КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З

ФУНКЦІОНАЛЬНОГО АНАЛІЗУ

ЧАСТИНА 1

Видавничо–поліграфічний центр
"Київський університет"
2004

Збірник задач з функціонального аналізу. Частина I / Укладачі О. Ю. Константінов, Ю. С. Мішура, О. Н. Нестеренко, А. В. Чайковський. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2004. – 123 с.

Збірник містить задачі з усіх основних розділів курсу функціонального аналізу. Кожен розділ складається з коротких теоретичних відомостей, прикладів розв'язання простих типових задач та задач для самостійного розв'язання. Вміщено як стандартні задачі, так і задачі підвищеної складності. Для студентів математичних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Рецензенти: В.Д. Кошманенко

Ю.А. Чаповський

Затверджено Вченою Радою
механіко–математичного факультету
15 вересня 2003 року, протокол №1

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1. БАНАХОВІ ПРОСТОРИ 4
РОЗДІЛ 2. ГІЛЬБЕРТОВІ ПРОСТОРИ 24
РОЗДІЛ 3. ЛІНІЙНІ НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІОНАЛИ 34
РОЗДІЛ 4. ПРОДОВЖЕННЯ ЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ. ТЕОРЕМА ГАНА–БАНАХА. РЕФЛЕКСИВНІ ПРОСТОРИ 52
РОЗДІЛ 5. СЛАБКА ЗБІЖНІСТЬ 63
РОЗДІЛ 6. ЛІНІЙНІ НЕПЕРЕРВНІ ОПЕРАТОРИ 76
РОЗДІЛ 7. РІВНОМІРНА, СИЛЬНА, СЛАБКА ЗБІЖНІСТЬ ОПЕРАТОРІВ. ПРИНЦИП РІВНОМІРНОЇ ОБМЕЖЕНОСТІ 84
РОЗДІЛ 8. ОБЕРНЕНІ ОПЕРАТОРИ 95
РОЗДІЛ 9. КЛАСИ ЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ У ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ 99
РОЗДІЛ 10. СПЕКТР ЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ 115
ДЕЯКІ ПОЗНАЧЕННЯ З ІНШИХ КУРСІВ 122
ЛІТЕРАТУРА 123

РОЗДІЛ 1
БАНАХОВІ ПРОСТОРИ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Нехай X – лінійний простір над числовим полем $\mathbf{K}(\mathbf{K} = \mathbf{R}$ або $\mathbf{K} = \mathbf{C})$, 0 – нульовий елемент простору X.

Функція $||\cdot|| : X \to \mathbf{R}$ називається *нормою* на X, якщо виконуються такі умови (*аксіоми норми*):

1) $\forall x \in X \ : \ ||x|| \geq 0,$ причому $||x|| = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0$ (невід'ємність);

2) $\forall \alpha \in \mathbf{K} \ \forall x \in X \ : \ ||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$(однорідність);

3) $\forall x, y \in X \ : \ ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$(нерівність трикутника).

Лінійний простір, на якому задана норма, називають *лінійним нормованим простором (ЛНП)*. При $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ він називається *дійсним* ЛНП, а при $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ – *комплексним* ЛНП.

Якщо $||\cdot||$ – норма на X, то:

1) $\forall \{x, y\} \subset X \ : \ |\, ||x|| - ||y||\, | \leq ||x - y||$ (друга нерівність трикутника);

2) функція $\rho(x, y) \ := \ ||x - y||, \ x, y \ \in \ X,$ є метрикою на X. ρ називають метрикою, породженою нормою на X.

Послідовність $\{x_n : n \geq 1\} \subset X$ називають *збіжною* до елемента $x \in X$, якщо $||x_n - x|| \to 0, n \to \infty$.

Послідовність $\{x_n : n \geq 1\} \subset X$ називають *фундаментальною*, якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N} \forall n \geq N \forall m \geq N \ : \ ||x_n - x_m|| < \varepsilon$.

Лінійний нормований простір X називають *банаховим*, якщо кожна фундаментальна послідовність $\{x_n : n \geq 1\} \subset X$ збігається до деякого елемента $x \in X$, тобто якщо простір X повний у метриці, породженій нормою.

Відкритою кулею з центром у точці $x_0 \in X$ і радіусом $r > 0$ називають множину $B(x_0, r) := \{x \in X \mid ||x - x_0|| < r\}$.

Замкненою кулею з центром у точці $x_0 \in X$ і радіусом $r > 0$ називають множину $\overline{B}(x_0, r) := \{x \in X \mid ||x - x_0|| \leq r\}$.

Сферою з центром у точці $x_0 \in X$ і радіусом $r > 0$ називають множину $S(x_0, r) := \{x \in X \mid ||x - x_0|| = r\}$.

Множину $A \subset X$ називають *обмеженою*, якщо вона міститься в деякій кулі.

Відстанню від точки $x \in X$ до множини $A \subset X$ називають число $\rho(x, A) := \inf\limits_{y \in A} ||x - y||$. Якщо існує $y^* \in A$ такий, що $\rho(x, A) = ||x - y^*||$, то елемент y^* називають *елементом найкращого наближення* для елемента $x \in X$ у множині A.

Точку $x_0 \in X$ називають *внутрішньою точкою* множини $A \subset X$, якщо $\exists r > 0 \ : \ B(x_0, r) \subset A$. Множина всіх внутрішніх точок множини A позначається через A^0.

Множину $A \subset X$ називають *відкритою*, якщо кожна її точка є внутрішньою.

Точку $x_0 \in X$ називають *граничною точкою* множини $A \subset X$, якщо $\forall r > 0\ \exists x \in B(x_0, r)\backslash\{x_0\}\ :\ x \in A$. Множину всіх граничних точок множини A позначають через A'.

Множину $A \subset X$ називають *замкненою*, якщо вона містить усі свої граничні точки. Множину $\bar{A} := A \cup A'$ називають *замиканням* множини A.

Множину $L \subset X$ називають *лінійною*, якщо $\forall\{x, y\} \subset L$ $\forall\{\alpha, \beta\} \subset \mathbf{K}\ :\ \alpha x + \beta y \in L$. Замкнену лінійну підмножину простору X називають *підпростором*.

Лінійною оболонкою (л.о.) множини $M \subset X$ називають найменшу лінійну множину, що містить M :

$$\text{л.о.}(M) := \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \mid \alpha_k \in \mathbf{K},\ x_k \in X,\ 1 \le k \le n,\ n \in \mathbf{N} \right\}.$$

Замикання множини л.о.(M) називають *замкненою лінійною оболонкою* множини і позначають через з.л.о.(M). Множина з.л.о.(M) є найменшим підпростором, що містить M. Множину називають *тотальною* в X, якщо з.л.о.$(M) = X$.

Вектори $\{x_1, ..., x_n\} \subset X,\ n \in \mathbf{N}$, називають *лінійно незалежними*, якщо з того, що $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0$, випливає, що $\alpha_k = 0,\ 1 \le k \le n$. У протилежному випадку ці вектори називають *лінійно залежними*.

Простір називають n*-вимірним*, якщо в ньому існує n лінійно незалежних векторів, і кожні $(n+1)$ вектори є лінійно залежними. Нескінченний набір $\{x_\alpha\ :\ \alpha \in A\} \subset X$, де A – нескінченна множина індексів, називають *лінійно незалежним*, якщо для будь-якої скінченної сукупності індексів $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset A$ набір $\{x_{\alpha_1}, ..., x_{\alpha_n}\}$ – лінійно незалежний. Простір X називають *нескінченновимірним*, якщо для кожного $n \in \mathbf{N}$ існує лінійно незалежний набір, що складається з n векторів. *Розмірністю простору* називають максимальну кількість лінійно незалежних векторів простору. Розмірність простору позначають через $\dim X$.

Відрізком, що з'єднує точки $x, y \in X$, називають множину $\{tx + (1-t)y \mid t \in [0, 1]\}$. Множину $A \subset X$ називають *опуклою*, якщо для будь-яких двох точок з A відрізок, що їх з'єднує, цілком лежить в A.

Сумою множин $A \subset X$ і $B \subset X$ називають множину $A + B := \{x + y \mid x \in A,\ y \in B\}$.

Множину $M \subset X$ називають *скрізь щільною* в X, якщо $\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists y \in M\ :\ ||x - y|| < \varepsilon$, тобто якщо $\overline{M} = X$.

Часто замість терміну "скрізь щільна" використовується термін "щільна".

ЛНП називають *сепарабельним*, якщо в ньому існує зліченна скрізь щільна множина.

Дві норми $||\cdot||_1$ та $||\cdot||_2$ у лінійному просторі X називають *еквівалентними*, якщо $\exists C_1 > 0\ \exists C_2 > 0\ \forall x \in X\ :\ C_1||x||_1 \le ||x||_2 \le C_2||x||_1$.

Лінійні простори X_1 та X_2 називають *алгебраїчно ізоморфними*, якщо існує лінійна бієкція $U : X_1 \to X_2$. U називають *алгебраїчним ізоморфізмом.*

ЛНП X_1 та X_2 називають *ізоморфними*, якщо вони алгебраїчно ізоморфні і цей ізоморфізм U є гомеоморфізмом, тобто обидва відображення $U : X_1 \to X_2$ та $U^{-1} : X_2 \to X_1$ неперервні. Ізоморфізм U називають *ізометричним ізоморфізмом*, якщо $\forall x \in X_1 \ : \ ||x||_{X_1} = ||Ux||_{X_2}$.

Теорема. Скінченновимірні лінійні нормовані простори, задані над одним і тим самим числовим полем, ізоморфні тоді й тільки тоді, коли вони мають однакову розмірність.

Основні приклади банахових просторів.

1. $\mathbf{R}^m = \{x = (x_1, ..., x_m) \,|\, x_k \in \mathbf{R}, \ 1 \le k \le m\}$ – дійсний m-вимірний сепарабельний банахів простір з кожною з норм $||x||_p := (\sum\limits_{k=1}^{m} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \le p < +\infty, \ ||x||_\infty := \max\limits_{1\le k\le m} |x_k|$. Збіжність в $(\mathbf{R}^m, ||\cdot||_p)$ рівносильна покоординатній збіжності. При $p = 2$ відповідну норму називають евклідовою.

2. $\mathbf{C}^m = \{x = (x_1, ..., x_m) \,|\, x_k \in \mathbf{C}, \ 1 \le k \le m\}$ – комплексний m-вимірний сепарабельний банахів простір з кожною з норм $||x||_p := (\sum\limits_{k=1}^{m} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \le p < +\infty, \ ||x||_\infty := \max\limits_{1\le k\le m} |x_k|$. Збіжність у $(\mathbf{C}^m, ||\cdot||_p)$ рівносильна покоординатній збіжності. При $p = 2$ відповідну норму називають евклідовою.

Далі $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ або $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

3. Нехай Q – компактний метричний простір (наприклад $Q = [a, b]$ зі звичайною відстанню), $C(Q)$ – множина всіх неперервних функцій на Q. $C(Q)$ – лінійний простір, якщо покласти $(\alpha x + \beta y)(t) := \alpha x(t) + \beta y(t), \ t \in Q, \ \{x, y\} \subset C(Q), \ \{\alpha, \beta\} \subset \mathbf{K}$. Простір $C(Q)$ – банахів простір з нормою $||x|| = \sup\limits_{t\in Q} |x(t)|, \ x \in C(Q)$, причому він є сепарабельним (див. задачу 58). Якщо Q – нескінченна множина, то $C(Q)$ – нескінченновимірний простір (див. задачу 58). Збіжність у $C(Q)$ рівносильна рівномірній збіжності на Q.

4. $C^n([a, b]) := \left\{x : [a, b] \to \mathbf{K} \mid \forall t \in [a, b] \exists x^{(n)}(t), \ x^{(n)} \in C([a, b])\right\}$, $n \in \mathbf{N}$ – банахів простір з нормою $||x|| := \sum\limits_{k=0}^{n} \sup\limits_{t\in[a,b]} |x^{(k)}(t)|, \ x \in C^n([a, b])$.

5. Нехай $1 \le p < +\infty$, $(T, \mathcal{F}, \mu)$ – простір з мірою, $\mathcal{L}_p(T) := \{x : T \to \mathbf{K} \,|\, x - \mathcal{F}$-вимірна функція і $\int\limits_T |x(t)|^p d\mu(t) < +\infty\}$, $\mathcal{L} := \{x : T \to \mathbf{K} \,|\, x - \mathcal{F}$-вимірна функція і $x(t) = 0 (\mathrm{mod}\, \mu)\}$. Тоді факторпростір $L_p(T) = \mathcal{L}_p(T)/\mathcal{L}$ – банахів простір з нормою $||x||_p := \int\limits_T |x(t)|^p d\mu(t), \ x \in L_p(T)$.

Якщо $T = \mathbf{N}, \ \mathcal{F} = 2^{\mathbf{N}}, \ \mu(\{n\}) = 1, \ n \in \mathbf{N}$, то $L_p(T) = l_p :=$

$\left\{x = (x_1, ..., x_n, ...) \mid x_n \in \mathbf{K}, n \in \mathbf{N}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty\right\}$ – сепарабельний банахів простір з нормою $||x||_p := \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $x = (x_1, ..., x_n, ...) \in l_p$.

6. Нехай $(T, \mathcal{F}, \mu)$ – простір з мірою, $\mathcal{L}_\infty(T) := \{x : T \to \mathbf{K} \mid x$ – $\mathcal{F}$-вимірна функція і $\operatorname*{esssup}\limits_{t \in T} |x(t)| < +\infty\}$, $\mathcal{L} := \{x : T \to \mathbf{K} \mid x$ – $\mathcal{F}$-вимірна функція і $x(t) = 0 (\operatorname{mod} \mu)\}$. Тоді факторпростір $L_\infty(T) = \mathcal{L}_\infty(T)/\mathcal{L}$ – банахів простір з нормою

$$||x||_\infty := \operatorname*{esssup}_{t \in T} |x(t)| := \inf\{C > 0 \mid |x(t)| \le C \ (\operatorname{mod} \mu)\}.$$

Можна довести, що $\operatorname*{esssup}\limits_{t \in T} |x(t)| = \min\{C > 0 \mid |x(t)| \le C \ (\operatorname{mod} \mu)\}$ (див. задачу 20).

Якщо $T = \mathbf{N}$, $\mathcal{F} = 2^{\mathbf{N}}$, $\mu(\{n\}) = 1$, $n \in \mathbf{N}$, то $L_\infty(T) = l_\infty := \left\{x = (x_1, ..., x_n, ...) \mid x_n \in \mathbf{K}, n \in \mathbf{N}, \sup\limits_{n \in \mathbf{N}} |x_n| < +\infty\right\}$ – несепарабельний банахів простір з нормою $||x||_\infty := \sup\limits_{n \in \mathbf{N}} |x_n|$, $x = (x_1, ..., x_n, ...) \in l_\infty$.

7. Простори $c := \left\{x = (x_1, ..., x_n, ...) \mid x_n \in \mathbf{K}, n \in \mathbf{N}, \exists \lim\limits_{n \to \infty} x_n \in \mathbf{K}\right\}$ і $c_0 := \left\{x = (x_1, ..., x_n, ...) \mid x_n \in \mathbf{K}, \ n \in \mathbf{N}, \ \lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0\right\}$ – банахові простори з нормою $||x||_\infty := \sup\limits_{n \in \mathbf{N}} |x_n|$.

У просторах l_p, $1 \le p \le +\infty$, c, c_0 використовується позначення $e_n := (0, ..., 0, \underbrace{1}_{n}, 0, 0, ...)$, $n \ge 1$.

Наведемо також дві важливі нерівності.

1. Нехай $1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L_p(T, \mu)$, $g \in L_q(T, \mu)$. Тоді $fg \in L(T, \mu)$ і справджується *нерівність Гельдера*:

$$\int\limits_T |fg| d\mu \le \left(\int\limits_T |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_T |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

2. Нехай $1 \le p < +\infty$, $f, g \in L_p(T, \mu)$. Тоді $f + g \in L_p(T, \mu)$ і справджується *нерівність Мінковського*:

$$\left(\int\limits_T |f + g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int\limits_T |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_T |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ця нерівність виражає нерівність трикутника для норм в просторах $L_p(T, \mu)$.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

1. Чи є нормами на відповідних просторах наведені функції:

1) $C([a,b]) \ni x \mapsto \varphi(x) = \max\limits_{\frac{1}{2}(a+b)\le t\le b} |x(t)|$;

2) $C^1([a,b]) \ni x \mapsto \varphi(x) = \int\limits_a^b |x'(t)|dt$;

3) $C^1([a,b]) \ni x \mapsto \varphi(x) = |x(a)| + \int\limits_a^b |x'(t)|dt$?

Р о з в ' я з о к. 1) Ні, оскільки з того, що $\varphi(x) = 0$ не випливає, що $x = 0$. Справді, якщо $x_0(t) = \begin{cases} t - \frac{1}{2}(a+b), & t \in [a, \frac{1}{2}(a+b)], \\ 0, & t \in [\frac{1}{2}(a+b), b], \end{cases}$ то $x_0 \in C([a,b]),\ x_0 \ne 0$, але $\varphi(x_0) = \max\limits_{\frac{1}{2}(a+b)\le t\le b} |x_0(t)| = 0.$

2) Ні, оскільки з того, що $\varphi(x) = 0$ не випливає, що $x = 0$. Справді, якщо $x_0(t) = 1,\ t \in [a,b]$, то $x_0 \in C^1([a,b]),\ x_0 \ne 0$, але $\varphi(x_0) = 0$.

3) Так. Функція φ коректно визначена, бо підінтегральна функція неперервна, отже, інтегровна за Ріманом. Перевіримо аксіоми норми. 1) $\varphi(x) \ge 0, x \in C^1([a,b])$, бо кожен доданок невід'ємний (оскільки модуль числа невід'ємний і інтеграл від невід'ємної функції невід'ємний). Якщо $x = 0$, то $\varphi(x) = 0$. Якщо $\varphi(x) = 0$, то $|x(a)| = 0$ і $\int\limits_a^b |x'(t)|dt = 0.$ Оскільки підінтегральна функція неперервна і невід'ємна, то з останньої рівності випливає, що $|x'(t)| = 0,\ t \in [a,b]$, тобто $x(t) = c,\ t \in [a,b]$, де c – деяка стала. Але $x(a) = 0$, отже $c = 0$, тобто $x(t) = 0,\ t \in [a,b]$. Перша аксіома виконується. 2) $\forall \alpha \in \mathbf{C}$ $\forall x \in C^1([a,b]) : \varphi(\alpha x) = |\alpha x(a)| + \int\limits_a^b |(\alpha x)'(t)|dt = |\alpha| \cdot |x(a)| + \int\limits_a^b |\alpha x'(t)|dt = |\alpha| \cdot |x(a)| + |\alpha| \int\limits_a^b |x'(t)|dt = |\alpha| \varphi(x)$. Друга аксіома виконується. 3) $\forall x, y \in C^1([a,b]) : \varphi(x+y) = |(x+y)(a)| + \int\limits_a^b |(x+y)'(t)|dt = |x(a)+y(a)| + \int\limits_a^b |x'(t)+y'(t)|dt \le |x(a)| + |y(a)| + \int\limits_a^b (|x'(t)| + |y'(t)|)dt = |x(a)| + \int\limits_a^b |x'(t)|dt + |y(a)| + \int\limits_a^b |y'(t)|dt = \varphi(x) + \varphi(y)$. Третя аксіома виконується.

2. 1) Нехай послідовність $\{x_n : n \ge 1\} \subset C([a,b])$ така, що $x_n \to x$, $n \to \infty$, в $C([a,b])$. Довести, що $\forall t \in [a,b] : x_n(t) \to x(t), n \to \infty$

(тобто має місце поточкова збіжність). 2) Нехай послідовність $\left\{x^{(n)}=(x_1^{(n)},...,x_k^{(n)},...)\ :\ n\geq 1\right\}\subset l_p,\ 1\leq p\leq +\infty$, така, що $x^{(n)}\to x, n\to\infty$, в l_p, де $x=(x_1,...,x_k,...)\in l_p$. Довести, що $\forall k\in\mathbf{N}: x_k^{(n)}\to x_k, n\to\infty$ (тобто має місце покоординатна збіжність). 3) Нехай послідовність $\{x_n : n\geq 1\}\subset L_p(T,\mathcal{F},\mu), 1\leq p<+\infty$, така, що $x_n\to x,\ n\to\infty$ в $L_p(T,\mathcal{F},\mu)$, а також $x_n\to y,\ n\to\infty$ μ-майже скрізь на T. Довести, що $x=y$ μ-майже скрізь на T.

