases}$

3) $y'=\begin{cases}(2x-2x^3)e^{-x^2}, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

3. 1) $(\ln y)'=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1-x^2}$; 2) $(\ln y)'=\dfrac{n}{\sqrt{1+x^2}}$.

4. При $n\ge 1$ неперервна, при $n\ge 3$ має неперервну похідну.

6. 1) Так. 2) Ні. Приклад: $f(x)=|x|,\ g(x)=-|x|$.

7. 1) Ні. 2) Ні.

8. 1) Ні. 2) Ні 3) Ні.

10. 1) $y'=\dfrac{f'(x)f(x)+g'(x)g(x)}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}$;

2) $y'=\dfrac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{f^2(x)+g^2(x)}$;

3) $y'=(g(x))^{\frac{1}{f(x)}}\dfrac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)\ln g(x)}{g(x)f^2(x)}$;

4) $y'=\dfrac{g'(x)f(x)\ln f(x)-f'(x)g(x)\ln g(x)}{g(x)f(x)\ln^2 f(x)}$.

Б24

1. $y'=\dfrac{1}{1-\varepsilon\cos y(x)}$.

2. 1) $y'(x)=\dfrac{1}{4(y(x)-y^3(x))}$; 2) $y'(x)=\dfrac{(1+y^2(x))^2}{2y(x)}$;

3) $y'(x)=\dfrac{1}{2(e^{-2y(x)}-e^{-y(x)})}$.

3. 1) $y'_x = -1$; 2) $y'_x = -\operatorname{ctg} t$; 3) $y'_x = \operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}$.

4. 1) $y'_x = \dfrac{p}{y(x)}$; 2) $y'_x = -\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x}{y(x)}$; 3) $y'_x = \dfrac{x+y(x)}{x-y(x)}$.

5. 1) $y'_x = -\operatorname{ctg}\frac{3}{2}\varphi$; 2) $y'_x = \dfrac{m\sin\varphi+\cos\varphi}{m\cos\varphi-\sin\varphi}$.

6. 1) $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$; 2) $\operatorname{arctg} 3$.

Б25

1. 1) $\Delta x = 25,\ dx = 20$; 2) $\Delta x = 2{,}05,\ dx = 2$;

3) $\Delta x = 0{,}2005,\ dx = 0{,}2$.

2. 1) $dy = \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$; 2) $dy = \dfrac{\operatorname{sign} a\cdot dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, де $a \neq 0$.

3. 1) $e^x(x+1)dx$; 2) $-\dfrac{2dx}{x^3}$; 3) $\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}}$;
4) $\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; 5) $\dfrac{dx}{\cos^3 x}$.

4. 1) $dy = vw\,du + uw\,dv + uv\,dw$; 2) $dy = \dfrac{v\,du - u\,dv}{u^2+v^2}$;

3) $dy = u^v\left(\dfrac{v}{u}du + \ln u\,dv\right)$.

5. 1) $1-4x^3-3x^6$; 2) $-\operatorname{ctg} x$; 3) $-\operatorname{tg}^2 x$.

6. 1) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{360}$; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{360}$; 3) $1 + \frac{1}{10\ln 10}$.

7. Множина диференційовності є
1) $\mathbf{R}\backslash\{1\}$; 2) $(0,1)\cup(1,+\infty)$; 3) $\mathbf{R}\backslash\{0\}$; 4) $\mathbf{R}\backslash\{0\}$.

9. 1) Диференційовна на $(\pi n, \pi n+\pi),\ n\in\mathbf{Z}$. Існують.
2) Диференційовна на $(-\infty,1)\cup(1,3)\cup(3,+\infty)$. Не існують.
3) Диференційовна на $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. Не існують.
4) Диференційовна на $(-1,1)$. Не існують.

10. Диференційовна на $\mathbf{R}\backslash\{0\}$.

11. $\Delta S = 2x\Delta x + (\Delta x)^2,\ dS = 2x\Delta x$.