Р о з в ' я з о к. 1) Для кожного фіксованого $t_0\in[a,b]$ маємо, що $|x_n(t_0)-x(t_0)|\leq\max\limits_{t\in[a,b]}|x_n(t)-x(t)|$, звідки $x_n(t_0)\to x(t_0),\ n\to\infty$. 2) Для кожного фіксованого $k_0\in\mathbf{N}$ виконується нерівність $|x_{k_0}^{(n)}-x_{k_0}|\leq||x^{(n)}-x||_p$ (справді, при $1\leq p<+\infty$ маємо $|x_{k_0}^{(n)}-x_{k_0}|=(|x_{k_0}^{(n)}-x_{k_0}|^p)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k^{(n)}-x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}=||x^{(n)}-x||_p$, а при $p=+\infty$ маємо $|x_{k_0}^{(n)}-x_{k_0}|\leq\sup\limits_{k\geq 1}|x_k^{(n)}-x_k|=||x^{(n)}-x||_\infty$). Оскільки за умовою $x^{(n)}\to x,\ n\to\infty$, то з останньої нерівності випливає, що $x_{k_0}^{(n)}\to x_{k_0},\ n\to\infty$. 3) Покажемо, що зі збіжності в $L_p(T,\mathcal{F},\mu)$ випливає збіжність за мірою μ . Скориставшись нерівністю Чебишова, отримаємо: $\forall\varepsilon>0\ :\ \mu(\{t\in T\mid|x_n(t)-x(t)|\geq\varepsilon\})\leq\frac{1}{\varepsilon^p}\int\limits_T|x_n(t)-x(t)|^p d\mu(t)\to 0,\ n\to\infty$, тобто $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{\mu}x,\ n\to\infty$. Тепер з теореми Рісса випливає існування підпослідовності $\{x_{n_k}\ :\ k\geq 1\}$ такої, що $x_{n_k}\to x,\ k\to\infty$, μ-майже скрізь на T. З умови маємо, що $x_{n_k}\to y,\ k\to\infty$, μ -майже скрізь на T. Тоді $x=y$ μ-майже скрізь на T.

3. Дослідити такі послідовності на збіжність у лінійному нормованому просторі X (для збіжних послідовностей знайти границі), якщо:

1) $X=C([0,1]),\ x_n(t)=\sin^n\pi t,\ t\in[0,1]$;
2) $X=C([0,1]),\ x_n(t)=\frac{nt}{1+n^\alpha t^2}$, де $\alpha\geq 1$ – фіксоване;
3) $X=l_p,\ 1\leq p\leq+\infty,\ x^{(n)}=(\underbrace{0,...,0}_{n-1},1,0,...)$;
4) $X=l_p,\ 1\leq p\leq+\infty,\ x^{(n)}=(1,0,\frac{1}{3},0,\frac{1}{5},...,\frac{1}{2n-1},0,0,0,...)$;
5) $X=L_p([0,1]),\ 1\leq p<+\infty,\ x_n(t)=\sin^n\pi t,\ t\in[0,1]$;
6) $X=L_p(\mathbf{R}),\ 1\leq p<+\infty,\ x_n(t)=\frac{1}{\sqrt{n}}\chi_{[n,2n]}(t),\ t\in\mathbf{R}$.

Р о з в ' я з о к. 1) Згідно із задачею 2.1 єдиним "претендентом"на границю послідовності в $C([0;1])$ є її поточкова границя, тому знайдемо спочатку її. Маємо для кожного $t\in[0,1]\ :\ x_n(t)=\sin^n\pi t\to$

$x_0(t) := \begin{cases} 1, & t = \frac{1}{2}, \\ 0, & t \in [0,1] \backslash \{\frac{1}{2}\}, \end{cases}$ (бо $|\sin \pi t| < 1$ при $t \in [0,1] \backslash \{\frac{1}{2}\}$). Однак $x_0 \notin C([0,1])$, отже, $x_n \not\to x_0$ у $C([0,1])$ (оскільки рівномірна границя послідовності неперервних функцій є неперервною функцією). Звідси згідно з задачею 2.1, випливає, що не існує елемента $x \in C([0,1])$ такого, що $x_n \to x$ у $C([0,1])$, тобто послідовність $\{x_n : n \geq 1\}$ розбіжна в $C([0,1])$.

2) Знайдемо поточкову границю: для кожного $t \in [0,1]$ маємо $x_n(t) = \frac{nt}{1+n^\alpha t^2} \to x_0(t) := 0$ при $\alpha > 1$, і $x_n(t) = \frac{nt}{1+n^\alpha t^2} \to$ $\to x_0(t) := \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \frac{1}{t}, & t \in (0,1] \end{cases}$ при $\alpha = 1$. Оскільки при $\alpha = 1$ поточкова границя $x_0 \notin C([0,1])$, то за задачею 2.1 послідовність $\{x_n : n \geq 1\}$ розбіжна. Нехай тепер $\alpha > 1$.Треба дослідити, чи $d_n := \max\limits_{t \in [0,1]} |x_n(t) - x(t)| \to 0$, $n \to \infty$. Знайдемо $d_n := \max\limits_{t \in [0,1]} \dfrac{nt}{1+n^\alpha t^2}$. Маємо $x_n'(t) = \dfrac{n - n^{1+\alpha}t^2}{(1+n^\alpha t^2)^2} = 0$, $n - n^{1+\alpha}t^2 = 0$, звідки $t = n^{-\frac{\alpha}{2}}$. Оскільки $x_n(0) = 0$, $x_n\left(n^{-\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{1}{2}n^{1-\frac{\alpha}{2}}$, $x_n(1) = \frac{n}{1+n^\alpha} \leq \frac{n}{2n^{\frac{\alpha}{2}}}$, $n \geq 1$, то $d_n = x_n\left(n^{-\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{1}{2}n^{1-\frac{\alpha}{2}}$. При $1 - \frac{\alpha}{2} \geq 0$, тобто при $\alpha \leq 2$, $d_n = \frac{1}{2}n^{1-\frac{\alpha}{2}} \not\to 0$, $n \to \infty$. При $1 - \frac{\alpha}{2} < 0$, тобто при $\alpha > 2$, $d_n = \frac{1}{2}n^{1-\frac{\alpha}{2}} \to 0$, $n \to \infty$. Отже, ураховуючи задачу 2.1, при $1 \leq \alpha \leq 2$ послідовність $\{x_n : n \geq 1\}$ розбіжна, а при $\alpha > 2$ послідовність збігається до елемента $x_0(t) = 0$, $t \in [0,1]$.

Зауважимо, що для дослідження, чи $d_n \to 0$, $n \to \infty$, можна було не застосовувати поняття похідної, а врахувати, що за нерівністю Коші між середнім арифметичним і середнім геометричним $\frac{nt}{1+n^\alpha t^2} = \frac{1}{\frac{1}{nt} + n^{\alpha-1}t} \leq \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{nt}n^{\alpha-1}t}} = \frac{1}{2}n^{1-\frac{\alpha}{2}}$, $t \in [0,1]$, причому рівність досягається, коли $\frac{1}{nt} = n^{\alpha-1}t$, тобто при $t = n^{-\frac{\alpha}{2}}$. Звідси $d_n = \frac{1}{2}n^{1-\frac{\alpha}{2}}$.

3) Згідно із задачею 2.2 єдиним "претендентом"на границю послідовності в l_p є її покоординатна границя, тому знайдемо її. Маємо для кожного фіксованого $k \in \mathbf{N}$, що $x_k^{(n)} = 0$ для всіх n, починаючи з деякого номера n_0 $(n_0 = k+1)$, тому $x_k^{(n)} \to 0 =: x_k$, $n \to \infty$. Покладемо $\tilde{x} := (x_1, ..., x_k, ...)$, тобто $\tilde{x} := 0$, і перевіримо, чи $x^{(n)} \to \tilde{x}$, $n \to \infty$ в l_p. Маємо, що $||x^{(n)} - \tilde{x}||_p = 1 \not\to 0$, $n \to \infty$, отже, послідовність $\left\{x^{(n)} : n \geq 1\right\}$ розбігається в l_p.

4) Знайдемо покоординатну границю. Нехай $k \in \mathbf{N}$ – довільне фіксоване. Якщо k парне, то $x_k^{(n)} = 0$ для всіх $n \in \mathbf{N}$, тому $x_k^{(n)} \to 0 =: x_k$,

$n \to \infty$. Якщо k непарне, то $x_k^{(n)} = \frac{1}{k}$ для всіх $n \in \mathbf{N}$, починаючи з деякого n_0 $(n_0 = \frac{k+1}{2})$, тому $x_k^{(n)} \to \frac{1}{k} =: x_k,\ n \to \infty$. Покладемо $\tilde{x} := (x_1, ..., x_k, ...)$, тобто $\tilde{x} = (1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, ...)$. Оскільки ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$ розбігається, то $\tilde{x} \notin l_1$, то, ураховуючи задачу 2.2, послідовність $\left\{x^{(n)} : n \geq 1\right\}$ розбіжна в l_1. При $1 < p < +\infty$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^p}$ збігається, крім того $\sup\limits_{k \geq 1} |\frac{1}{2k-1}| = 1 < +\infty$, тому $\tilde{x} \in l_p$ при $1 < p \leq +\infty$. Перевіримо, чи $x^{(n)} \to \tilde{x},\ n \to \infty$, в l_p. При $1 < p < +\infty$ маємо $||x^{(n)} - \tilde{x}||_p^p = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^p} \to 0,\ n \to \infty$, як залишок збіжного ряду, тому $x^{(n)} \to \tilde{x},\ n \to \infty$, у l_p. При $p = +\infty$ маємо $||x^{(n)} - \tilde{x}||_\infty = \sup\limits_{k \geq n+1} \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2n+1} \to 0,\ n \to \infty$, тому $x^{(n)} \to \tilde{x},\ n \to \infty$, в l_∞.

5) Згідно із задачею 2.3, якщо послідовність $\{x_n : n \geq 1\} \subset L_p([0,1])$, $1 \leq p < +\infty$, збігається майже скрізь відносно міри Лебега m до функції x_0, то ця послідовність може збігатися в $L_p([0,1])$ тільки до x_0. Маємо, що $x_n(t) = \sin^n \pi t \to 0 =: x_0(t)$ m-майже скрізь на $[0,1]$. Перевіримо, чи $x_n \to x_0,\ n \to \infty$, в $L_p([0,1])$. Маємо $||x_n - x_0||_p^p = \int\limits_0^1 \sin^{np} \pi t dt \to 0$, $n \to \infty$, за теоремою Лебега про мажоровану збіжність (справді, послідовність $y_n(t) := \sin^{np} \pi t \to 0 (\operatorname{mod} m),\ n \to \infty$, на $[0,1]$, а також $|y_n(t)| \leq 1 =: g(t),\ t \in [0,1],\ n \geq 1,\ g \in L_1([0,1], m).$). Отже, $x_n \to x_0,\ n \to \infty$, в $L_p([0,1])$.

6) Знайдемо границю майже скрізь. Для кожного $t \leq 0\ :\ x_n(t) = 0$, $n \geq 1$, а при $t \geq 0\ :\ x_n(t) = 0$ для всіх $n \geq n_0 := [t]+1$, отже, $\forall t \in \mathbf{R}\ :$ $x_n(t) \to 0 =: x_0(t),\ n \to \infty$. Перевіримо, чи $x_n \to x_0,\ n \to \infty$, в $L_p(\mathbf{R})$. Маємо, що $||x_n - x_0||_p^p = \int\limits_{\mathbf{R}} |x_n(t) - x_0(t)|^p dt = \int\limits_n^{2n} \frac{1}{n^{\frac{p}{2}}} dt =$ $n^{1-\frac{p}{2}} \to 0,\ n \to \infty$, тоді й тільки тоді, коли $1 - \frac{p}{2} < 0$, тобто при $p > 2$. Отже, $\{x_n : n \geq 1\}$ збігається в $L_p(\mathbf{R})$ лише при $p > 2$.

4. Нехай X – ЛНП над полем $\mathbf{K}$, G – підпростір в X, $y \notin G$. Довести, що множина $G_1 := \{x + \lambda y \mid x \in G,\ \lambda \in \mathbf{K}\}$ – підпростір в X.

Р о з в ' я з о к. Лінійність G_1. Нехай $z_1, z_2 \in G_1,\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{K}$. Тоді $z_1 = x_1 + \lambda_1 y, z_2 = x_2 + \lambda_2 y$, де $\{x_1, x_2\} \subset G,\ \{\lambda_1, \lambda_2\} \subset \mathbf{K}$. Тому $\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + (\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2) y = x + \lambda y$, де $x := \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in G,\ \lambda := \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 \in \mathbf{K}$, отже, $\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 \in G_1$.

Замкненість G_1. Нехай послідовність $\{z_n : n \geq 1\} \subset G_1$ така, що

$z_n \to z,\ n \to \infty$. Тоді $z_n = x_n + \lambda_n y,\ n \geq 1$, де $x_n \in G,\ \lambda_n \in \mathbf{K}$, $n \geq 1$, причому $x_n + \lambda_n y \to z,\ n \to \infty$. Припустимо, що послідовність $\{\lambda_n : n \geq 1\}$ необмежена; тоді існує підпослідовність $\{\lambda_{n_k} : k \geq 1\}$ така, що $|\lambda_{n_k}| \to +\infty, k \to +\infty$. Зі співвідношення $x_n + \lambda_n y - z \to 0$, $n \to \infty$, отримуємо, що $\frac{x_{n_k}}{\lambda_{n_k}} + y - \frac{z}{\lambda_{n_k}} \to 0,\ k \to \infty$, звідки, враховуючи, що $\frac{z}{\lambda_{n_k}} \to 0,\ k \to \infty,$, маємо, що $\frac{x_{n_k}}{\lambda_{n_k}} \to -y,\ k \to \infty$. Оскільки $\frac{x_{n_k}}{\lambda_{n_k}} \in G,\ k \geq 1$, і G – замкнена множина, то $-y \in G$, отже $y \in G$ (бо G – лінійна множина). Отримали суперечність з умовою. Отже, послідовність $\{\lambda_n : n \geq 1\}$ – обмежена. Тому існує збіжна підпослідовність $\{\lambda_{n_k} : k \geq 1\}\ :\ \lambda_{n_k} \to \lambda,\ k \to \infty$, де $\lambda \in \mathbf{K}$. Зі співвідношення $x_n + \lambda_n y - z \to 0,\ n \to \infty$, отримаємо, що $x_{n_k} \to z - \lambda y,\ k \to \infty$, звідки $z - \lambda y \in G$ (бо G – замкнена множина), тобто $z = x + \lambda y$, де $x := z - \lambda y \in G$. Отже, $z \in G_1$, тобто G_1 – замкнена множина.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

5. Знайти норму заданого елемента в заданому просторі:

1) $x(t) = t^n$ в $C([0,1]),\ n \geq 1$;
2) $x(t) = e^{-t}$ в $C([0,1])$;
3) $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...)$ в l_2; в l_∞;
4) $x(t) = t$ в $L_4([0,1])$;
5) $x(t) = t^2$ в $C^1([0,1])$;
6) $x(t) = \chi_{\mathbf{Q}}(t)$ в $L_1([0,1])$;
7) $x(t) = \chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}(t)$ в $L_2([0,1])$;
8) $x(t) = 1 - e^t$ в $L_3([0,1])$;
9) $x(t) = \sin t + \cos t$ в $L_2([0,1])$;
10) $x(t) = t \ln t$ в $L_1([1,e])$.

6. Чи є нормами в $C([a,b])$ такі функції:

1) $||x|| = \max\limits_{a \leq t \leq \frac{1}{2}(a+b)} |x(t)| + |x(b)|$;

2) $||x|| = \left(\int\limits_a^b \alpha(t) |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$, $\alpha \in C([a,b]),\ \alpha(t) > 0,\ t \in [a,b]$;

3) $||x|| = \max\limits_{a \leq t \leq \frac{1}{2}(a+b)} |x(t)| + \int\limits_{\frac{1}{2}(a+b)}^b |x(t)| dt$?

7. Чи є нормами в $C^1([a,b])$ такі функції:

1) $||x|| = \max\limits_{a \leq t \leq b} |x(t)|$;

2) $||x|| = \max\limits_{a \leq t \leq b} |x'(t)|$;

3) $||x|| = \max\limits_{a \leq t \leq \frac{1}{2}(a+b)} |x(t)| + \max\limits_{\frac{1}{2}(a+b) \leq t \leq b} |x'(t)|$;

4) $||x|| = |x(a)| + \max\limits_{a \leq t \leq b} |x'(t)|$;

5) $||x|| = |x(b) - x(a)| + \max\limits_{a \leq t \leq b} |x'(t)|$;

6) $||x|| = \int\limits_a^b |x(t)|dt + \max\limits_{a \le t \le b} |x'(t)|$?

8. Чи є нормами в $C^2([a,b])$ такі функції:

1) $||x|| = |x(a)| + |x'(a)| + \max\limits_{a \le t \le b} |x''(t)|$;

2) $||x|| = |x(a)| + |x(b)| + \max\limits_{a \le t \le b} |x''(t)|$;

3) $||x|| = \int\limits_a^b |x(t)|dt + |x'(a)| + \max\limits_{a \le t \le b} |x''(t)|$?

9. Чи збігається в заданому просторі задана послідовність елементів?

I. У просторі $C([0,1])$:

1) $x_n(t) = t^n$;
2) $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$;
3) $x_n(t) = t^n - t^{2n}$;
4) $x_n(t) = e^{-\frac{t}{n}}$;
5) $x_n(t) = \sin t - \sin \frac{t}{n}$;
6) $x_n(t) = \frac{nt}{\sqrt{n^2+1}}$;
7) $x_n(t) = nte^{-nt}$;
8) $x_n(t) = n \sin \frac{t}{n}$;
9) $x_n(t) = n \ln(1 + \frac{t}{n})$;
10) $x_n(t) = t^n - t^{3n}$;
11) $x_n(t) = \varphi(t + \frac{1}{n}),\ \varphi \in C(\mathbf{R})$ – фіксована функція;

II. У просторі $C^1([0,1])$:

1) $x_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}$;
2) $x_n(t) = \int\limits_0^t e^{-\frac{u^2}{2n}} du$;

III. У просторі $l_p,\ 1 \le p \le +\infty$:

1) $x^{(n)} = (0, ..., 0, \underbrace{\tfrac{1}{n}}_{n}, 0, ...)$;
2) $x^{(n)} = (1, 0, ..., 0, \underbrace{\tfrac{1}{n}}_{n}, 0, ...)$;
3) $x^{(n)} = (\frac{1}{n}, 0, ..., 0, \underbrace{\tfrac{1}{n}}_{n}, 0, ...)$;
4) $x^{(n)} = (\underbrace{0, ..., 0}_{n-1}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...)$;
5) $x^{(n)} = (\underbrace{0, ..., 0}_{n-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, ...)$;
6) $x^{(n)} = (1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, 0, ...)$;
7) $x^{(n)} = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, ..., \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, ...)$;
8) $x^{(n)} = (\underbrace{\tfrac{1}{n}, ..., \tfrac{1}{n}}_{n}, 0, ...)$;
9) $x^{(n)} = (\underbrace{\tfrac{1}{\ln n}, ..., \tfrac{1}{\ln n}}_{n}, 0, ...)$;
10) $x^{(n)} = (\underbrace{1, ..., 1}_{n}, 0, ...)$;
11) $x^{(n)} = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, ..., \frac{1}{2}, 1, 0, ...)$;
12) $x^{(n)} = (\sqrt[n]{1}, \sqrt[n]{2}, ..., \sqrt[n]{n}, 0, 0, ...)$;
13) $x^{(n)} = (\underbrace{(\tfrac{1}{2})^n, (\tfrac{2}{3})^n, ..., (\tfrac{n}{n+1})^n}_{n}, 0, 0, ...)$.

IV. У просторі $L_p([0,1]),\ 1 \le p < +\infty$:

1) $x_n(t) = t^n$;
2) $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$;

3) $x_n(t) = n \cdot \chi_{[0, \frac{1}{n^2}]}(t)$; 5) $x_n(t) = 1 - \frac{t}{n},\ p = 2$;

4) $x_n(t) = ne^{-nt},\ p = 1$; 6) $x_n(t) = (\sqrt{n} - n\sqrt{nt})\chi_{[0, \frac{1}{n}]}(t),\ p = 2.$

10. Довести безпосередньо повноту просторів

1) $\mathbf{C}^m$ з нормою $||x||_\infty = \max\limits_{1 \le k \le m} |x_k|$;

2) $l_p,\ 1 \le p < +\infty$ з нормою $||x||_p := (\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$;

3) l_∞ з нормою $||x||_\infty = \sup\limits_{k \ge 1} |x_k|$.

11. Нехай X – банахів простір. Довести, що простір неперервних обмежених функцій $C_b(\mathbf{R}, X)$ з рівномірною нормою $||x|| = \sup\limits_{t \in \mathbf{R}} ||x(t)||_X$, $x \in C_b(\mathbf{R}, X)$, є банаховим простором.

12. 1) Нехай $X = \mathbf{R}^2,\ ||x||_1 := |x_1| + |x_2|, ||x||_2 := \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}$, $||x||_\infty = \max\limits_{i=1,2} |x_i|$. Намалювати одиничні кулі з центром у початку координат.

2) Нехай $X = \mathbf{R}^3$, $||x||_1 := |x_1| + |x_2| + |x_3|$, $||x||_2 := \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2}$, $||x||_\infty = \max\limits_{i=1,2,3} |x_i|$. Намалювати одиничні кулі з центром у початку координат.

13. Довести, що $C([a, b]) \subset L_p([a, b])$, $1 \le p \le +\infty$, $-\infty < a < b < +\infty$, а також $||x||_{L_p([a,b])} \le (b - a)^{\frac{1}{p}} ||x||_{C([a,b])}$, $1 \le p < +\infty$, $||x||_{L_\infty([a,b])} = ||x||_{C([a,b])}$, $x \in C([a, b])$.

14. 1) Показати, що в просторі $\mathbf{R}$ кожна норма має вигляд $||x|| = \alpha|x|,\ x \in \mathbf{R}$, де $\alpha > 0$ – фіксована стала.

2)* Нехай T – множина функцій $f : \mathbf{R} \to (0, +\infty)$, що задають замкнені криві в площині в полярних координатах рівнянням $\rho = f(\varphi)$, де $f \in C(\mathbf{R})$, причому ці криві обмежують опуклі множини. Довести, що кожна норма в $\mathbf{R}^2$ задається таким чином: $||(x_1, x_2)|| = \frac{\rho}{f(\varphi)}$, де $f \in T,\ x_1 + ix_2 = re^{i\varphi},\ \varphi \in [0, 2\pi)$. Знайти криві, що відповідають нормам в просторах $\mathbf{R}^2_p,\ 1 \le p \le +\infty$.

15. Довести, що $l_{p_1} \subset l_{p_2}$ при $1 \le p_1 < p_2 \le +\infty$ і $\forall x \in l_1$: $||x||_\infty = \lim\limits_{p \to \infty} ||x||_p$.

16. Нехай $(T, \mathcal{F}, \mu)$ – простір зі скінченною мірою. Довести, що $L_{p_1}(T, \mu) \supset L_{p_2}(T, \mu)$ при $1 \le p_1 < p_2 \le +\infty$ і $\forall x \in L_\infty(T, \mu)$: $||x||_\infty = \lim\limits_{p \to \infty} ||x||_p$.

17. Довести, що простори $L_{p_1}(\mathbf{R})$ та $L_{p_2}(\mathbf{R})$ не вкладаються один в інший ні при яких $1 \le p_1 < p_2 \le +\infty$.

18. Нехай λ_F – міра Лебега–Стілтьєса в $\mathbf{R}$. За яких умов на множину $A \subset \mathbf{R}$ справджується включення $L_{p_1}(A, \lambda_F) \subset L_{p_2}(A, \lambda_F)$ 1) при $1 \leq p_1 < p_2 < +\infty$? 2) при $1 \leq p_2 < p_1 < +\infty$?

19. Нехай $1 \leq p < r < s$. Довести, що $L_r(\mathbf{R}) \supset L_p(\mathbf{R}) \cap L_s(\mathbf{R})$.

20. Нехай $x \in L_\infty(T, \mu)$. Довести, що $\operatorname*{esssup}_{t \in T} |x(t)| =$

$$\min\{C > 0 | \, |x(t)| \leq C \,(\mathrm{mod}\, \mu)\} = \inf \left\{ \sup_{t \in T \setminus A} |x(t)| \, | A \in \mathcal{F}, \, \mu(A) = 0 \right\}.$$

21. 1) Чи задає норму функція $x \mapsto ||x|| = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ при $0 < p < 1$ на l_p, де l_p при $0 < p < 1$ формально визначається так само, як і при $1 \leq p < +\infty$? 2) Чи задає норму функція $x \mapsto ||x|| = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$ при $0 < p < 1$ на $C([a, b])$?

22. За якої умови на функцію $\alpha \in C([a, b])$:

1) функція $||x|| = \max\limits_{a \leq t \leq b} \alpha(t)|x(t)|, \; x \in C([a, b])$ є нормою в $C([a, b])$?

2)* збіжність за нормою з п. 1) рівносильна рівномірній збіжності в $C([a, b])$?

23. За якої умови на послідовність $\{\alpha_n \; : \; n \geq 1\} \subset [0, +\infty)$ функція $l_2 \ni x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k |x_k|^2$ є нормою на l_2?

24. Коли досягається рівність у нерівності: 1) Гельдера; 2) Мінковського?

25. Нехай $f \in L_2(\mathbf{R}), \; xf(x) \in L_2(\mathbf{R})$. Довести, що $f \in L_1(\mathbf{R})$.

26. Довести, що при $1 \leq p \leq 2$ справджується такий розклад: $\forall f \in L_p(\mathbf{R}) \exists f_1 \in L_1(\mathbf{R}) \; \exists f_2 \in L_2(\mathbf{R}) \; : \; f = f_1 + f_2$.

27. Нехай $f \in L_1(\mathbf{R})$ така, що $\exists \sigma > 0 \exists A > 0 : \int\limits_{\mathbf{R}} |x^k f(x)| dx \leq A \sigma^k$, $k \geq 1$. Довести, що $f = 0 (\mathrm{mod}\, \lambda_1)$ на $(-\infty, -\sigma) \cup (\sigma, +\infty)$.

28. Для яких $1 \leq p < +\infty$ функція $x(t) = \begin{cases} n^\alpha, & \frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n}, \; n \geq 1, \\ 0, & t = 0, \; t = 1, \end{cases}$ належить до простору $L_p([0, 1])$?

29 Побудувати в $L_1(\mathbf{R})$ нескінченновимірний підпростір, що:

1) складається з неперервних функцій;

2) не містить жодної ненульової неперервної функції.

30. Нехай $X = \left\{ x = (x_1, x_2, ...) \, | \, \sup\limits_{n \geq 1} | \sum\limits_{k=1}^{n} x_k | < +\infty \right\}$. Визначимо норму в X як $||x|| := \sup\limits_{n \geq 1} \left| \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \right|$. Довести, що $(X, ||\cdot||)$ – банахів простір.

31. Довести, що функції $1, \cos t, \cos^2 t$ лінійно незалежні, а $1, \cos^2 t, \cos 2t$ – лінійно залежні в $C([0,\pi])$.

32. На множині P_n многочленів, степені яких не перевищують $n(n \in \mathbf{N})$, визначимо функцію $||x|| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t) - x(t)|$. Чи визначає вона норму на $1) P_n$? $\;2) C^1([a,b])$?

33. Нехай $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ – норми на лінійному просторі X. Довести, що такі умови рівносильні: 1) норми $||\cdot||_1$ і $||\cdot||_2$ еквівалентні; 2) послідовність $x_n \to x,\ n \to \infty$, у $(X, ||\cdot||_1)$ тоді й тільки тоді, коли $x_n \to x,\ n \to \infty$ у $(X, ||\cdot||_2)$; 3) топології (тобто класи відкритих множин) у просторах $(X, ||\cdot||_1)$ і $(X, ||\cdot||_2)$ збігаються.

34. Нехай $||\cdot||_1$ і $||\cdot||_2$ – еквівалентні норми на лінійному просторі X. Довести, що: 1) якщо простір $(X, ||\cdot||_1)$ банахів, то простір $(X, ||\cdot||_2)$ теж банахів; 2) якщо простір $(X, ||\cdot||_1)$ сепарабельний, то простір $(X, ||\cdot||_2)$ теж сепарабельний.

35. Нехай простори $(X_1, ||\cdot||_1)$ та $(X_2, ||\cdot||_2)$ ізоморфні, $(X_1, ||\cdot||_1)$ – банахів. Довести, що $(X_2, ||\cdot||_2)$ – теж банахів. Як наслідок, показати, що будь-який скінченновимірний ЛНП – банахів.

36. Довести, що норми $||x|| = \max\limits_{a\le t\le b} |x(t)|$ та $||x|| = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$, $1 \le p < +\infty$ в $C([a,b])$ не еквівалентні.

37. Чи еквівалентні норми $||x|| = |x(a)| + \max\limits_{a\le t\le b} |x'(t)|$ та $||x|| = \max\limits_{a\le t\le b} |x(t)| + \max\limits_{a\le t\le b} |x'(t)|$ на $C^1([a,b])$?

38. Нехай $\{r_n : n \ge 1\} = \mathbf{Q} \cap [0,1]$. Довести, що $||x|| := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} |x(r_n)|$, $x \in C([0,1])$ – норма на $C([0,1])$. Чи еквівалентна вона рівномірній нормі?

39. Нехай $||\cdot||_1,\ ||\cdot||_2$ – норми в лінійному просторі X, $\overline{B}_i(0,1)$ – одинична замкнена куля в $(X, ||\cdot||_i),\ i = 1, 2$. Довести, що, коли $\overline{B}_1(0,1) = \overline{B}_2(0,1)$, то $||x||_1 = ||x||_2,\ x \in X$.

40. Нехай X – ЛНП, $\{x_n : n \ge 1\} \subset X$. Які з наведених умов рівносильні: 1) $\{x_n : n \ge 1\}$ – фундаментальна послідовність; 2) $||x_n - x_m|| \to 0$, $m, n \to \infty$; 3) $\lim\limits_{m\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} ||x_m - x_n|| = 0$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{m\to\infty} ||x_m - x_n|| = 0$?

41. Довести, що ЛНП X банахів $\Leftrightarrow$ будь-який ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$, для якого $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ||x_k|| < +\infty$, збігається в X.

42. Нехай $n \ge 1$. Довести, що простір $C^n([a,b])$ з нормою $||x||_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \max\limits_{a\le t\le b} |x^{(k)}(t)|$ – банахів, а з нормою

$||x||_{n-j} = \sum\limits_{k=0}^{n-j} \max\limits_{a \le t \le b} |x^{(k)}(t)|$ – не повний при будь-якому $j,\ 1 \le j \le n$.

43. Нехай $B(T) := \left\{ x : T \to \mathbf{K} \mid ||x|| := \sup\limits_{t \in T} |x(t)| < +\infty \right\}$, де T – довільна множина. Довести, що $B(T)$ – банахів простір з нормою $|| \cdot ||$.

44. Нехай Q – метричний простір, а банахів простір $C_b(Q)$ обмежених неперервних на Q функцій з нормою $||x|| := \sup\limits_{t \in Q} |x(t)|,\ x \in C_b(Q)$, є сепарабельним. Довести, що Q – компакт.

45. Нехай $T \subset \mathbf{R}$ – деяка множина, $M(T)$ – простір обмежених на множині T функцій з нормою $||x|| = \sup\limits_{t \in T} |x(t)|$. 1) Довести, що $M(T)$ – банахів простір; 2) За якої умови на T простір $M(T)$ – сепарабельний?

46. Довести, що простір $BV_0([a,b])$ функцій обмеженої варіації на $[a,b]$ таких, що $x(0) = 0$, з нормою $||x|| = \mathrm{Var}\,(x, [a,b])$ – банахів. Чи є він сепарабельним?

47. Позначимо через $H^\lambda([a,b])$ множину всіх функцій, що задовольняють на $[a,b]$ умову Гельдера з показником $\lambda \in (0,1]$, тобто $\varphi_\lambda(x) := \sup\limits_{a \le s < t \le b} \frac{|x(t)-x(s)|}{(t-s)^\lambda} < +\infty$. Довести, що $H^\lambda([a,b])$ – банахів простір відносно норми $||x|| = \max\limits_{a \le t \le b} |x(t)| + \varphi_\lambda(x),\ x \in H^\lambda([a,b])$. Чи є він сепарабельним?

48. Нехай X – лінійний метричний простір з метрикою ρ, яка має властивості: (i) $\{x,y,z\} \subset X\ :\ \rho(x+z, y+z) = \rho(x,y)$; (ii) $\forall x \in X$ $\forall \lambda \in \mathbf{C}\ :\ \rho(0, \lambda x) = |\lambda| \rho(0,x)$.

1) Показати, що X – ЛНП з нормою $||x|| = \rho(0,x)$. 2) Навести приклад метрики на $\mathbf{R}$, що не має жодної з властивостей (i), (ii).

49. Нехай X – ЛНП, $x, y \in X$ і виконується умова $||x+y|| = ||x|| + ||y||$. 1) Нехай $X = \mathbf{R}^m$ з евклідовою нормою. Довести, що x і y лінійно залежні. Чи вірно це в інших нормованих просторах? 2) Довести, що $\forall \alpha, \beta \ge 0\ :\ ||\alpha x + \beta y|| = \alpha ||x|| + \beta ||y||$.

50. Нехай X – ЛНП. Довести, що:

1) $\forall x, y \in X\ :\ ||x|| \le \max\{||x+y||, ||x-y||\}$;

2) $\forall x, y \in X\ :\ ||x|| + ||y|| \le ||x+y|| + ||x-y||$.

51. Нехай $x \in L_1([a,b])$. Довести, що $\lim\limits_{h \to 0+} \int\limits_a^{b-h} |x(t+h) - x(t)| dt = 0$.

52. Довести, що:

1) система функцій $\{1, t, t^2, ...\}$ тотальна в $C([a,b])$ та $L_p([a,b])$, $1 \le p < +\infty$;
2) система функцій $\left\{ t^{2k}\ :\ k \ge 0 \right\}$ тотальна в $C([a,b])$ при $a \ge 0$;

3) система функцій $\left\{t^{2k} \ : \ k \geq k_0\right\}$, $k_0 \in \mathbf{N}$ тотальна в $L_p([a,b])$, $1 \leq p < +\infty$ при $a \geq 0$;
4) система функцій $\left\{t^{100k} \ : \ k \geq 0\right\}$ тотальна в $C([a,b])$ при $a \geq 0$;
5) система функцій $\left\{t^{100k} \ : \ k \geq k_0\right\}$, $k_0 \in \mathbf{N}$ тотальна в $L_p([a,b])$, $1 \leq p < +\infty$ при $a \geq 0$;
6) система функцій $\{1, \cos nt, \sin nt \ : \ n \geq 1\}$ тотальна в $L_p([0,2\pi])$, $1 \leq p < +\infty$;
7) система функцій $\left\{e^{int} \ : \ n \in \mathbf{Z}\right\}$ тотальна в $L_p([0,2\pi])$;
8) система функцій $\left\{e^{int} \ : \ n \in \mathbf{Z}\right\}$ тотальна в $C([a,b])$ тоді й лише тоді, коли $|b-a| < 2\pi$;
9) система функцій $\{\sin nt \ : \ n \geq 1\}$ тотальна в $C([a,b])$ тоді й лише тоді, коли $|b-a| < \pi$;
10) система функцій $\{1, \cos nt \ : \ n \geq 1\}$ тотальна в $C([a,b])$ тоді й лише тоді, коли $|b-a| < \pi$;
11) система елементів $\{e_n = (0,...,0,\underbrace{1}_{n},0,...) \ : \ n \geq 1\}$ тотальна в l_p, $1 \leq p < +\infty$.

53. Довести щільність в $L_p([a,b])$, $1 \leq p < +\infty$ множин:
1) простих функцій;
2) східчастих функцій;
3) неперервних функцій;
4) многочленів;
5) многочленів з раціональними коефіцієнтами;
6) многочленів з нульовою сумою коефіцієнтів;
7) парних многочленів, якщо $a \geq 0$;
8) неперервних функцій x таких, що $x(a) = 0$;
9) неперервних функцій x таких, що $x(a) = x(b) = 0$;
10) многочленів від e^t.

54. 1) Довести, що множина $C_0(\mathbf{R})$ фінітних неперервних на $\mathbf{R}$ функцій скрізь щільна в $L_p(\mathbf{R})$, $1 \leq p < +\infty$. 2) Довести, що простір $L_p(\mathbf{R})$, $1 \leq p < +\infty$, сепарабельний.

55. Довести, що множина $C_b(\mathbf{R})$ неперервних обмежених на $\mathbf{R}$ функцій не є скрізь щільною в $L_\infty(\mathbf{R})$.

56. Довести несепарабельність простору $L_\infty([a,b])$.

57. Нехай K – компакт у метричному просторі $(\mathbf{R}^m, \rho)$. Довести, що простір $C(K)$ з рівномірною нормою сепарабельний.

58*. Нехай (K, ρ) – компактний метричний простір. Довести, що: 1) якщо K – нескінченна множина, то $C(K)$ – нескінченновимірний простір; 2) якщо $\{U_i \ : \ 1 \leq i \leq n\}$ – скінченне відкрите покриття K, то існує система дійсних неперервних функцій $\{\varphi_i \ : \ 1 \leq i \leq n\}$ на K така, що: (i) $\varphi_i(t) \geq 0$, $1 \leq i \leq n$, $t \in K$; (ii) $\varphi_i(t) = 0$, $t \notin U_i$, $i = 1,...,n$; (iii) $\sum\limits_{i=1}^{k} \varphi_i(t) = 1$, $t \in K$ (таку систему називають *розбиттям одиниці*).

3) банахів простір $C(K)$ – сепарабельний.

59. Нехай X – ЛНП. Довести, що X сепарабельний тоді й тільки тоді, коли існує $r > 0$ таке, що сфера $S(0,r)$ – сепарабельний метричний простір.

60. Простором *локально інтегровних* з p-м степенем на вимірній множині $A \subset \mathbf{R}$ функцій називають простір

$$L_p^{loc}(A) := \left\{ f : A \to \mathbf{R} \mid \forall a, b \in \mathbf{R},\ a < b \ :\ f \cdot \chi_{[a,b]} \in L_p(A) \right\}.$$

За якої умови на функцію $g \in L_p^{loc}(\mathbf{R}),\ 1 \le p < +\infty$, виконується рівність з.л.о. $\left\{ g \cdot \chi_{(\alpha,\beta]} \mid -\infty < \alpha < \beta < +\infty \right\} = L_p(\mathbf{R})$?

61. Чи є підпросторами в $C([-1,1])$ такі підмножини:

1) монотонні функції;
2) неспадні функції;
3) парні функції;
4) непарні функції;
5) многочлени;
6) многочлени степеня $\le m$ ($m \in \mathbf{N}$ – фіксоване);
7) неперервні кусково-гладкі функції;
8) неперервно диференційовні функції;
9) неперервні функції обмеженої варіації;
10) функції x, для яких $x(0) = 0$;
11) функції x, для яких $\int\limits_{-1}^{1} x(t)dt = 0$;
12) функції, що задовольняють умову Ліпшиця.

Примітка. Кусково-гладкими називають функції, що мають неперервну похідну в усіх точках, крім скінченного числа.