Б26

1. 1) $\dfrac{3x+2x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$; 2) $\dfrac{3x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$; 3) $(4x^2-2)e^{-x^2}$;

4) $\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$; 5) $\dfrac{3x}{(1-x^2)^2}+\dfrac{1+2x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}\arcsin x$; 6) $\dfrac{1}{x}$.

2. $y''=\dfrac{u''u-u'^2}{u^2}-\dfrac{v''v-v'^2}{v^2}$.

3. $\dfrac{2\ln x-3}{x^3}\,dx^2$.

4. $d^2y=\dfrac{v^2d^2u-uvd^2v-2v\,dv\,du+2udv^2}{v^3}$.

5. 1) $y'_x=-\operatorname{ctg}t,\ y''_{xx}=-\dfrac{1}{a\sin^3 t},\ y'''_{xxx}=-\dfrac{3\cos t}{a^2\sin^5 t}$;

2) $y'_x=\operatorname{ctg}\frac{t}{2},\ y''_{xx}=-\dfrac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}},\ y'''_{xxx}=\dfrac{\cos\frac{t}{2}}{4a^2\sin^7\frac{t}{2}}$.

6. 1) $y^{(8)}=\dfrac{8!}{(1-x)^9}$; 2) $y^{(10)}=10!e^x\sum\limits_{k=0}^{10}\dfrac{(-1)^k}{(10-k)!}\dfrac{1}{x^{k+1}}$;

3) $y^{(10)}=-2^8\sin 2x-2^{18}\sin 4x+2^8\cdot 3^{10}\sin 6x$.

7. $[-2^{10}x\cos 2x-10\cdot 2^9\sin 2x]dx^{10}$

8. 1) $(-1)^{n+1}\dfrac{(2x+3n)\cdot 1\cdot 4\cdot 7\cdot\dots\cdot(3n-5)}{3^n(1+x)^{n+\frac{1}{3}}}$;

2) $2^{n-1}\sin\left(2x+\dfrac{(n-1)\pi}{2}\right)$;

3) $\dfrac{(a+b)^n}{2}\cos\left((a+b)x+\dfrac{n\pi}{2}\right)+\dfrac{(a-b)^n}{2}\cos\left((a-b)x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$;

4) $4^{n-1}\cos\left(4x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$; 5) $n!e^x\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{(n-k)!}\dfrac{1}{x^{k+1}}$;

6) $e^x\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\sin\left(x+\frac{\pi k}{2}\right)$.

9. $\dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left(\ln x-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\right)dx^n$.

10. 1) $n(n-1)a^{n-2}$; 2) $\sum\limits_{k=0}^{[\frac{1}{2}n]}(-1)^kC_n^{2k}a^{n-2k}b^{2k}$.

11. $f^{(n)}(0)=0,\ n\geq 1$.

Б27

2. $x_1 \in (-1,1),\ x_2 \in (1,2),\ x_3 \in (2,3).$
3. Ні.
4. $[-a,a],\ a \in (0,1).$
5. Ні.
6. Ні.
7. Ні.
8. 1) $c = \sqrt{\frac{19}{3}} - 1$; 2) $c = 0$; 3) $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $c = \frac{1}{4}$.
9. На тих, що не містять нуля.
10. $c = \frac{\pi}{4}$.
12. 1) -2; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{\ln a}{6}$; 4) 0; 5) 0; 6) 0; 7) 1;
8) e^{-1}; 9) 1; 10) $\frac{1}{2}$; 11) $-\frac{e}{2}$; 12) $e^{\frac{1}{3}}$; 13) $e^{-\frac{1}{2}}$.