62. Чи є множина $M = \left\{ x \in C^1([-1,1]) \mid \int\limits_{-1}^{1} x(t)dt = 0 \right\}$ підпростором у просторі: 1) $C^1([-1,1])$? 2) $C^1([-1,1])$ з нормою $||x|| = \max\limits_{-1 \le t \le 1} |x(t)|$?

63. Розглянемо l_1 як підмножину l_∞. Знайти її замикання в l_∞.

64. Нехай $M = \left\{ x \in X \mid \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k = 0 \right\}$. Чи утворює M підпростір в X, якщо: 1) $X = l_1$; 2) $X = l_p,\ 1 < p < +\infty$; 3) $X = l_\infty$?

65. Чи є повним простір l_1 з нормою простору l_2?

66. Визначимо в l_∞ таку множину: $c = \left\{ x \in l_\infty \mid \exists \lim\limits_{i \to \infty} x_i \in \mathbf{K} \right\}$. Довести, що: 1) c – підпростір в l_∞; 2) c з нормою $||x|| = ||x||_\infty = \sup\limits_{i \ge 1} |x_i|,\ x \in c,$ – сепарабельний банахів простір.

67. Визначимо в l_∞ множину $c_0 := \left\{ x \in l_\infty \mid \lim\limits_{k \to \infty} x_k = 0 \right\}$. Довести, що: 1) c_0 – підпростір в l_∞; 2) c_0 з нормою $||x|| = ||x||_\infty = \sup\limits_{i \ge 1} |x_i|$ – сепарабельний банахів простір.

68. Нехай A – множина в ЛНП. Чи вірно, що л.о.($\overline{A}$)=з.л.о.(A)?

69. Довести, що підпростір у ЛНП є опуклою множиною.

70. Довести, що перетин будь-якої сім'ї опуклих множин є опуклою множиною.

71. Нехай функція φ на лінійному просторі X задовольняє перші дві аксіоми норми. Довести, що φ – норма на X тоді й тільки тоді, коли множина $B := \{x \in X \mid \varphi(x) \leq 1\}$ – опукла.

72. Нехай X – ЛНП, $x \in X,\ M \subset X$ – деяка множина. Довести, що $\rho(x, M) = \rho(x, \overline{M}),\ \overline{M}$ – замикання множини M.

73. Довести, що відстань $\rho(x, M) =: \varphi(x)$ є неперервною функцією на ЛНП X, де $M \subset X$ – довільна підмножина.

74*. Знайти відстань у просторі $C([0,1])$ між функцією $x(t) = t^2$ і підпростором P_1 многочленів степеня ≤ 1.

75. Довести, що в будь-якому скінченновимірному ЛНП усі норми еквівалентні.

76. Довести, що в будь-якому скінченновимірному ЛНП будь-яка обмежена замкнена множина є компактною.

77. 1) Довести, що у скінченновимірному ЛНП кожна обмежена послідовність має хоча б одну часткову границю (границю деякої підпослідовності). 2) Навести приклад обмеженої послідовності в l_2, що не має жодної часткової границі.

78. Довести, що в будь-якому ЛНП X досягається відстань від будь-якої фіксованої точки x до будь-якого скінченновимірного підпростору M.

79. Нехай X – ЛНП, $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$ – лінійно незалежні елементи. Довести, що $x_n \notin$ з.л.о.$\{x_1, ..., x_{n-1}\}$.

80. Нехай X – ЛНП, $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$. Довести, що л.о.$\{x_1, ..., x_n\}$ =з.л.о.$\{x_1, ..., x_n\}$.

81. Нехай L_1, L_2 – підпростори у ЛНП X, причому хоч один з цих підпросторів скінченновимірний. Довести, що $L_1 + L_2$ – підпростір.

82. Прямою сумою лінійних нормованих просторів $(X_1, ||\cdot||_{X_1})$ і $(X_2, ||\cdot||_{X_2})$ над полем $\mathbf{K}$ називають декартів добуток $X := X_1 \times X_2$, на якому лінійні операції вводяться таким чином: $\alpha_1(x_1, x_2) + \alpha_2(y_1, y_2) := (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1, \alpha_1 x_2 + \alpha_2 y_2)$, $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \mathbf{K}$, $(x_1, x_2) \in X$, $(y_1, y_2) \in X$. Позначають $X_1 \bigoplus X_2 := X\ x_1 \oplus x_2 := (x_1, x_2)$. Довести, що функції $X \ni x_1 \oplus x_2 \mapsto ||x_1 \oplus x_2||_p := (||x_1||^p_{X_1} + ||x_2||^p_{X_2})^{\frac{1}{p}},\ 1 \leq p < +\infty$, $X \ni x_1 \oplus x_2 \mapsto ||x_1 \oplus x_2||_\infty := \max\{||x_1||_{X_1}, ||x_2||_{X_2}\}$ є нормами на X.

83. Нехай X – ЛНП над полем $\mathbf{K}$. Довести, що підмножина $M \subset X$ обмежена тоді й тільки тоді, коли для кожної послідовності $\{x_n : n \geq 1\} \subset M$ і кожної послідовності $\{\alpha_n : n \geq 1\} \subset \mathbf{K}$ такої, що $\alpha_n \to 0,\ n \to \infty$, послідовність $\alpha_n x_n \to 0,\ n \to \infty$, в X.

84. Нехай X – ЛНП, $M \subset X$ – лінійна множина, $M \neq X$. Довести, що M не має внутрішніх точок.

85. Лінійно незалежна система $\{x_\alpha\ :\ \alpha \in A\}$ елементів лінійного простору X називається *базисом Гамеля*, якщо л.о.$\{x_\alpha\ :\ \alpha\in A\}=X$. Довести, що:

1) у кожному просторі існує базис Гамеля;

2) кожен елемент простору X однозначно зображується у вигляді лінійної комбінації деяких елементів з базису Гамеля простору X;

3)* у нескінченновимірному банаховому просторі не існує зліченного базису Гамеля;

4) у п.3) повнота простору істотна.

86. Довести, що ЛНП несепарабельний тоді й тільки тоді, коли в ньому існує незлічeнна кількість куль деякого фіксованого радіуса $r>0$, що попарно не перетинаються між собою.

87. Нехай X – банахів простір, $\left\{\overline{B}(x_n,r_n)\ :\ n\geq 1\right\}$ – послідовність замкнених вкладених куль, причому $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$. Довести, що $\exists! x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{B}(x_n,r_n)$.

88. Нехай X – ЛНП, в якому будь-яка послідовність куль з попередньої задачі має непорожній перетин. Довести, що X – банахів простір.

89. 1) Навести приклад банахового простору X і послідовності вкладених непорожніх замкнених множин, яка має порожній перетин; 2) Довести, що послідовність замкнених вкладених куль у банаховому просторі має непорожній перетин.

90. Нехай X – банахів простір, $M\subset X$ – лінійна множина. Довести, що поповнення M за нормою простору X збігається із замиканням M.

91. Нехай X – ЛНП. Розглянемо множину $\overline{X}$, яка складається з усіх фундаментальних послідовностей X, тобто $\overline{x}\in\overline{X}$, якщо $\overline{x}=(x_1,x_2,...)$, $\{x_n : n\geq 1\}$ – фундаментальна в X послідовність.

1) Дві послідовності $\overline{x}=\{x_n : n\geq 1\}$ та $\overline{y}=\{y_n : n\geq 1\}$ назвемо еквівалентними ($\overline{x}\sim\overline{y}$), якщо $||x_n-y_n||\to 0,\ n\to\infty$. Довести, що відношення $\overline{x}\sim\overline{y}$ є відношенням еквівалентності.

2) Таким чином, множина $\overline{X}$ розпалася на класи еквівалентних послідовностей. Позначимо множину цих класів $\tilde{X}$. Довести, що в $\tilde{X}$ можна ввести структуру лінійного простору.

3) Покладемо $\forall\tilde{x}\in\tilde{X}\ :\ ||\tilde{x}||_{\tilde{X}} := \lim\limits_{n\to\infty}||x_n||_X$. Довести, що ця формула визначає норму на $\tilde{X}$.

4) Довести, що $(\tilde{X},||\tilde{x}||_{\tilde{X}})$ – повний простір.

5) Довести, що X є скрізь щільним в $\tilde{X}$, якщо елемент $x\in X$ ототожнювати з тим класом еквівалентності $\tilde{x}\in\tilde{X}$, який містить послідовність $(x,x,...)$.

92. Назвемо зліченну множину $M=\{e_1,...,e_n,...\}\subset X$ *базисом Шаудера* в ЛНП X, якщо для кожного $x\in X$ існує єдине зображення $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n,\ \alpha_n\in\mathbf{C},\ n\geq 1.$

1) Довести, що будь-який простір з базисом Шаудера – сепарабельний.

2) Довести, що у просторах $l_p,\ 1 \le p < +\infty; c_0; c$ існує базис Шаудера.

3)* Довести, що послідовність $\left\{x^{(n)}\ :\ n \ge 1\right\} \subset X,\ x^{(n)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^{(n)} e_k,$ $n \ge 1$, збігається до $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ в X тоді й тільки тоді, коли: (i) $\forall k \ge 1\ :\ x_k^{(n)} \to x_k,\ n \to \infty$; (ii) $\sup\limits_{n \ge 1} || \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} x_k^{(n)} e_k|| \to 0,\ N \to \infty.$

4) Вивести з пункту 3) критерій збіжності в $l_p,\ 1 \le p < +\infty.$

93*. Довести, що множина $\{e_n : n \ge 1\}$ є базисом Шаудера в банаховому просторі X тоді й лише тоді, коли

1) з.л.о.$\{e_n : n \ge 1\} = X$;

2) $\exists K > 0\ \forall m > n\ \forall \lambda_1, ..., \lambda_m\ :\ || \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i|| \le K|| \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i e_i||.$

94*. Розглянемо послідовність функцій, визначену таким чином: $h_{2^k+l}(t) = \begin{cases} 1, & \frac{2l-2}{2^{k+1}} \le t < \frac{2l-1}{2^{k+1}}, \\ -1, & \frac{2l-1}{2^{k+1}} \le t < \frac{2l}{2^{k+1}}, \\ 0, & \text{в інших випадках,} \end{cases}$ де $k = 0, 1, 2, ...$ і $1 \le l \le 2^k$, $h_1(t) = 1,\ t \in [0, 1]$. Послідовність $\{h_n : n \ge 1\}$ називають *системою Хаара*. Довести, що:

1) з.л.о.$\{h_n : n \ge 1\} = L_p([0, 1])$ у нормі $L_p([0, 1])$ при кожному $1 \le p < +\infty$;

2) система Хаара є базисом Шаудера у просторах $L_p([0, 1])$, $1 \le p < +\infty$;

3)* $\forall n \ge 1\ \forall \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n+1} \in \mathbf{R}\ :\ || \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k h_k||_p \le || \sum\limits_{k=1}^{n+1} \lambda_k h_k||_p.$

Базис, що задовольняє цю умову, називають *монотонним*.

95*. Нехай $\{h_n : n \ge 1\}$ – система Хаара з попередньої задачі. Розглянемо послідовність функцій $\{s_n : n \ge 1\}$ в $C([0, 1])$, визначену таким чином: $s_1(t) := 1,\ t \in [0, 1]$, і $s_n(t) := \int\limits_0^t h_{n-1}(\tau) d\tau,\ n \ge 2$. Послідовність $\{s_n : n \ge 1\}$ називають *системою Шаудера*. Довести, що система Шаудера є монотонним базисом Шаудера в $C([0, 1])$.

96. Нехай A – сепарабельна множина в лінійному нормованому просторі X. Довести, що з.л.о.(A) є сепарабельним підпростором в X.

97. ЛНП X називається *строго нормованим*, якщо $\forall \{x_1, x_2\} \subset X$, $||x_1|| = ||x_2|| = ||\frac{1}{2}(x_1 + x_2)|| = 1\ :\ x_1 = x_2$ (норма в такому просторі називається *строго опуклою*). Довести, що:

1) X – строго нормований тоді й тільки тоді, коли $\forall \{x_1, x_2\} \subset X$,

$\forall\alpha\in[0,1],\ ||x_1||=||x_2||=||\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)||=1\ :\ x_1=x_2$;

2) X – строго нормований тоді й тільки тоді, коли одинична куля $\overline{B}(0,1)$ – строго опукла множина (якщо A – відкрита множина, то множину $\overline{A}$ називають *строго опуклою*, якщо $\forall x_1,x_2\in\overline{A}\ \forall\alpha\in(0,1)\ :\ \alpha x_1+(1-\alpha)x_2\in A$).

98. При яких $1\le p\le+\infty$ простір $\mathbf{R}^m$ з нормою $||\cdot||_p$ є строго нормованим?

99. Довести, що: 1) гільбертів простір та простори $L_p(T,\mu)$, $1<p<+\infty$, строго нормовані;

2) простори $C([a,b]),\ L_1([a,b]),\ L_\infty([a,b])$ не є строго нормованими.

100*. Довести, що дійсний ЛНП X строго нормований тоді й тільки тоді, коли для довільного підпростору $L\subset X$ і для довільного $x\in X$ існує не більше одного елемента найкращого наближення (тобто якщо елемент найкращого наближення існує, то він єдиний).

Навести в $(\mathbf{R}^2,||\cdot||_1)$ приклади підпростору $L\subset\mathbf{R}^2$ і елемента $x\in\mathbf{R}^2$, для якого:

1) існує єдиний елемент найкращого наближення в L;

2) існують кілька елементів найкращого наближення в L.

101. Лінійний нормований простір X називається *рівномірно опуклим*, якщо $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall\{x_1,x_2\}\subset X,\ ||x_1||=||x_2||=1,$ $||\frac{1}{2}(x_1+x_2)||>1-\delta\ :\ ||x_1-x_2||<\varepsilon$. Довести, що: 1) гільбертів простір рівномірно опуклий; 2) рівномірно опуклий простір є строго нормованим; 3) скінченновимірний строго нормований простір є рівномірно опуклим; 4)* простір $L_p(T,\mathcal{F},\mu),\ 1<p<+\infty$, є рівномірно опуклим.

102*. Нехай X – банахів рівномірно опуклий простір. Довести, що для кожного елемента $x\in X$ у довільному підпросторі $L\subset X$ існує єдиний елемент найкращого наближення.

103. Нехай X – рівномірно опуклий банахів простір, $K\subset X$ – замкнена опукла множина. Довести, що функція $f(x)=||x||$, $x\in X$, досягає свого мінімуму на K рівно один раз.

104*. Нехай $(T,\mathcal{F},\mu)$ – вимірний простір з мірою $\mu,\ \mu(T)<+\infty$. Позначимо через Φ множину всіх тих $n\in\mathbf{N}$, для яких існує розбиття простору $T=\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$, де $A_i\in\mathcal{F},\ \mu(A_i)>0,\ 1\le i\le n,\ A_i\cap A_j=\varnothing,\ i\ne j$. Довести, що для кожного $1\le p<+\infty$ розмірність простору $L_p(T,\mathcal{F},\mu)$ задається формулою $\dim L_p(T,\mathcal{F},\mu)=\sup\Phi$. При цьому $n:=\dim L_p(T,\mathcal{F},\mu)<+\infty\ \Leftrightarrow$ існує розбиття простору T на n атомів, де множина $A\in\mathcal{F}$ називається атомом, якщо $\mu(A)>0$ і $\forall B\in\mathcal{F}$, $B\subset A\ :$ або $\mu(B)=0$ або $\mu(A\backslash B)=0$.

РОЗДІЛ 2
ГІЛЬБЕРТОВІ ПРОСТОРИ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Нехай H – комплексний лінійний простір. Функцію $(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbf{C}$ називають *скалярним добутком*, якщо:

1) $\forall x \in H \ : \ (x,x) \geq 0$, причому $(x,x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0$;

2) $\forall \{x,y,z\} \subset H \ \forall \{\alpha,\beta\} \subset \mathbf{C} \ : \ (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z)$ (лінійність за першим аргументом);

3) $\forall \{x,y\} \subset H \ : \ (x,y) = \overline{(y,x)}$ (ермітовість).

У дійсному лінійному просторі H скалярний добуток – це функція $(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbf{R}$, що задовольняє умови 1),2) ($\{\alpha,\beta\} \subset \mathbf{R}$) і умову $3)'$ $\forall \{x,y\} \subset H \ : \ (x,y) = (y,x)$(симетричність).

Лінійний простір зі скалярним добутком називають *передгільбертовим* простором.

Якщо $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток у комплексному лінійному просторі H, то:

1) $\forall \ \{x,y,z\} \subset H \ \forall \ \{\alpha,\beta\} \subset \mathbf{C} \ : \ (x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha}(x,y) + \bar{\beta}(x,z)$ (антилінійність за другим аргументом).

2) $\forall \ \{x,y\} \ \subset \ H \ \ : \ \ |(x,y)|^2 \ \leq \ (x,x) \cdot (y,y)$ (нерівність Коші–Буняковського).

У передгільбертовому просторі H функція $x \mapsto ||x|| := \sqrt{(x,x)}$ є нормою на H. Якщо простір H є повним відносно збіжності за цією нормою, то H називають *гільбертовим простором*.

Теорема 1 (Про поповнення передгільбертового простору). Для кожного передгільбертового простору H існує гільбертів простір $\tilde{H}$(поповнення H) такий, що $H \ \subset \ \tilde{H}, \ H$ – скрізь щільний у $\tilde{H}$ і $(x,y)_{\tilde{H}} = (x,y)_H, \ \{x,y\} \subset H$.

Елементи $\{x,y\} \subset H$ називають *ортогональними*, якщо $(x,y) = 0$ (позначають $x \perp y$). Елемент $x \in H$ називають ортогональним множині $M \subset H$, якщо $(x,y) = 0$ для всіх $y \in M$ (позначають $x \perp M$). Множини $M \subset H$ і $N \subset H$ називають *ортогональними*, якщо $(x,y) = 0$ для всіх $x \in M$ і всіх $y \in N$ (позначають $M \perp N$).

Ортогональним доповненням $M^{\perp}$ до множини $M \subset H$ називають множину векторів з H, ортогональних до M, тобто $M^{\perp} := \{x \in H \mid \forall y \in M \ : \ (x,y) = 0\}$.

Проекцією вектора $x \in H$ на підпростір M називають вектор $y \in M$ такий, що $(x - y) \perp M$; позначають $y = \mathrm{pr}_M \, x$.

Теорема 2 (Про проекцію на підпростір). Проекція вектора на підпростір завжди існує і єдина.

Теорема 3 (Про розклад гільбертового простору). Нехай M – підпростір гільбертового простору H. Тоді

$$\forall x \in H\ \exists! x' \in M\ \exists! x'' \in M^{\perp}\ :\ x = x' + x''.$$

При цьому

$$x' = \mathrm{pr}_M\, x,\ x'' = \mathrm{pr}_{M^{\perp}}\, x \text{ і } ||x - x'|| = \inf_{y \in M} ||x - y|| =: \rho(x, M).$$

Якщо множини $M \subset H,\ N \subset H$ ортогональні, то їх *ортогональною сумою* називають множину $M \bigoplus N := \{x + y \mid x \in M,\ y \in N\}$. Якщо M і N – ортогональні підпростори в гільбертовому просторі, то $M \bigoplus N$ – підпростір. Якщо M – підпростір гільбертового простору H, то теорема 3 означає, що $H = M \bigoplus M^{\perp}$.

Систему $\{x_\alpha\ :\ \alpha \in A\} \subset H$ називають ортонормованою, якщо $(x_\alpha, x_\beta) = 0,\ \alpha \neq \beta,\ (x_\alpha, x_\alpha) = 1,\ \{\alpha, \beta\} \subset A$. Ортонормовану систему передгільбертового простору H називають ортонормованим базисом в H, якщо її замкнена лінійна оболонка збігається з H.

Теорема 4. У довільному гільбертовому просторі існує ортонормований базис, причому в сепарабельному гільбертовому просторі такий базис не більш ніж зліченний.

Теорема 5. Нехай $\{e_n\ :\ n \geq 1\}$– зліченна ортонормована система в гільбертовому просторі H. Тоді:

1) для збіжності в H ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n (c_n \in \mathbf{K})$ необхідно і достатньо, щоб збігався числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$;

2) для кожного $x \in H$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$ збігається в H, причому $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \leq ||x||^2$ (нерівність Бесселя);

3) якщо L_n =л.о.$\{e_1, ..., e_n\},\ n \geq 1$, то $\mathrm{pr}_{L_n}\, x = \sum\limits_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k$, $||x - \mathrm{pr}_{L_n}\, x||^2 = ||x||^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2$.

Якщо $\{e_n\ :\ n \geq 1\}$ – зліченна ортонормована система H, то числа $(x, e_n),\ n \geq 1$, називають *коефіцієнтами Фур'є* елемента $x \in H$ за системою $\{e_n\ :\ n \geq 1\}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$ – рядом Фур'є елемента $x \in H$ за системою $\{e_n\ :\ n \geq 1\}$.

Ортонормовану систему $\{e_n\ :\ n \geq 1\}$ називають *повною*, якщо для кожного $x \in H$ з виконання рівності $(x, e_n) = 0$ при всіх $n \geq 1$ випливає, що $x = 0$.

Теорема 6. Нехай $\{e_n : n \geq 1\}$ – ортонормована послідовність у гільбертовому просторі H. Тоді наступні умови рівносильні:

1) $\{e_n : n \geq 1\}$ – ортонормований базис;

2) $\forall x \in H \ : \ x = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$;

3) $\forall x \in H \ : \ ||x||^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}|(x, e_n)|^2$ (рівність Парсеваля);

4) $\{e_n : n \geq 1\}$ – повна система.

Приклади гільбертових просторів.

1. l_2 зі скалярним добутком $(x, y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y^n}$. Цей простір має базис $\{e_n : n \geq 1\}$.

2. $L_2(T, \mu)$ зі скалярним добутком $(x, y) = \int\limits_T x(t)\overline{y(t)}d\mu$. Цей простір має базис $\left\{e^{int} \ : \ n \in \mathbf{Z}\right\}$.

Зауваження. При $1 \leq p \leq +\infty, \ p \neq 2$, простір l_p не є гільбертовим, а простір $L_p(T, \mu)$ гільбертів лише якщо він є одновимірним.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

1. Довести, що скалярний добуток у гільбертовому просторі є неперервною функцією за кожним з аргументів.

Р о з в ' я з о к. Розглянемо при фіксованому $x \in H$ функцію $f_x(y) := (x, y), \ y \in H$. Тоді з нерівності Коші–Буняковського випливає, що $\forall y, z \in H \ : \ |f_x(y) - f_x(z)| = |(x, y - z)| \leq ||x|| \cdot ||y - z||$, отже маємо рівномірну неперервність на H функції f_x. Неперервність за другим аргументом доводиться аналогічно.

2. Нехай L і M – підпростори в гільбертовому просторі H, причому $L \perp M$.

1) Довести, що для всіх $x \in L \bigoplus M$ зображення $x = x' + x''$, $x' \in L, \ x'' \in M$ єдине.

2) Нехай $H = L \bigoplus M$. Довести, що $M^{\perp} = L$. (Зокрема, справджується твердження, обернене до теореми 3).

Р о з в ' я з о к. 1) Припустимо, що $x = x' + x'' = y' + y''$, $x', y' \in L, \ x'', y'' \in M$. Тоді $x'' - y'' = y' - x' \in L \cap M$. Звідси $x' = y', x'' = y''$ (бо $||x' - y'||^2 = (x' - y', y'' - x'') = 0$).

2) Оскільки $L \perp M$, то $L \subset M^{\perp}$. Доведемо включення в інший бік. Нехай $x \in M^{\perp}$. Згідно з умовою, $x = x' + x'', \ x' \in M, \ x'' \in L$. Звідси випливає, що $0 = (x, x') = (x', x') + (x'', x') = ||x'||^2$. Тобто, $x' = 0$ і $x = x'' \in L$. Отже, $M^{\perp} \subset L$.

3. Знайти ортогональне доповнення в $L_2([-1, 1])$ до множини усіх парних функцій. *Примітка.* Функція $x \in L_2([-1, 1])$ називається парною, якщо $x(t) = x(-t)$ для майже всіх $t \in [-1,1]$. Аналогічно вводиться поняття непарної функції.

Р о з в ' я з о к. Нехай M – множина парних функцій з $L_2([-1,1])$, L – множина непарних функцій. Легко бачити, що M і L – підпростори (це випливає з того, що для довільної послідовності, що збігається в $L_2([-1,1])$, існує підпослідовність, що збігається майже скрізь). Ясно, що $M \perp L$ (добуток парної і непарної функції – функція непарна). Далі, $\forall x \in H$ $\exists x' \in M$ $\exists x'' \in L$: $x = x' + x''$. Дійсно, досить покласти $x'(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$, $x''(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$. Тому, згідно із задачею 2.2, $M^{\perp} = L$, тобто шуканим доповненням є множина всіх непарних функцій.

4. Нехай множина L є скрізь щільною в гільбертовому просторі H. Тоді $L^{\perp} = \{0\}$.

Р о з в ' я з о к. Нехай $x \perp L$. Тоді внаслідок щільності L існує послідовність $\{x_n : n \geq 1\} \subset L$ така, що $x_n \to x$ в H. Тоді, згідно з задачею 1, $0 = (x_n, x) \to (x, x)$, $n \to \infty$. Отже, $(x,x) = ||x||^2 = 0$, тобто $x = 0$.

5. Знайти ортогональне доповнення до множини $M = \left\{e^{kt} \mid k \geq 10\right\}$ в $L_2([0,1])$.

Р о з в ' я з о к. Нехай $x \perp M$, тобто $\forall k \geq 10$: $\int\limits_0^1 x(t)e^{kt}\,dt = 0$. Звідси випливає, що функція $y(t) := x(t)e^{10t}$ ортогональна до множини $M_0 := \left\{e^{kt} \mid k \geq 0\right\}$. Внаслідок теореми Стоуна-Вейєрштраса л.о.(M) щільна в $C([0,1])$. Крім того, згідно із задачею 53, $C([0,1])$ скрізь щільна в $L_2([0,1])$ і, отже, л.о.(M) щільна в $L_2([0,1])$. Згідно із задачею 4, $M_0^{\perp} = \{0\}$. Звідси випливає, що $x = 0$ майже скрізь відносно міри Лебега. Тобто $M^{\perp} = \{0\}$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

6. Нехай на X – комплексний банахів простір і задано функцію $S : X \times X \to \mathbf{R}$, що задовольняє властивості:

1) $S(x,x) \geq 0$; $S(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2) $S(x,y) = \overline{S(y,x)}$;

3) $\forall x_1, x_2, y \in X$: $S(x_1 + x_2, y) = S(x_1, y) + S(x_2, y)$;

4) $\forall \{x_n : n \geq 1\} \subset X$, $y \in X$, $x_n \to x$, $n \to \infty$: $S(x_n, y) \to S(x,y)$, $n \to \infty$.

Довести, що $S(x,y)$ – скалярний добуток у просторі X. Чи обов'язково X із цим скалярним добутком буде гільбертовим простором?

7. Нехай $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...)$, $\forall k \geq 1$: $\alpha_k > 0$: $l_{2,\alpha}$ – множина всіх числових послідовностей $x = (x_1, x_2, ...)$, які задовольняють умову $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k |x_k|^2 < \infty$. Перевірити, що $l_{2,\alpha}$ зі скалярним добутком $(x,y) =$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \overline{y_k},\ \{x,y\} \subset l_{2,\alpha}$, є гільбертовим простором.

Побудувати ортонормований базис у просторі $l_{2,\alpha}$, якщо $\forall k \geq 1$: 1) $\alpha_k = k$; 2) $\alpha_k = k^2$; 3) $\alpha_k = e^{-k}$.

8. З'ясувати, для яких $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...),\ \forall k \geq 1\ :\ \alpha_k > 0\ :\ l_{2,\alpha} \subset l_2$.

9. Нехай H – гільбертів простір, $||\cdot||$ – норма в H, породжена скалярним добутком. Перевірити, що

$$\forall \{x,y\} \subset H\ :\ ||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$$

(*рівність паралелограма*).

Довести, що в банаховому просторі $C([0,1])$ норма не породжується скалярним добутком.

10. Довести, що в лінійних нормованих просторах $c_0,\ l_p,\ L_p([a,b])$, $p \neq 2$, норма не породжується скалярним добутком.

11. Довести, що в гільбертовому просторі для довільних x, y, z виконується тотожність Аполонія:

$$||x-z||^2 + ||y-z||^2 = \tfrac{1}{2}||x-y||^2 + 2||z - \tfrac{x+y}{2}||^2.$$

12. Довести, що в гільбертовому просторі для довільних x, y, z, u виконується нерівність Птолемея:

$$||x-z|| \cdot ||y-u|| \leq ||x-y|| \cdot ||z-u|| + ||y-z|| \cdot ||x-u||.$$

13. Довести, що в гільбертовому просторі над числовим полем $\mathbf{K}$ елементи x і y ортогональні тоді й тільки тоді, коли:

1) $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ при $\mathbf{K} = \mathbf{R}$;

2) $||\lambda x + \mu y||^2 = ||\lambda x||^2 + ||\mu y||^2$ для довільних $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ при $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

14. Довести, що у комплексному гільбертовому просторі виконується *поляризаційна тотожність*:

$$(x,y) = \tfrac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2 + i||x+iy||^2 - i||x-iy||^2\right).$$

Який вона має вигляд у дійсному гільбертовому просторі?

15*. Довести, що в нормованому просторі X можна ввести скалярний добуток $(\cdot,\cdot)$, для якого $||x||^2 = (x,x),\ x \in X$, тоді й тільки тоді, коли для всіх $\{x,y\} \subset X$ виконується рівність паралелограма (задача 9).

16. Нехай p – вимірна за Лебегом функція на (a,b) така, що $p(t) > 0$ для майже всіх $t \in (a,b)$, і $L_{2,p}([a,b]) = \left\{x \mid p^{\frac{1}{2}}x \in L_2([a,b])\right\}$. Довести, що $L_{2,p}([a,b])$ є гільбертовим простором зі скалярним добутком: $(x,y) = \int\limits_a^b x(t)\overline{y(t)}p(t)dt$. Для яких p справджується включення $L_{2,p}([a,b]) \subset L_2([a,b])$?

17. Нехай $\{x_k \ : \ k \geq 1\}$ – ортогональна система в гільбертовому просторі H. Довести, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ збігається в H тоді й лише тоді, коли $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ||x_k||^2 < \infty$.

18. Довести, що скінченна система $\{x_1, ..., x_n\}$ елементів гільбертового простору лінійно незалежна тоді й лише тоді, коли її визначник Грама

$$\begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \dots & (x_1, x_n) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \dots & (x_2, x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_n, x_1) & (x_n, x_2) & \cdots & (x_n, x_n) \end{vmatrix}$$

відмінний від нуля.

19. Нехай H – гільбертів простір і $\{x_n : n \geq 1\} \subset H, \{y_n : n \geq 1\} \subset H$, $||x_n|| = 1, \ ||y_n|| = 1, \ n \geq 1$. Довести правильність таких тверджень:

1) $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \ \Rightarrow \ ||x_n - y_n|| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;

2) $||x_n + y_n|| \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 \ \Rightarrow \ ||x_n - y_n|| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

20. Довести, що елемент x гільбертового простору H ортогональний підпростору L тоді й лише тоді, коли $\forall y \in L \ : \ ||x|| \leq ||x - y||$.

21. Довести, що для довільного $M \subset H$ ортогональне доповнення $M^{\perp}$ є підпростором.

22. Нехай $M \subset N \subset H$. Довести, що $M^{\perp} \supset N^{\perp}$.

23. 1) Довести, що для довільного $M \subset H$ має місце $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$.

2) Рівність $M = (M^{\perp})^{\perp}$ має місце тоді й лише тоді, коли M – підпростір.

24. Нехай H – гільбертів простір, $\{M_{\alpha} \mid \alpha \in A\}$ – деякий набір підмножин H. Довести, що:

1) $M_{\alpha}^{\perp} = (\text{л.о.}(M_{\alpha}))^{\perp} = (\text{з.л.о.}(M_{\alpha}))^{\perp}, \ \alpha \in A$;

2) $(\bigcup\limits_{\alpha\in A} M_{\alpha})^{\perp} = \bigcap\limits_{\alpha\in A} M_{\alpha}^{\perp}$;

3) $(\bigcap\limits_{\alpha\in A} M_{\alpha})^{\perp} = \text{з.л.о.}(\bigcup\limits_{\alpha\in A} M_{\alpha}^{\perp})$.

25. Нехай $L = \{x \in L_2(\mathbf{R}) \mid x(t) = 0, \ t \geq 0 \ (\mathrm{mod}\, m)\}$. Довести, що L підпростір та знайти ортогональне доповнення до L

26. Нехай $L \subset H$. Довести, що з.л.о.$(L) = H$ тоді й лише тоді, коли $L^{\perp} = \{0\}$.

27. Знайти в $L_2([0,1])$ ортогональне доповнення до множини:

1) $C([0,1])$;

2) $P([0,1])$ усіх многочленів, що розглядаються на $[0,1]$;

3) $\{x \mid x(t) = y(t^2), \ t \in [0,1], \ y \in P([0,1])\}$;

4) $\{x \in P([0,1]) \mid x(0) = 0\}$;

5) $\{x \mid x(t) = y(e^t), \ t \in [0,1], \ y \in P([1,e])\}$;

6) $\{x(t) = t^k,\ t \in [0,1] \mid k \geq 10\}$;

7) $\{x(t) = t^{3k},\ t \in [0,1] \mid k \geq 1\}$.

28. Знайти в $L_2([-1,1])$ ортогональне доповнення до множини:

1) $\{x(t) = t^k,\ t \in [-1,1] \mid k \geq 13\}$;

2) $\{x(t) = t^{2k},\ t \in [-1,1] \mid k \geq 0\}$;

3) $\{x(t) = t^{2k+1},\ t \in [-1,1] \mid k \geq 0\}$;

4) $\{x(t) = t^{2k},\ t \in [-1,1] \mid k \geq 7\}$.

29. Знайти в $L_2([-\pi,\pi])$ ортогональне доповнення до множин:

1) $\{\sin kt \mid k \geq 1\}$;

2) $\{\cos kt \mid k \geq 1\}$;

3) $\{e^{ikt} \mid k \geq 5\}$;

4) $\{e^{-ikt} \mid k \geq 3\}$.

30. Знайти в l_2 ортогональне доповнення до множин:

1) $\{(1,1,0,...)\}$;

2) $\{e_k,\ 1 \leq k \leq n\},\ n \in \mathbf{N}$ $(e_k = (0,...,0,\underbrace{1}_{k},0,...))$;

3) $\{e_{2k} \mid k \in \mathbf{N}\}$.

31. Довести, що функція $(x,y) = \int\limits_a^b x(t)\overline{y(t)}dt + \int\limits_a^b x'(t)\overline{y'(t)}dt$, $\{x,y\} \subset C^1([a,b])$, визначає скалярний добуток у лінійному просторі $C^1([a,b])$. Поповнення $W_2^1([a,b])$ простору $C^1([a,b])$ за нормою, породженою цим скалярним добутком, є гільбертовим простором, який називається соболєвським.

32. Знайти ортогональне доповнення до множини $\{e^{ikt} \mid k \in \mathbf{Z}\}$ у просторі $W_2^1([-\pi,\pi])$.

33. Розглянемо простір $H := \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid \{x \in \mathbf{R} \mid f(x) \neq 0\}$ – не більш ніж зліченна множина, $\sum\limits_{x \in \mathbf{R}} |f(x)|^2 < +\infty\}$. Довести, що H – несепарабельний гільбертів простір зі скалярним добутком $(f,g) = \sum\limits_{x \in \mathbf{R}} f(x)g(x),\ f,g \in H$.

34. Довести, що система функцій $\{e^{-int} \mid n \in \mathbf{Z}\}$ повна в $L_2([a,b])$ тоді й тільки тоді, коли $b - a \leq 2\pi$.

35. Нехай D – замкнений одиничний круг комплексної площини, $A^2(D)$ – множина тих функцій з $L_2(D)$, які аналітичні всередині D. Довести, що $A^2(D)$ є поповненням за нормою $L_2(D)$ множини $P(D)$ усіх многочленів, визначених на D.

36. До послідовності $\{z^n : n \geq 0\}$, $z = t + is$, застосувати процес ортогоналізації відносно до такого скалярного добутку на множині всіх многочленів $P(\mathbf{C})$:

$$(x,y)=\int\limits_{\mathbf{C}} x(z)\overline{y(z)}e^{-|z|^2}dt\,ds,\ \{x,y\}\subset P(\mathbf{C}).$$

Описати поповнення множини $P(\mathbf{C})$. Чи входить у це поповнення функція $e^{-|z|},\ z\in\mathbf{C}$?

37. Нехай L – лінійна оболонка множини $\left\{e^{i\lambda t}\mid\lambda\in\mathbf{R}\right\}$, в якій визначений скалярний добуток $(x,y)=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}x(t)\overline{y(t)}dt,\ \{x,y\}\subset L.$ Довести, що:

1) $(e^{i\lambda t},e^{i\mu t})=\delta_{\lambda\mu}=\begin{cases}1, & \lambda=\mu,\\ 0, & \lambda\neq\mu,\end{cases}\quad\{\lambda,\mu\}\subset\mathbf{R};$

2) поповнення множини L несепарабельне.

38. Довести, що система функцій Хаара $\{x_{kn}\mid 1\le k\le 2^n,\ n\ge 0\}\cup\{x_0\}$, де $x_{kn}(t)=\begin{cases}2^{\frac{n}{2}}, & t\in[\frac{k-1}{2^n},\frac{k-\frac12}{2^n}),\\ -2^{\frac{n}{2}}, & t\in[\frac{k-\frac12}{2^n},\frac{k}{2^n}),\\ 0, & t\in[0,1]\setminus[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}],\end{cases}\quad x_0(t)=1,\ t\in[0,1]$, є ортонормованим базисом у просторі $L_2([0,1])$.

39. Перевірити ортогональність у H таких систем:

1) $x_n(t)=\begin{cases}(-1)^m, & t\in[\frac{m}{2^n},\frac{m+1}{2^n}),\ m=0,1,...,2^n-1,\\ -1, & t=1;\end{cases}$
$n\ge 1,$ – функції Радемахера, $H=L_2([0,1]);$

2) $P_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n,\ n\ge 0$ – многочлени Лежандра, $H=L_2([-1,1]);$

3) $H_n(t)=e^{\frac{t^2}{2}}\frac{d^n}{dt^n}e^{-t^2},\ n\ge 0$ – функції Ерміта, $H=L_2(\mathbf{R});$

4) $x_n(t)=\frac{d^n}{dt^n}[(t-a)(t-b)]^n,\ n\ge 0,\ H=L_2([a,b]);$

5) $x_n(t)=e^{\frac{t}{2}}\frac{d^n}{dt^n}(t^ne^{-t}),\ n\ge 0,$ – функції Лагерра, $H=L_2([0,+\infty)).$

40. Довести, що

1) функції у п. 39.2 утворюють ортонормований базис в $L_2([-1,1]);$

2) функції у п. 39.4 утворюють ортонормований базис в $L_2([a,b]);$

3)* функції у п. 39.5 утворюють ортонормований базис в $L_2([0,+\infty));$

4)* функції у п. 39.3 утворюють ортонормований базис в $L_2(\mathbf{R});$

5) функції у п. 39.1 не утворюють ортонормований базис в $L_2([0,1]).$

У п. 5 перевірити, що функція $x(t)=x_1(t)x_2(t)$ ортогональна до всіх x_n.

41. У просторі $L_2(\mathbf{R})$ розглянемо множину $M=\left\{x\in C_0(\mathbf{R})\mid\int\limits_{-\infty}^{\infty}x(t)dt=0\right\}$. Довести, що M – щільна в $L_2(\mathbf{R})$.

42. У просторі l_2 знайти ортогональне доповнення до множини
1) $\left\{x = \left\{\alpha^k \,:\, k \ge 0\right\} \mid \alpha \in [0,1]\right\}$;
2) $\left\{x = \left\{\frac{1}{n^k} \,:\, k \ge 0\right\} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$.