Б28

1. $P(x) = 5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^3.$

2. 1) $x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3),\ x \to 0;$
2) $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + o(x^3),\ x \to 0;$
3) $\cos 2 - \dfrac{\sin 2}{2}x - \dfrac{\cos 2}{8}x^2 + \dfrac{\sin 2}{48}x^3 + o(x^3),\ x \to 0;$
4) $-3 + 5x - 5x^2 + 5x^3 + o(x^3),\ x \to 0;$
5) $4x^3 + o(x^3),\ x \to 0;$
6) $-\dfrac{1}{4}x^2 + o(x^3),\ x \to 0.$

3. 1) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}(x-2) + \dfrac{1}{8}(x-2)^2 - \dots + \dfrac{1}{2^{n+1}}(x-2)^n +$
$+o((x-2)^n),\ x \to 2;$
2) $\sum\limits_{k=0}^{n} \sin\left(\dfrac{\pi k}{2} - 1\right)\dfrac{2^k}{k!}(x-1)^k + o((x-1)^n),\ x \to 1;$
3) $\ln 2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^k + o\left(\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^n\right),\ x \to \dfrac{1}{2};$
4) $-\dfrac{1}{4}\ln 2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{4k}\left((-1)^{k-1} - \dfrac{1}{2^k}\right)(x-3)^k +$
$+o((x-3)^n),\ x \to 3.$

4. 1) $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{(x-1)^{2k+1}}{4^{k+1}}(-1)^k=o((x-1)^{2n}),\ x\to 1.$

2) $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{(x-2)^{2k+1}}{k!}\dfrac{(-1)^k\cdot 1\cdot 4\cdot 7\cdot\dots\cdot(3k-2)}{3^k}+$
$+o((x-2)^{2n}),\ x\to 2.$

5. 1) $1,718281828$; 2) $2,2676$.

6. 1) $\dfrac{1}{6}$; 2) 0; 3) $e^{-\frac{1}{4}}$; 4) $\dfrac{19}{90}$.

Б29

2. $a\le 0$.

3. 1) Зростає на $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$, спадає на $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$;
2) Зростає на $(-1,1)$, спадає на $(-\infty,-1)$ і на $(1,+\infty)$;
3) Зростає на $[0,100)$, спадає на $(100,+\infty)$;
4) Зростає на $\mathbf{R}$;
5) Зростає на $\left(0,\frac{2}{\ln 2}\right)$, спадає на $(-\infty,0)$ і на $\left(\frac{2}{\ln 2},+\infty\right)$;
6) n - парне: зростає на $(0,n)$, спадає на $(-\infty,0)$ і на $(n,+\infty)$;
n - непарне: зростає на $(-\infty,n)$, спадає на $(n,+\infty)$.

5. 1) Зростає на $(-\infty,0)$ і на $\left(\frac{8}{3},+\infty\right)$, спадає на $\left(0,\frac{8}{3}\right)$, т. $x=0$ — локальний максимум, т. $\frac{8}{3}$ — локальний мінімум.

2) Зростає на $(0,+\infty)$, спадає на $(-\infty,0)$, т. $x=0$ — локальний мінімум.

6. Існує найменше значення $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$, що досягається в точці $x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, не існує найбільшого значення.

8. $\dfrac{R}{\sqrt{5}},\ \dfrac{4R}{\sqrt{5}}$.

9. Висота $\sqrt[3]{\dfrac{V}{4}}$, сторона основи $\sqrt[3]{2V}$.

Б30

1. 1) Опукла вниз на $(-\infty,1)$, опукла вгору на $(1,+\infty)$;
2) Опукла вниз на $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, і на $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right)$, опукла вгору на $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;
3) Опукла вниз на $(-\infty,0)$, опукла вгору на $(0,+\infty)$;
4) Опукла вниз на $\mathbf{R}$.