43. Нехай $M \subset H$, де H – гільбертів простір. Чи завжди вірна формула $H = M \bigoplus M^{\perp}$?

44*. Побудувати в передгільбертовому просторі H усіх неперервних на $[-1,1]$ функцій зі скалярним добутком $(x,y) = \int\limits_{-1}^{1} x(t)\overline{y(t)}dt$ зліченну систему функцій M таку, що $M^{\perp} = \{0\}$, але лінійна оболонка M не щільна в H.

45*. Довести, що сепарабельний простір зі скалярним добутком повний тоді й тільки тоді, коли в ньому кожна повна ортонормована система є базисом.

46. Довести, що в гільбертовому просторі є лінійні скрізь щільні підмножини, які не збігаються з усім простором, тоді й лише тоді, коли простір нескінченновимірний.

47. Нехай $\{e_n \,:\, n \ge 1\}$ – послідовність елементів гільбертового простору H така, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n = 0$ для деякої послідовності $\{c_n \,:\, n \ge 1\} \subset \mathbf{K}$. Чи правильно, що $c_n = 0,\ n \ge 1$, якщо: 1) $\{e_n \,:\, n \ge 1\}$ – ортогональна система? 2) $\{e_n \,:\, n \ge 1\}$ – лінійно незалежна система?

48. Нехай H – гільбертів простір, $\{x,y\} \subset H$, $||x|| = ||y|| = 1$, $\{a,b\} \subset \mathbf{R}$. Довести, що $||ax+by|| = ||bx+ay||$.

49. Нехай H – гільбертів простір над полем $\mathbf{K}$, $\{e_n \,:\, n \ge 1\} \subset H$ – ортонормована система і $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, де $x_n \in \mathbf{K},\ n \ge 1$. Довести, що $x_n = (x, e_n),\ n \ge 1$.

50. Довести, що система $\{t^n,\ t \in [0,1] \,:\, n \ge 0\}$ – лінійно незалежна, а її замкнена лінійна оболонка дорівнює $L_2([0,1])$, але не для всіх $x \in L_2([0,1])$ існують коефіцієнти $\{c_n \,:\, n \ge 0\}$ такі, що $x(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ в $L_2([0,1])$ (збіжність розуміти, як збіжність в $L_2([0,1])$.) Чи не суперечить це твердження теоремі 6? Чому?

51. Нехай $\{\varphi_n \,:\, n \ge 1\}$ – повна ортонормована система в $L_2(X_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$, $\{\psi_n \,:\, n \ge 1\}$ – повна ортонормована система в $L_2(X_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$, причому $\mu_i - \sigma$-скінченні міри на $\mathcal{F}_i,\ i = 1, 2$. Довести, що $e_n(x,y) := \varphi_n(x)\psi_n(y)$, $(x,y) \in X := X_1 \times X_2$, – повна ортонормована система в $L_2(X, \mathcal{F}, \mu)$, де $\mu = \mu_1 \times \mu_2,\ \mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$.

52. Нехай M – замкнена опукла множина в гільбертовому просторі H. Довести, що в M існує єдиний елемент з найменшою нормою. Довести, що умова опуклості істотна.

53. Нехай H – гільбертів простір, $x_0 \in H,\ r > 0$. Для $x \in H \backslash S(x_0, r)$ знайти $y \in S(x_0, r)$ такий, що $\rho(x, S(x_0, r)) = ||x - y||$.

54*. Нехай $M \subset H$ – замкнена опукла множина в дійсному гільбертовому просторі H. Довести, що $y \in M$ такий, що $\rho(x, M) = ||x - y||$ тоді й тільки тоді, коли $(x - y, y - z) \geq 0$ для всіх $z \in M$.

55. Нехай L – одновимірний підпростір у гільбертовому просторі H, $a \in L,\ a \neq \overline{0}$. Довести, що $\forall x \in H\ :\ \rho(x, L^{\perp}) = \frac{|(x,a)|}{||a||}$.

56. Нехай M і N – підмножини гільбертового простору H. Довести, що $(M \cap N)^{\perp} = \overline{M^{\perp} + N^{\perp}}$.

57. Для множини $M_n = \left\{ x \in l_2 \,|\, \sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 0 \right\},\ n \in \mathbf{N}$, знайти $M_n^{\perp},\ \rho(x_0, M_n)$ і $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(x_0, M_n)$, де $x_0 = (1, 0, ...)$.

58. Нехай M, N – підпростори гільбертового простору H і $\forall x \in H$ $\exists! x_1 \in M\ \exists! x_2 \in N\ :\ x = x_1 + x_2$. Чи правильно, що $N = M^{\perp}$?

59. Нехай $N := \{(x_1, 0, x_3, 0, ...) \,|\, x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in l_2\},\ M = \left\{(x_1, x_1, x_3, \frac{x_3}{3}, x_5, \frac{x_5}{5}, ...) \,|\, x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in l_2\right\}$. Довести, що M і N – підпростори в $l_2,\ M + N$ – скрізь щільна в $l_2,\ M + N \neq l_2$ (тобто $M + N$ не є підпростором в l_2).

60. Нехай $\{e_n : n \geq 1\}$ – ортонормований базис в $H,\ x_k = cos\frac{1}{k} \cdot e_{2k} + \sin\frac{1}{k} \cdot e_{2k+1}$. Довести, що $\{x_n : n \geq 1\}$ – ортонормована система. Покладемо L :=з.л.о.$\{e_{2k} : k \geq 1\}$, M :=з.л.о.$\{x_n : n \geq 1\}$. Довести, що лінійна множина $L + M$ не замкнена.

61. Нехай M і N – підпростори в гільбертовому просторі H. Довести, що $M + N$ – підпростір в H, якщо виконується одна з умов: 1) $M \perp N$; 2)* $\exists \varepsilon > 0\ :\ \sup\{|(x, y)| \,|\, ||x|| = ||y|| = 1,\ x \in M,\ y \in N\} < 1 - \varepsilon$.

62. Нехай $\{x_n : n \geq 1\}$, $\{y_n : n \geq 1\}$ – ортонормовані системи в $L_2([a, b])$ і $L_2([b, c])$ відповідно, $\lambda > 0,\ \mu > 0,\ \lambda^2 + \mu^2 = 1$. Покладемо $z_n(t) = \begin{cases} \lambda x_n(t), & a \leq t \leq b, \\ \mu y_n(t), & b \leq t \leq c. \end{cases}$ Довести, що $\{z_n : n \geq 1\}$ – ортонормована система в $L_2([a, c])$. Чи обов'язково $\{z_n : n \geq 1\}$ є ортонормованим базисом в $L_2([a, c])$, якщо $\{x_n : n \geq 1\}$, $\{y_n : n \geq 1\}$ утворюють ортонормовані базиси в $L_2([a, b])$ і $L_2([b, c])$ відповідно?

63. Нехай $\{x_n : n \geq 1\}$ – довільна злічення система функцій з $L_2([a.b])$, $c > b$. Довести, що функції x_n можна так продовжити на відрізок $[b, c]$, щоб отримати ортогональну систему на $L_2([a, c])$.

64. Показати, що функції $x_{np}(t) = \sqrt{2}\chi_{[p-1,p]}(t) \sin \pi n t,\ n \in \mathbf{N}$, $p \in \mathbf{N}$, утворюють ортонормований базис в $L_2([0, +\infty))$, а при $n \in \mathbf{N}$, $p \in \mathbf{Z}$ – ортонормований базис в $L_2(\mathbf{R})$.

РОЗДІЛ 3
ЛІНІЙНІ НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІОНАЛИ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Нехай X – ЛНП над числовим полем $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ або $\mathbf{K} = \mathbf{C}$). Відображення $f : X \to \mathbf{K}$ називають функціоналом. Функціонал f називають *неперервним*, якщо відображення $f : X \to \mathbf{K}$ неперервне на X, тобто $\forall x_0 \in X \ \forall \{x_n : n \geq 1\} \subset X, \ x_n \to x_0, \ n \to \infty \ : \ f(x_n) \to f(x_0),$ $n \to \infty$. Функціонал f називають *лінійним*, якщо $\forall \{x, y\} \subset X$ $\forall \{\alpha, \beta\} \subset \mathbf{K} \ : \ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$. Лінійний функціонал f називають *обмеженим*, якщо $\exists C > 0 \ \forall x \in X \ : \ |f(x)| \leq C||x||$.

Зауважимо, що для кожного лінійного функціонала f справджується рівність $f(0) = 0$.

Теорема 1. Нехай f – лінійний функціонал на X. Тоді наступні твердження рівносильні:

1) f неперервний на X;

2) f неперервний в одній точці;

3) f обмежений.

Множину всіх лінійних неперервних функціоналів на ЛНП X позначають через X^*. Множина X^* природно наділяється структурою лінійного простору: $\forall f, g \in X^* \ \forall \alpha, \beta \in \mathbf{K} \ : \ (\alpha f + \beta g)(x) := \alpha f(x) + \beta g(x), \ x \in X;$ $\alpha f + \beta g$ також є лінійним неперервним функціоналом (див. задачу 6).

Нормою функціонала $f \in X^*$ називають число $||f|| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{||x||}$.

З означення норми функціонала легко випливає

Лема 1. Нехай $f \in X^*$. Тоді $||f|| = \sup\limits_{||x||=1} |f(x)| = \sup\limits_{||x|| \leq 1} |f(x)| =$ $\min \{C \geq 0 \,|\, \forall x \in X \ : \ |f(x)| \leq C||x||\}$.

Зокрема, з оцінки $|f(x)| \leq C||x||, \ x \in X$, випливає, що $||f|| \leq C$.

Теорема 2. 1) Норма функціонала задовольняє аксіоми норми на X^*, тобто X^* – ЛНП; 2) X^* – банахів простір.

Множину $\mathrm{Ker}\, f := \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ називають *ядром* функціонала f.

Опишемо загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів у класичних ЛНП і наведемо опис їх спряжених.

1. Спряженим індексом до числа $p \in (1, +\infty)$ називають число $q \in (1, +\infty)$ таке, що $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Для $p = 1$ покладемо $q := +\infty$, а для $p = +\infty$ нехай $q := 1$. Надалі скрізь q – спряжений індекс до p.

Теорема 3. Нехай $(T, \mathcal{F}, \mu)$ – простір із σ-скінченною мірою, $1 \leq p < +\infty$. Тоді для довільного функціонала $f \in (L_p(T, \mathcal{F}, \mu))^*$ існує єдиний елемент $h \in L_q(T, \mathcal{F}, \mu)$ такий, що $f(x) = \int\limits_T h(t)x(t)d\mu(t)$,

$x \in L_p(T, \mathcal{F}, \mu)$. Навпаки, для довільного елемента $h \in L_q(T, \mathcal{F}, \mu)$ остання формула визначає функціонал $f \in (L_p(T, \mathcal{F}, \mu))^*$. При цьому $||f|| = ||h||_q$.

Відображення $\varphi : (L_p(T, \mathcal{F}, \mu))^* \to L_q(T, \mathcal{F}, \mu)$, яке кожному функціоналу ставить у відповідність елемент $h \in L_q(T, \mathcal{F}, \mu)$ з теореми 3, є ізометричним ізоморфізмом, тобто лінійною бієкцією, що зберігає норму (див. задачу 13). Існування ізометричного ізоморфізму між $(L_p(T, \mathcal{F}, \mu))^*$ і $L_q(T, \mathcal{F}, \mu)$ записують у вигляді рівності $(L_p(T, \mathcal{F}, \mu))^* = L_q(T, \mathcal{F}, \mu)$, $1 \le p < +\infty$.

Поклавши $T := \mathbf{N}$ (або $T := \{1, ..., m\},\ m \in \mathbf{N}$), $\mathcal{F} := 2^T$, $\mu(\{n\}) := 1,\ n \in T$, отримаємо такі наслідки.

Наслідок 1. Нехай $1 \le p < +\infty$. Тоді $l_p^* = l_q$, причому ізометричний ізоморфізм $\varphi : l_p^* \to l_q$ задається формулою $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, $x \in l_p,\ a = \varphi(f) \in l_q$. При цьому $||f|| = ||a||_q$.

Позначимо через $\mathbf{R}_p^m(\mathbf{C}_p^m)$ простір $\mathbf{R}^m(\mathbf{C}^m)$ з нормою $|| \cdot ||_p$.

Наслідок 2. Нехай $1 \le p \le +\infty$. Тоді $(\mathbf{R}_p^m)^* = \mathbf{R}_q^m$, причому ізометричний ізоморфізм $\varphi : (\mathbf{R}_p^m)^* \to \mathbf{R}_q^m$ задається формулою $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{m} a_n x_n,\ x \in \mathbf{R}_p^m,\ a = \varphi(f) \in \mathbf{R}_q^m$. При цьому $||f|| = ||a||_q$.

Аналогічно $(\mathbf{C}_p^m)^* = \mathbf{C}_q^m$.

Зауважимо, що при $p = +\infty\ :\ (L_\infty(T, \mathcal{F}, \mu))^* \ne L_1(T, \mathcal{F}, \mu)$, якщо міра μ не зосереджена у скінченному числі точок; при цьому має місце строге включення $L_1(T, \mathcal{F}, \mu) \subset (L_\infty(T, \mathcal{F}, \mu))^*$, зокрема, $l_1 \subset l_\infty^*$.

2. Позначимо через $BV_0([a, b])$ банахів простір функцій обмеженої варіації $g : [a, b] \to \mathbf{R}$, неперервних справа на (a, b) і таких, що $g(a) = 0$, з нормою $||g||_V := V(g, [a, b])$, де $V(g, [a, b])$ – варіація функції g на відрізку $[a, b]$.

Теорема 4 (Ф. Рісса). Для довільного функціонала $f \in (C([a, b]))^*$ існує єдина функція $g \in BV_0([a, b])$ така, що $f(x) = \int\limits_a^b x(t) dg(t)$, $x \in C([a, b])$. Навпаки, для довільної функції $g \in BV_0([a, b])$ остання формула визначає функціонал $f \in (C([a, b]))^*$. При цьому $||f|| = ||g||_V$. Таким чином, $(C([a, b]))^* = BV_0([a, b])$.

Інтеграл у теоремі 4 є інтегралом Рімана–Стілтьєса. Зауважимо, що для довільної функції $g : [a, b] \to \mathbf{R}$, яка має обмежену варіацію на $[a, b]$, формула в теоремі 4 визначає лінійний неперервний функціонал на $C([a, b])$, але при цьому може не бути рівності $||f|| = V(g, [a, b])$ (наприклад, якщо в точці розриву $t_0 \in (a, b)$ функції g її значення $g(t_0)$ не лежить на відрізку з кінцями $g(t_0-)$ і $g(t_0+)$). Також немає взаємно однозначної відповідності між функціями обмеженої варіації на $[a, b]$ та лінійними неперервними функціоналами на $C([a,b])$ (дійсно, якщо замінити g на $g+\mathrm{const}$ або змінити значення функції g на скінченній підмножині (a,b), то функціонал, визначений у теоремі 4, не зміниться).

Теорема 5 (Ф. Рісса). Нехай H – гільбертів простір. Тоді для довільного функціонала $f \in H^*$ існує єдиний елемент $a \in H$ такий, що $f(x) = (x,a),\ x \in H$. Навпаки, для довільного елемента $a \in H$ ця формула визначає функціонал $f \in H^*$. При цьому $||f|| = ||a||$. Таким чином, $H^* = H$.

Зауважимо, що у випадку комплексного гільбертового простору ізометричний ізоморфізм φ між H^* і H, встановлений цією теоремою (який кожному функціоналу $f \in H^*$ ставить у відповідність елемент $a \in H$), є антилінійним, тобто $\forall f,g \in H^*\ \forall \alpha,\beta \in \mathbf{C}\ :\ \varphi(\alpha f+\beta g) = \overline{\alpha}\varphi(f)+\overline{\beta}\varphi(g)$ (див. задачу 16).

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

1. З'ясувати, чи є наведені функціонали лінійними, неперервними. Для лінійних неперервних функціоналів знайти норми за означенням:

1) $X = C([a,b]),\ f(x) = x(\frac{a+b}{2})$;
2) $X = C([a,b]),\ f(x) = x(a) - x(b)$;
3) $X = C([-1,1]),\ f(x) = \int\limits_{-1}^{1} x(t)\operatorname{sign} t dt$;
4) $X = C([0,1]),\ f(x) = \int\limits_{0}^{1} t|x(t)|dt$;
5) $X = C([0,1])$ з нормою $||x|| = \int\limits_{0}^{1} |x(t)|dt,\ f(x) = x(1)$;
6) $X = L_p([-1,1]),\ 1 \le p \le +\infty,\ f(x) = \int\limits_{-1}^{1} t^2 x(t)\operatorname{sign} t dt$;
7) $X = l_2,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(x_n + x_{n+1})$;
8) $X = \left\{ x \in l_2 \mid \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \cos n - \text{збіжний} \right\},\ ||\cdot||_X := ||\cdot||_{l_2}$,
$f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \cos n,\ x \in X$.

Р о з в ' я з о к. 1) Оскільки $\forall x,y \in C([a,b])\ \forall \alpha,\beta \in \mathbf{K}\ :$ $f(\alpha x+\beta y) = (\alpha x+\beta y)(\frac{a+b}{2}) = \alpha x(\frac{a+b}{2})+\beta y(\frac{a+b}{2}) = \alpha f(x)+\beta f(y)$, то функціонал f лінійний. Для лінійного функціонала неперервність рівносильна обмеженості. Функціонал f обмежений, бо $\forall x \in C([a,b])\ :$

$|f(x)| = |x(\frac{a+b}{2})| \le ||x||$. Отже, f – лінійний неперервний функціонал і за лемою 1 $||f|| \le 1$. Для доведення того, що $||f|| = 1$, покладемо $x_0(t) := 1,\ t \in [a,b]$. Тоді $||x_0|| = 1,\ f(x_0) = x_0(\frac{a+b}{2}) = 1$, звідки $||f|| \ge \frac{|f(x_0)|}{||x_0||} = 1$. Отже, $||f|| = 1$.

2) Функціонал f лінійний, бо $\forall x,y \in C([a,b])\ \forall \alpha,\beta \in \mathbf{K}$: $f(\alpha x + \beta y) = (\alpha x + \beta y)(a) - (\alpha x + \beta y)(b) = \alpha(x(a) - x(b)) + \beta(y(a) - y(b)) = \alpha f(x) + \beta f(y)$. Для лінійного функціонала неперервність рівносильна обмеженості. Функціонал f обмежений, бо $\forall x \in C([a,b])$: $|f(x)| = |x(a) - x(b)| \le |x(a)| + |x(b)| \le 2||x||$. Отже, f – лінійний неперервний функціонал і $||f|| \le 2$. Для доведення того, що $||f|| = 2$, покладемо $x_0(t) := t - \frac{a+b}{2},\ t \in [a,b]$. Тоді $||x_0|| = \frac{b-a}{2},\ f(x_0) = x_0(a) - x_0(b) = b - a$, звідки $||f|| \ge \frac{|f(x_0)|}{||x_0||} = 2$. Отже, $||f|| = 2$.

3) Функціонал f коректно визначений, бо підінтегральна функція має не більше однієї точки розриву, отже, вона інтегровна за Ріманом. Лінійність функціонала f випливає з лінійності інтеграла Рімана. Функціонал обмежений, бо $\forall x \in C([-1,1])$: $|f(x)| \le \int\limits_{-1}^{1} |x(t)\operatorname{sign} t| dt = \int\limits_{-1}^{1} |x(t)| dt \le \int\limits_{-1}^{1} \max\limits_{s\in[-1,1]} |x(s)| dt = ||x|| \int\limits_{-1}^{1} dt = 2||x||$, звідки, враховуючи лінійність f, отримуємо, що f – неперервний функціонал і $||f|| \le 2$. Рівність $|f(x)| = 2||x||$ досягається, наприклад, на функції $x_0(t) := \operatorname{sign} t,\ t \in [-1,1]$, але $x_0 \notin C([-1,1])$, тому розглянемо послідовність неперервних функцій, які збігаються майже скрізь (відносно міри Лебега) на $[0,1]$ до функції x_0. Покладемо $\forall n \in \mathbf{N}$: $x_n(t) := \begin{cases} 1, & t \in [\frac{1}{n}, 1], \\ -1, & t \in [-1, -\frac{1}{n}], \end{cases}$ а на відрізку $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ довизначимо функцію x_n лінійно (намалюйте графік функції x_n). Оскільки $\forall t \in [-1,1]\backslash\{0\}$: $x_n(t) \to \operatorname{sign} t,\ n \to \infty$, то $y_n(t) := x_n(t)\operatorname{sign} t \to 1(\operatorname{mod} \lambda),\ n \to \infty$, на $[-1,1]$, причому $|y_n(t)| \le 1 =: y_0(t), t \in [-1,1]$, і функція y_0 інтегровна за Лебегом на $[-1,1]$, тому за теоремою Лебега про мажоровану збіжність $f(x_n) = \int\limits_{-1}^{1} y_n(t) dt \to \int\limits_{-1}^{1} dt = 2,\ n \to \infty$. (Щоб не застосовувати теорему Лебега про мажоровану збіжність, можна виписати явний вигляд функції x_n і, безпосередньо порахувавши інтеграл, отримати, що $f(x_n) \to 2,\ n \to \infty$.) Враховуючи, що $||x_n|| = 1$, маємо, що $||f|| \ge |f(x_n)|,\ n \ge 1$. Переходячи до границі при $n \to \infty$, отримаємо, що $||f|| \ge 2$. Отже, $||f|| = 2$.

4) Функціонал f нелінійний. Справді, якщо $x(t) := 1,\ y(t) := -1,\ t \in [0,1]$, то $(x + y)(t) = 0,\ t \in [0,1]$, тому $f(x + y) = 0$,

$f(x)+f(y) = \int\limits_0^1 t dt + \int\limits_0^1 t dt = 1$, тобто $f(x+y) \neq f(x)+f(y)$. Функціонал f неперервний. Дійсно, якщо $x \in C([0,1]),\ x_n \in C([0,1])$, $n \geq 1,\ ||x_n - x|| \to 0,\ n \to \infty$, то маємо оцінки $|f_n(x) - f(x)| = \left|\int\limits_0^1 t|x_n(t)|dt - \int\limits_0^1 t|x(t)|dt\right| \leq \int\limits_0^1 t||x_n(t)| - |x(t)||dt \leq \int\limits_0^1 t|x_n(t) - x(t)|dt$ $\leq \int\limits_0^1 t||x_n - x||dt = \frac{1}{2}||x_n - x|| \to 0,\ n \to \infty$.

5) Оскільки $\forall x, y \in C([0,1])\ \forall \alpha, \beta \in \mathbf{K}\ :\ f(\alpha x + \beta y) = (\alpha x + \beta y)(1) = \alpha x(1) + \beta y(1) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, то f – лінійний функціонал. Функціонал f не є неперервним. Дійсно, якщо $x_0(t) := 0,\ t \in [0,1]$, $x_n(t) := t^n,\ t \in [0,1],\ n \geq 1$, то $||x_n - x_0|| = \int\limits_0^1 |t^n - 0|dt = \frac{1}{n+1}$ $\to 0,\ n \to \infty$, але $f(x_n) = x_n(1) = 1 \not\to 0 = x_0(1) = f(x_0), n \to \infty$.

6) Коректність означення функціонала f випливає з нерівності Гельдера. Лінійність f випливає з лінійності інтеграла Лебега. Доведемо обмеженість f і порахуємо $||f||$.

Нехай $p = 1$. Тоді $|f(x)| = \left|\int\limits_{-1}^1 t^2 x(t)dt\right| \leq \int\limits_{-1}^1 t^2|x(t)|dt \leq \int\limits_{-1}^1 |x(t)|dt = ||x||_1$, звідки випливає, що f обмежений і $||f|| \leq 1$. Якщо $x_n(t) := \begin{cases} 0, & t \in [-1, 1-\frac{1}{n}], \\ n, & t \in (1-\frac{1}{n}, 1], \end{cases}$ $n \geq 1$, то $||x_n|| = n \int\limits_{1-\frac{1}{n}}^1 dt = 1$, $f(x_n) = n \int\limits_{1-\frac{1}{n}}^1 t^2 dt = \frac{n}{3}(1-(1-\frac{1}{n})^3) = \frac{n}{3}(\frac{3}{n} - \frac{3}{n^2} = \frac{1}{n^3}) \to 1,\ n \to \infty$, звідки, ураховуючи нерівність $||f|| \geq |f(x_n)|,\ n \geq 1$, отримуємо, що $||f|| \geq 1$, отже, $||f|| = 1$.

Нехай $1 < p < +\infty$. Користуючись нерівністю Гельдера, маємо, що $|f(x)| \leq \int\limits_{-1}^1 t^2|x(t)|dt \leq \left(\int\limits_{-1}^1 t^{2q}dt\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int\limits_{-1}^1 |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{2}{2q+1}\right)^{\frac{1}{q}}$.

Якщо $x_0(t) := (t^2)^{q-1} \operatorname{sign} t,\ t \in [-1,1]$, то $||x_0||_p = \left(\int\limits_{-1}^1 t^{2(q-1)p}dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int\limits_{-1}^1 t^{2q}dt\right)^{\frac{1}{p}}$, $f(x_0) = \int\limits_{-1}^1 t^2 \cdot t^{2(q-1)}dt = \int\limits_{-1}^1 t^{2q}dt$, звідки $||f|| \geq \frac{|f(x_0)|}{||x_0||_p} =$

$\left(\int\limits_{-1}^{1} t^{2q}dt\right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\frac{2}{2q+1}\right)^{\frac{1}{q}}$, отже, $||f|| = \left(\frac{2}{2q+1}\right)^{\frac{1}{q}}$.

Нехай $p = +\infty$. Тоді $|f(x)| \le \int\limits_{-1}^{1} t^2|x(t)|dt \le ||x||_\infty \int\limits_{-1}^{1} t^2dt = \frac{2}{3}||x||_\infty$. Якщо $x_0(t) := \operatorname{sign} t,\ t \in [-1,1]$, то $x_0 \in L_\infty([-1,1])$, $||x_0||_\infty = 1,\ f(x_0) = \int\limits_{-1}^{1} t^2dt = \frac{2}{3}$, звідки $||f|| \ge \frac{2}{3}$, отже, $||f|| = \frac{2}{3}$.

7) Подамо f у вигляді $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n-1}} = $ $= \frac{x_1}{2} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} x_n\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{x_1}{2} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{3x_n}{2^n}$. Лінійність f випливає з лінійності суми ряду. Доведемо обмеженість f. Для кожного $x \in l_2$ за нерівністю Коші–Буняковського $|f(x)| \le \frac{|x_1|}{2} + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{3|x_n|}{2^n} \le \left(\frac{1}{4} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{9}{4^n}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot$ $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = ||x||_2$, звідки випливає, що f обмежений, а отже, неперервний (внаслідок лінійності) і $||f|| \le 1$. Для елемента $\tilde{x} := (\frac{1}{2}, \frac{3}{2^2}, ..., \frac{3}{2^n}, ...) \in l_2$ у нерівності Коші–Буняковського досягається рівність, тому $||f|| \ge \frac{|f(\tilde{x})|}{||\tilde{x}||} = 1$, отже, $||f|| = 1$.

8) Лінійність f випливає з лінійності суми ряду. Доведемо, що функціонал f не є обмеженим. Покладемо $x^{(n)} := (\frac{\cos 1}{1}, ..., \frac{\cos n}{n}, 0, ...),\ n \ge 1$. Тоді $||x^{(n)}||^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos^2 k}{k^2} \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},\ n \ge 1$, але $f(x_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos^2 k}{k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos 2k}{k} \to +\infty,\ n \to \infty$, оскільки $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k}{k}$ збігається за ознакою Діріхле. Оскільки f – лінійний необмежений функціонал, то він є розривним.

2. Нехай X – ЛНП, f – лінійний функціонал на X. Довести, що

1) $\operatorname{Ker} f$ – лінійна множина;

2) якщо $z \in X \backslash \operatorname{Ker} f$, то $\forall x \in X\ \exists! y \in \operatorname{Ker} f\ \exists! \lambda \in \mathbf{K}\ :\ x = y + \lambda z$.

Р о з в ' я з о к. 1) З лінійності функціонала f випливає, що $\forall x, y \in \operatorname{Ker} f\ \forall \alpha, \beta \in \mathbf{K}\ :\ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = 0$, тобто $\alpha x + \beta y \in \operatorname{Ker} f$.

2) Нехай $x \in X$ – довільний фіксований елемент. Підберемо $\lambda \in \mathbf{K}$ так, щоб $f(x - \lambda z) = 0$. Оскільки $f(x - \lambda z) = f(x) - \lambda f(z) = 0$,

то $\lambda = \frac{f(x)}{f(z)}$ ($f(z) \neq 0$, бо $z \notin \operatorname{Ker} f$). Покладемо $y := x - \lambda z$. Тоді $y \in \operatorname{Ker} f$ і $x = y + \lambda z$.

Доведемо єдиність такого розкладу. Припустимо, що $x = y + \lambda z = y_1 + \lambda_1 z$, де $y, y_1 \in \operatorname{Ker} f,\ \lambda, \lambda_1 \in \mathbf{K}$. Тоді $y - y_1 = (\lambda_1 - \lambda)z$. Оскільки $y_1 - y \in \operatorname{Ker} f$, то $(\lambda_1 - \lambda)z \in \operatorname{Ker} f$, що можливо лише тоді, коли $\lambda_1 = \lambda$. При цьому $y - y_1 = (\lambda_1 - \lambda)z = 0$, тобто $y = y_1$.

3. Користуючись описом відповідних спряжених просторів, довести лінійність і неперервність наведених функціоналів:

1) $X = C([-1,1]),\ f(x) = \int\limits_{-1}^{1} tx(t)dt - x(0)$;

2) $X = C([a,b]),\ f(x) = x(\frac{a+b}{2})$;

3) $X = C([0,3]),\ f(x) = \int\limits_{0}^{1} x(t)dt + \int\limits_{2}^{3} tx(t)dt$;

4) $X = l_2,\ f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}(x_k + x_{k+1})$;

5) $X = l_p,\ 1 \le p \le +\infty,\ f(x) = x_j + x_{j+1},\ j$ – фіксоване;

6) $X = l_p,\ 1 \le p \le +\infty,\ f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}$;

7) $X = L_p([0,1]),\ f(x) = \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} x(t)dt - \int\limits_{\frac{2}{3}}^{1} x(t)dt$.

Р о з в ' я з о к. Нагадаємо формулу обчислення інтеграла Рімана–Стілтьєса у випадку, коли $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ – функція обмеженої варіації, неперервна на $[a,b]\backslash\{t_1, ..., t_n\}$, і за винятком скінченного числа точок існує похідна g' на $[a,b]$, , причому $g' \in R([a,b])$. Тоді для довільної функції $x \in C([a,b])$ маємо: $\int\limits_{a}^{b} x(t)dg(t) = \int\limits_{a}^{b} x(t)g'(t)dt + \sum\limits_{k=1}^{n} x(t_k)(g(t_k+) - g(t_k-))$, де $g(b+) := g(b),\ g(a-) := g(a)$. При цьому, якщо $g(t_k)$ лежить між $g(t_k-)$ і $g(t_k+),\ k = \overline{1,n}$, то варіація функції g на $[a,b]$ дорівнює $V(g,[a,b]) = \int\limits_{a}^{b} |g'(t)|dt + \sum\limits_{k=1}^{n} |g(t_k+) - g(t_k-)|$.

1) Підберемо функцію $g \in BV_0([-1,1])$ так, щоб $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} x(t)dg(t)$, $x \in C([-1,1])$. З формули, якою задано функціонал f, видно, що $g'(t) = t,\ t \neq 0$, і функція g має стрибок у т. 0, рівний -1. Тому $g(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} + C, & t \in [-1,0), \\ \frac{t^2}{2} + C - 1, & t \in [0,1]. \end{cases}$ Підберемо сталу C так, щоб $g(-1) = 0$.

Тоді $C = -\frac{1}{2}$, функція $g(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}, & t \in [-1, 0), \\ \frac{t^2}{2} - \frac{3}{2}, & t \in [0, 1], \end{cases}$ при цьому $g \in BV_0([-1,1])$, $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} x(t)dg(t)$, $x \in C([-1,1])$, тому $f \in (C([-1,1]))^*$ і $||f|| = ||g||_V = V(g, [-1,1]) = 3$ (що очевидно з графіка функції g).

Зауважимо, що сталу C можна було обрати довільною. Тоді б не обов'язково виконувалася умова $g \in BV_0([-1,1])$, але це не вплинуло б ні на величину інтеграла, ні на варіацію функції g.

2) У формулі, якою задано функціонал, інтеграл відсутній, тому $g'(t) = 0$, $t \neq \frac{a+b}{2}$. Відмітимо також, що в точці $t = \frac{a+b}{2}$ функція g має стрибок, рівний 1. Тому покладемо $g(t) := \begin{cases} 1, & t \in [\frac{a+b}{2}, b], \\ 0, & t \in [a, \frac{a+b}{2}). \end{cases}$ Тоді $g \in BV_0([a,b])$ і $f(x) = \int\limits_a^b x(t)dg(t)$, $x \in C([a,b])$, тому $f \in (C([a,b]))^*$ і $||f|| = V(g, [a,b]) = g(b) - g(a) = 1$ (функція g монотонна).

3) З формули, якою задано функціонал, видно, що $g'(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1), \\ 0, & t \in (1, 2), \\ t, & t \in (2, 3], \end{cases}$ причому функція g неперервна. Тому $g(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 1], \\ 1, & t \in [1, 2), \\ \frac{t^2}{2} - 1, & t \in [2, 3]. \end{cases}$

Тоді $g \in BV_0([0,3])$ і $f(x) = \int\limits_0^3 x(t)dg(t)$, $x \in C([0,3])$, тому $f \in (C([0,3]))^*$ і $||f|| = V(g, [0,3]) = \frac{7}{2}$.

4) Ураховуючи наслідок 1, маємо підібрати $y \in l_2$ так, щоб $f(x) = (x, y)$, $x \in l_2$. Подамо функціонал f у вигляді: $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(x_n + x_{n+1}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}x_n + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}x_n = \frac{1}{2}x_1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{3}{2^n}x_n$. Тоді $y := (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, ...) \in l_2$, $f(x) = (x, y)$, $x \in l_2$. Тому $f \in l_2^*$ і $||f|| = ||y|| = \sqrt{\frac{1}{4} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{9}{4^n}} = 1$.

5) За наслідком 1 і задачею 14 треба знайти такий $a \in l_q$, щоб $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n a_n$, $x \in l_p$. Покладемо $a = e_j + e_{j+1}$. Для всіх $1 \leq q \leq +\infty$:

$a \in l_q$, тому $f \in (l_p)^*$. Якщо $p = 1$, то $||f|| = ||a||_\infty = 1$; якщо $1 < p < +\infty$, то $||f|| = ||a||_q = 2^{\frac{1}{q}}$; якщо $p = +\infty$, то $||f|| = ||a||_1 = 2$.

6) Покладемо $a := (\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, ...)$. Тоді $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n a_n,\ x \in l_p$. Оскільки $a \in l_q, 1 \leq q \leq +\infty$, то $f \in (l_p)^*$ для всіх $p \in [1, +\infty)$. При цьому: якщо $p = 1$, то $||f|| = ||a||_\infty = \sup\limits_{n \geq 1} |\frac{1}{3^n}| = \frac{1}{3}$; якщо $1 < p < +\infty$, то $||f|| = ||a||_q = (\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{qk}})^{\frac{1}{q}} = (\frac{1}{3^q - 1})^{\frac{1}{q}}$; якщо $p = +\infty$, то $||f|| = ||a||_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$. (Тут використано наслідок 1 і задачу 14).

7) Підберемо функцію h так, щоб $f(x) = \int\limits_0^1 x(t)h(t)dt,\ x \in L_p([0,1])$.

Очевидно, що $h(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ 0, & t \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}), \\ -1, & t \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$ Маємо, що $h \in L_q([0,1])$, $1 \leq q \leq +\infty$. Тому за теоремою 1 і задачею 15 функціонал $f \in (L_p([0,1]))^*$ і $||f|| = ||h||_q$. Якщо $p = 1$, то $||f|| = \operatorname*{esssup}\limits_{t \in [0,1]} |h(t)| = 1$; якщо $1 < p < +\infty$, то $||f|| = ||h||_q = \left(\int\limits_0^1 |h(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{q}}$; якщо $p = +\infty$, то $||f|| = ||h||_1 = \int\limits_0^1 |h(t)|dt = \frac{5}{6}$.

4. Нехай $1 \leq p < +\infty$ – фіксоване. При яких $\alpha \in \mathbf{R}$ подані нижче функціонали належать до відповідних спряжених просторів? Знайти норми лінійних неперервних функціоналів.

1) $X = L_p([1, +\infty)),\ f(x) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{x(t)}{t^\alpha} dt$;

2) $X = l_p,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha^n x_n$.

Р о з в ' я з о к. 1) Покладемо $h(t) := \frac{1}{t^\alpha},\ t \geq 1$; тоді $f(x) = \int\limits_1^{+\infty} x(t)h(t)dt,\ x \in L_p([1, +\infty))$. За теоремою 1 функціонал $f \in (L_p([1, +\infty)))^*$ тоді й тільки тоді, коли $h \in L_q([1, +\infty])$. Якщо $1 < p < +\infty$, то $1 < q < +\infty$ і функція $h \in L_q([1, +\infty))$ лише коли інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha q}} < +\infty$. Це виконується, якщо $\alpha q > 1$, тобто $\alpha > \frac{1}{q}$.

Якщо $p = 1,$ то $q = +\infty$ і функція $h \in L_\infty([1, +\infty))$ лише коли вона обмежена, тобто при $\alpha \geq 0.$

2) Покладемо $a := (\alpha, \alpha^2, ..., \alpha^k, ...)$; тоді $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n a_n, \ x \in l_p.$ За наслідком 1 функціонал $f \in (l_p)^*$ тоді й тільки тоді, коли $a \in l_q.$ Якщо $1 < p < +\infty,$ то $1 < q < +\infty$ і елемент $a \in l_q$ лише коли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha^{kq} < +\infty.$ Це геометричний ряд, що збігається при $|\alpha| < 1.$ Якщо $p = 1,$ то $q = +\infty$ і елемент $a \in l_\infty$ лише коли послідовність $a = (\alpha, \alpha^2, ...)$ обмежена, тобто при $|\alpha| \leq 1.$

Зауваження. За допомогою задач 14,15 цього розділу і задачі 29 з розділу 5, можна отримати відповідь на питання цієї задачі й при $p = +\infty$: 1) $\alpha > 1$; 2) $|\alpha| < 1.$

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

5. Нехай X – ЛНП над полем $\mathbf{K}$. Довести, що область значень ненульового лінійного функціонала на X збігається з $\mathbf{K}$.

6. Нехай X – ЛНП, $g \in X^*$. Довести, що для довільних $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ функціонал $\alpha f + \beta g,$ визначений формулою $(\alpha f + \beta g)(x) := \alpha f(x) + \beta g(x), \ x \in X,$ також належить X^*.

7. Нехай X – ЛНП, $f \in X^*$. Довести, що:

1) $||f|| = \sup\limits_{||x|| \leq 1} |f(x)|$; 2) $||f|| = \sup\limits_{||x|| = 1} |f(x)|$;
3) $||f|| = \min\{C \geq 0 \,|\, |f(x)| \leq C||x||, \ x \in X\}$;
4) $||f|| = \sup\limits_{||x|| \leq 1} f(x),$ якщо простір X дійсний;
5) $||f|| = \sup\limits_{x \in M, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{||x||},$ де M – скрізь щільна множина в X.

8. Нехай X – ЛНП, $\{f_n : n \geq 1\} \subset X^*, \ ||f_n|| \leq 1, \ n \geq 1.$ Покладемо $f(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} f_n(x), \ x \in X.$ Довести, що $f \in X^*$.