ПРОГРАМА КУРСУ "МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ" ДЛЯ СТУДЕНТІВ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ "МАТЕМАТИКА" та "СТАТИСТИКА". І КУРС, І СЕМЕСТР

Лекцій – 72 години
Практичних занять – 72 години

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН. ДІЙСНІ ЧИСЛА

Логічні символи. Поняття множини. Операції над множинами. Правила де Моргана. Декартів добуток множин. Загальне поняття відображення. Образ, прообраз, графік. Сюр'єкція, ін'єкція, бієкція. Суперпозиція відображень. Обернене відображення.Рівнопотужні множини. Зліченні множини та їх властивості.Принцип математичної індукції. Приклад незліченної множини. Означення дійсного числа, порівняння дійсних чисел. Числова пряма. Елементарні властивості дійсних чисел. Обмежені числові множини. Точні верхня і точна нижня межі. Теорема про існування точних меж. Дії над дійсними числами. Корінь натурального степеня із дійсного додатного числа. Лема про вкладені відрізки. Нерівність Коші-Буняковського. Нерівність Коші між середнім геометричним та середнім арифметичним.

ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ

Означення границі числової послідовності. Приклади. Теорема про єдиність границі послідовності. Властивості збіжних послідовностей. Теорема про три послідовності. Теорема про арифметичні дії над границями послідовностей. Теорема Тьопліца про регулярне перетворення послідовності. Теорема Штольца, приклади застосування. Монотонні послідовності. Теорема про збіжність монотонної обмеженої послідовності, приклади застосування. Число e. Підпослідовності. Часткові границі. Теорема про характеризацію часткової границі. Теорема про існування монотонної підпослідовності. Теорема Больцано-Вейєрштрасса. Верхня і нижня границі послідовності. Приналежність верхньої й нижньої границь до множини часткових границь. Теорема про характеризацію верхньої та нижньої границь послідовності. Фундаментальні послідовності та їх властивості. Критерій Коші.

ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ В ТОЧЦІ. НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ

Гранична точка множини. Теорема про характеризацію граничної точки. Означення Коші границі функції у точці. Приклади. Означення Гейне границі функції у точці. Еквівалентність означень Коші і Гейне границі функції у точці. Властивості границі функції у точці. Односторонні границі. Теореми про існування границі функції у точці. Відношення підпорядкованості "O" та його властивості, приклади. Відношення нехтування "o" та його властивості, приклади. Відношення еквівалентності та його властивості, приклади. Порядок однієї функції відносно іншої. Шкала порівняння, приклади. Головна частина. Єдиність головної частини. Асимптотичний розклад, приклад.

Неперервні функції. Неперервність справа і зліва. Теорема про арифметичні дії над неперервними функціями, приклади. Елементарні властивості неперервних функцій. Теорема про існування і неперервність оберненої функції. Приклади застосування. Визначні границі. Перша та друга теореми Вейєрштрасса. Теорема про перетворення функції в нуль та теорема Коші про проміжне значення, приклад. Означення рівномірної неперервності та приклади. Теорема Кантора. Класифікація точок розриву функції. Многочлени Бернштейна і теорема Вейєрштрасса про наближення многочленами неперервної на відрізку функції.

ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Означення похідної, приклади. Фізична інтерпретація похідної. Геометрична інтерпретація похідної. Правила обчислення похідних. Похідна суперпозиції функцій. Похідна оберненої функції. Приклади обчислення похідних. Односторонні похідні. Теореми Ферма і Ролля. Теорема Лагранжа і наслідки. Теорема Коші. Застосування до доведення нерівностей. Дослідження монотонності функцій за допомогою похідних. Означення диференційовності, диференціал. Геометрична інтерпретація диференціала. Диференційовність і похідна. Правила диференціювання. Інваріантність форми першого диференціала. Похідні вищих порядків. Формула Лейбніца. Диференціали вищих порядків. Формула Тейлора для многочлена. Формула Тейлора із залишковим членом у формі Пеано. Формули Маклорена для функцій $e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), (1+x)^\alpha$. Формула Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа. Перше та друге правила Лопіталя. Означення опуклості функції. Теореми про умови опуклості. Нерівність Ієнсена та приклади застосування. Локальний екстремум. Необхідні умови існування локального екстремуму. Достатні умови існування локального екстремуму. Точки перегину. Асимптоти графіка функції. Дослідження функції та побудова її графіка.