9. З'ясувати, чи є наведені функціонали в $C([0,1])$ лінійними, неперервними. Для лінійних неперервних функціоналів знайти їх норми за означенням:

1) $f(x) = x(0)$; 4) $f(x) = ||x||$;
2) $f(x) = \int\limits_0^1 x(t)dt$; 5) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x(\frac{1}{2^n})$;
3) $f(x) = \int\limits_0^1 |x(t)|dt$; 6) $f(x) = \int\limits_0^1 tx(t)dt$;

7) $f(x) = \int\limits_0^1 x(t)\,\mathrm{sign}(t - \frac{1}{2})dt$;

8) $f(x) = \int\limits_0^1 \mathrm{sign}\, x(t)dt$;

9) $f(x) = \int\limits_0^1 tx^2(t)dt$;

10) $f(x) = \int\limits_0^1 (1-2t)x(t)dt$;

11) $f(x) = \int\limits_0^1 x(t)\cos \pi t dt$;

12) $f(x) = \int\limits_0^1 x(t)\sin \pi t dt$;

13) $f(x) = \int\limits_0^1 |x(t)|\cos \pi t dt$;

14) $f(x) = \int\limits_0^1 x(t)dt - x(0)$;

15) $f(x) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} x(t)dt - \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 x(t)dt$;

16) $f(x) = \frac{x(\varepsilon)+x(-\varepsilon)-2x(0)}{\varepsilon^2}$, де $0 < \varepsilon < 1$;

17) $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x(t_k)$, де $t_1, ..., t_n$ – набір різних точок з $[0,1]$, $\lambda_1, ..., \lambda_n$ – набір дійсних чисел.

10. З'ясувати, чи є наведені функціонали лінійними, неперервними. Для лінійних неперервних функціоналів знайти норми за означенням:

1) $X = l_1,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$;

2) $X = l_1,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n})x_n$;

3) $X = l_1,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, де $y \in l_\infty$ – фіксований;

4) $X = l_2,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$;

5) $X = l_2,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n(n+1)}}$;

6) $X = l_2,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x_n}{n}$;

7) $X = l_{\frac{4}{3}},\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_{2n}}{3^{n/4}}$;

8) $X = l_1,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-(-1)^n)\frac{n-1}{n} x_n$;

9) $X = l_p,\ 1 \le p < +\infty,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$;

10) $X = l_p,\ 1 \le p \le +\infty,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$;

11) $X = l_p,\ 1 \le p \le +\infty,\ f(x) = \mathrm{sign}(x_1)$;

12) $X = l_p,\ 1 \le p < +\infty,\ f(x) = \sum\limits_{n: x_n \ne 0} e^{-\frac{1}{|x_n|}}$;

13) $X = l_p,\ 1 \le p \le +\infty,\ f(x) = x_j,\ j \in \mathbf{N}$ – фіксоване;

14) $X = l_p,\ 1 \le p \le +\infty,\ f(x) = x_j + x_{j+1},\ j \in \mathbf{N}$ – фіксоване;

15) $X = l_p,\ 1 \le p \le +\infty,\ f(x) = x_1 + 2x_2$.

11. З'ясувати, чи є наведені функціонали лінійними, неперервними. Для лінійних неперервних функціоналів знайти норми за означенням:

1) $X = L_2([0,1]),\ f(x) = \int\limits_0^1 tx(t)dt;$

2) $X = L_2([0,1]),\ f(x) = \int\limits_0^1 x(t)\operatorname{sign}(t-\frac{1}{2})dt;$

3) $X = L_2([0,1]),\ f(x) = \int\limits_0^1 \frac{x(t)}{\sqrt[4]{t}}dt;$

4) $X = L_2([0,1]),\ f(x) = \int\limits_0^1 |x(t)|^{\frac{3}{4}}dt;$

5) $X = L_p([0,1]),\ 1 \le p \le +\infty,\ f(x) = \int\limits_0^1 tx(t)dt;$

6) $X = L_p([0,\frac{\pi}{2}]),\ 1 \le p \le +\infty,\ f(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)\sin t dt;$

7) $X = L_p([0,1]),\ 1 \le p \le +\infty,\ f(x) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} tx(t)dt;$

8) $X = L_p([0,2]),\ 1 \le p \le +\infty,\ f(x) = \int\limits_0^1 x(t)dt - 3\int\limits_1^2 x(t)dt;$

9) $X = L_1(\mathbf{R}),\ f(x) = \int\limits_{\mathbf{R}} x(t)\operatorname{arctg} t dt.$

12. З'ясувати, чи є наведені функціонали лінійними, неперервними. Для лінійних неперервних функціоналів знайти норми за означенням:

1) $X = C^1([0,1])$ з нормою $||x|| = \max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)| + \max\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)|$, $f(x) = x'(0);$

2) $X = C^1([0,1])$ з рівномірною нормою, $f(x) = x'(0);$

3) $X = C^1([0,1])$ з рівномірною нормою, $f(x) = \int\limits_0^1 x'(t)\operatorname{sign}\pi t dt;$

4) $X = C^1([0,1])$ з нормою $||x|| = \max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)| + \max\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)|$, $f(x) = x'(0) + x(1);$

5) $X = C([0,1]),\ f(x) = \int\limits_0^1 x(\sqrt{t})dt;$

6) $X = C([0,1]),\ f(x) = \int\limits_0^1 x(t^2)dt;$

7) $X = \left\{ x \in L_2([0,1]) \mid \int\limits_0^1 |x(t^\alpha)|dt < +\infty \right\}$,

$||\cdot||_X := ||\cdot||_{L_2([0,1])}$, $f(x) = \int\limits_0^1 x(t^\alpha)dt,\ \alpha > 0$;

8) $X = C([0,1])$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 x(t^n)dt$;

9) $X = c,\ f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$;

10) $X = \left\{ x \in l_2 \mid \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \sin n \text{ – збіжний} \right\}$, $||\cdot||_X := ||\cdot||_{l_2}$,

$f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \sin n$;

11) $X = \left\{ x \in l_2 \mid \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{n^2} \text{ – збіжний} \right\}$, $||\cdot||_X := ||\cdot||_{l_2}$,

$f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{n^2}$;

12) $\{y_n : n \geq 1\}$ така, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ збіжний умовно,

$X = \left\{ x \in l_\infty \mid \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n \text{– збіжний} \right\}$, $||\cdot||_X := ||\cdot||_{l_\infty}$,

$f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$.

13. Довести, що відображення $\varphi : (L_p(T, \mathcal{F}, \mu))^* \to L_q(T, \mathcal{F}, \mu)$, яке кожному функціоналу $f \in (L_p(T, \mathcal{F}, \mu))^*$ ставить у відповідність елемент $h \in L_q(T, \mathcal{F}, \mu)$ з теореми 3, є ізометричним ізоморфізмом, тобто лінійною неперервною бієкцією, що зберігає норму.

14. Довести, що $l_1 \subset (l_\infty)^*$, тобто що для довільного елемента $a = (a_1, ..., a_n, ...) \in l_1$ функціонал $f_a(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n, x = (x_1, ..., x_n, ...) \in l_\infty$, є лінійним неперервним функціоналом на l_∞ і $||f_a|| = ||a||_\infty$.

15. Довести, що $L_1(T, \mathcal{F}, \mu) \subset (L_\infty(T, \mathcal{F}, \mu))^*$, тобто що для довільного елемента $h \in L_1(T, \mathcal{F}, \mu)$ функціонал $f(x) := \int\limits_T h(t)x(t)d\mu(t)$, $x \in L_1(T, \mathcal{F}, \mu)$, є лінійним неперервним функціоналом на $L_\infty(T, \mathcal{F}, \mu)$ і $||f|| = ||h||_\infty$.

16. Нехай H – комплексний гільбертів простір. Для кожного $f \in H^*$ покладемо $\varphi(f) := a$, де елемент $a \in H$ такий, що $f(x) = (x, a),\ x \in H$. Довести, що відображення $\varphi : H \to H^*$ є ізометричним ізоморфізмом, причому антилінійним, тобто $\forall f, g \in H^*\ \forall \alpha, \beta \in \mathbf{C}\ :\ \varphi(\alpha f + \beta g) = \overline{\alpha}\varphi(f) + \overline{\beta}\varphi(g)$.

17. Користуючись описом спряженого простору $(C([a,b]))^*$, довести, що наведені функціонали є лінійними неперервними на $C([a,b])$ і знайти їх норми:

1) $X = C([a,b]),\ f(x) = \frac{1}{2}(x(a) + x(b));$
2) $X = C([0,1]),\ f(x) = x(0);$
3) $X = C([-1,1]),\ f(x) = x(0) - x(-1) - x(1);$
4) $X = C([0,1]),\ f(x) = x(0) + \int\limits_0^1 t^2 x(t)dt;$
5) $X = C([-1,1]),\ f(x) = \int\limits_{-1}^0 x(t)dt - \int\limits_0^1 x(t)dt;$
6) $X = C([0,2]),\ f(x) = \int\limits_0^1 tx(t)dt;$
7) $X = C([0,2]),\ f(x) = \int\limits_0^1 (1-2t)x(t)dt - x(0) + 2x(2);$
8) $X = C([0,\pi]),\ f(x) = \int\limits_0^\pi x(t)\cos t dt;$
9) $X = C([0,\pi]),\ f(x) = \int\limits_0^\pi x(t)|\cos t| dt;$
10) $X = C([0,\pi]),\ f(x) = \int\limits_0^\pi x(t)\sin t dt;$
11) $X = C([0,1]),\ f(x) = \int\limits_0^{\ln 2} e^t x(t)dt + x(1);$
12) $X = C([-1,2]),\ f(x) = \int\limits_{-1}^1 |t|x(t)dt + 3\int\limits_1^2 x(t)dt - 2x(0);$
13) $X = C([0,1]),\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} x(\frac{1}{n});$
14) $X = C([0,1]),\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{(4n+1)(4n+3)} x(\frac{1}{n^2});$
15) $X = C([0,1]),\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{2^n} x(1 - \frac{1}{n});$
16) $X = C([a,b]),\ f(x) = \sum\limits_{k=1}^n \lambda_k x(t_k)$, де $t_1, ..., t_n$ – набір різних точок з $[a,b],\ \lambda_1, ..., \lambda_n$ – набір дійсних чисел;
17) $X = C([0,1]),\ f(x) = \int\limits_0^1 x(t^2)dt.$

18. Нехай $1 \le p \le +\infty$ фіксоване. Користуючись описом відповідних спряжених просторів, довести лінійність і неперервність наведених функціоналів та знайти їх норми:

1) $X = l_1,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n};$

2) $X = l_1,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \operatorname{arctg} n;$

3) $X = l_2,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n(n+1)}};$

4) $X = l_\infty,\ f(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x_n}{n^2-1};$

5) $X = l_{\frac{4}{3}},\ f(x) = x_1 + \sqrt[4]{3}x_3;$

6) $X = l_{\frac{7}{5}},\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_{3n}}{\sqrt[7]{k^4}};$

7) $X = l_p,\ f(x) = x_j,$
де $j \in \mathbf{N}$ – фіксоване;

8) $X = l_p,\ f(x) = 2x_1 + 4x_2;$

9) $X = l_p,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n};$

10) $X = l_2,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n/2}} x_n;$

11) $X = L_1(\mathbf{R}),\ f(x) = \int\limits_{\mathbf{R}} x(t) \operatorname{arcctg} t dt;$

12) $X = L_2([0, 2\pi]),\ f(x) = \int\limits_0^{\pi} x(t) \sin t dt;$

13) $X = L_p([1, 4]),\ f(x) = \int\limits_1^2 tx(t)dt - 2\int\limits_3^4 x(t)dt;$

14) $X = L_p(\mathbf{R}),\ f(x) = \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-t^2} x(t)dt;$

15) $X = L_\infty([0, +\infty)),\ f(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} x(t)dt.$

19. Нехай $1 \le p < +\infty$ фіксоване. При яких $\alpha \in \mathbf{R}$ наведені функціонали належать відповідним спряженим просторам? Знайти норми цих функціоналів.

1) $X = l_p,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^\alpha};$

2) $X = l_p,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n((n+1)^\alpha - n^\alpha);$

3) $X = L_p([0, 1]),\ f(x) = \int\limits_0^1 \frac{x(t)}{t^\alpha} dt;$

4) $X = L_p([0, +\infty)),\ f(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} x(t)dt;$

5) $X = L_p([0, \frac{\pi}{2}]),\ f(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x(t) \sin^\alpha t dt.$

20. 1) Знайти загальний вигляд лінійного функціонала на скінченновимірному ЛНП і довести, що кожний лінійний функціонал на цьому просторі є неперервним;

2) Описати всі множини $M \subset \mathbf{R}^2$, для яких існує лінійний функціонал f на $\mathbf{R}^2$ такий, що $\mathrm{Ker}\, f = M$. Аналогічне завдання для $\mathbf{R}^3$.

21. Довести, що $c_0^* = l_1$, причому загальний вигляд лінійного неперервного функціонала на c_0 задається формулою $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n a_n$, $x \in c_0$, де $a = (a_1, ..., a_n, ...) \in l_1$ – фіксований елемент, $||f|| = ||a||_1$.

22. Довести, що $c^* = l_1$, причому загальний вигляд лінійного неперервного функціонала на c задається формулою $f(x) = a_0 \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, $x \in c$, де $a = (a_0, a_1, ..., a_n, ...) \in l_1$ – фіксований елемент, $||f|| = ||a||_1$.

23. Описати всі лінійні неперервні функціонали на c_0, які досягають своєї норми на $\overline{B}(0,1)$.

24*. 1) Знайти загальний вигляд лінійного неперервного функціонала в банаховому просторі $C^1([a,b])$.

2) Знайти загальний вигляд лінійного неперервного функціонала в банаховому просторі $C^n([a,b])$, де $n \in \mathbf{N}$ – фіксоване.

25. Довести, що функціонал $f(x) = \int\limits_a^b p(t)x(t)dt$, $x \in C([a,b])$, є лінійним неперервним функціоналом і знайти його норму, якщо:

1) $p \in C([a,b])$ – фіксована функція;

2)* $p \in L_1([a,b])$ – фіксована функція.

26. Навести приклад лінійного неперервного функціонала f на $C([0,1])$, для якого: 1) не існує елемента $x_0 \in C([0,1])$, $||x_0|| = 1$, такого, що $|f(x_0)| = ||f||$; 2) існує безліч елементів $x_0 \in C([0,1])$, $||x_0|| = 1$, таких, що $f(x_0) = ||f||$; 3) існує єдиний елемент $x_0 \in C([0,1])$, $||x_0|| = 1$, такий, що $f(x_0) = ||f||$.

27. У просторах l_1 і c навести приклади лінійних неперервних функціоналів, які досягають і які не досягають своєї норми на замкненій одиничній кулі.

28. Нехай X – ЛНП. 1) Чи може існувати функціонал $f \in X^*$, для якого $\exists! x_0 \in \overline{B}(0,1)\ :\ a) |f(x_0)| = ||f||?\ b) f(x_0) = ||f||$?

2) Нехай $f \in X^*$. Чи правильно, що: a) якщо $x \in X$, $|f(x)| = ||f||$, то $||x|| = 1$? b) якщо $x \in \overline{B}(0,1)$, $|f(x)| = ||f||$, то $||x|| = 1$?

3) Нехай $f \in X^*$. Розглянемо твердження: a) $\exists x \in X,\ x \neq 0\ :\ |f(x)| = ||f|| \cdot ||x||$; b) $\exists x \in \overline{B}(0,1)\ :\ |f(x)| = ||f||$; c) $\exists x \in \overline{B}(0,1)\ :\ f(x) = ||f||$. Які з цих тверджень є еквівалентними?

29. Нехай X_1, X_2 – ЛНП такі, що $X_1 \subset X_2$ і зі збіжності $x_n \to x$ в X_1 випливає збіжність $x_n \to x$ в X_2. Довести, що $X_1^* \supset X_2^*$.

30. Нехай X – ЛНП, $f \in X^* \setminus \{0\},\ L := \{x \in X \mid f(x) = 1\}$. Довести, що $\frac{1}{||f||} = \inf\limits_{x \in L} ||x||$.

31. Нехай X – ЛНП над полем $\mathbf{K},\ f$ – лінійний функціонал на X. Довести, що кожна з наступних умов рівносильна неперервності f:

1) існує $R > 0$ таке, що множина $f(\overline{B}(0, R))$ обмежена;
2) для будь-якої збіжної до нуля послідовності $\{x_n : n \geq 1\} \subset X$ множина $\{f(x_n) : n \geq 1\}$ обмежена;
3) для довільного $c \in \mathbf{R}$ множина $\{x \mid f(x) < c\}$ відкрита, якщо $\mathbf{K} = \mathbf{R}$;
4) $\exists C > 0 : \{x \mid |f(x)| \leq C\}$ має внутрішні точки.

32. Нехай X – ЛНП над полем $\mathbf{K},\ f$ – лінійний необмежений функціонал на X. Довести, що в довільному околі нуля він набуває всіх значень з поля $\mathbf{K}$. Чи правильно, що в довільному околі будь-якої точки він набуває всіх значень з поля $\mathbf{K}$?

33. Нехай X – ЛНП над полем $\mathbf{K},\ f, g$ – лінійні функціонали на X такі, що $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$. Довести, що $\exists \alpha \in \mathbf{K} : g = \alpha f$.

34. Нехай X – ЛНП над полем $\mathbf{K},\ f, g \in X^*,\ \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g$. Довести, що $\exists \alpha \in \mathbf{K} : g = \alpha f$.

35. Нехай X – ЛНП, $f, f_1, ..., f_n$ – лінійні функціонали на X. Довести, що f є лінійною комбінацією функціоналів $f_1, ..., f_n$ тоді й лише тоді, коли $\bigcap\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} f_k \subset \operatorname{Ker} f$.

36. В яких ЛНП X існує функціонал $f \in X^*$ такий, що: 1) $|f(x)| = ||f|| \cdot ||x||,\ x \in X$? 2) $\operatorname{Ker} f = \{0\}$?

37. Нехай на ЛНП X існують функціонали $f, g \in X^*$ такі, що $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0\}$. Довести, що $\dim X \leq 2$.

38. Нехай X – ЛНП над полем $\mathbf{K},\ f$ – ненульовий лінійний функціонал на X. Довести, що f – відкрите відображення, тобто образ довільної відкритої множини в X при відображенні f є відкритою множиною в $\mathbf{K}$.

39*. Нехай X – ЛНП, f – лінійний функціонал на X. Довести, що $f \in X^*$ тоді й лише тоді, коли $\operatorname{Ker} f$ – замкнена множина.

40. Нехай X – ЛНП над полем $\mathbf{K},\ f$ – лінійний функціонал на X. Довести, що: 1) $\operatorname{Ker} f$ замкнена в X або скрізь щільна в X;

2) якщо множина $\{x \in X \mid f(x) = c_0\}$ замкнена для деякого $c_0 \in \mathbf{K}$, то множина $\{x \in X \mid f(x) = c\}$ замкнена для будь-якого $c \in \mathbf{K}$.

41*. Нехай X – ЛНП, $f \in X^*$. Довести, що $\forall x \in X : |f(x)| = ||f|| \cdot \rho(x, \operatorname{Ker} f)$, де $\rho(x, \operatorname{Ker} f) = \inf\limits_{y \in \operatorname{Ker} f} ||x - y||$.

42. Нехай X – ЛНП, $f \in X^*$, елементи $x_0, y_0 \in X$ такі, що $f(x_0) \cdot f(y_0) < 0$. Довести, що $||x_0 - y_0|| \geq \rho(x_0, \operatorname{Ker} f) + \rho(y_0, \operatorname{Ker} f)$.

43*. Нехай X – ЛНП, $f \in X^*$. 1) Довести, що для того, щоб існував елемент $z_0 \in \overline{B}(0,1)$ такий, що $|f(z_0)| = ||f||$, необхідно, щоб для будь-якого $x_0 \in X$, і достатньо, щоб для деякого $x_0 \in X \backslash \operatorname{Ker} f$ існував елемент $y_0 \in \operatorname{Ker} f$ такий, що $\rho(x_0, \operatorname{Ker} f) = ||x_0 - y_0||$ (тобто елемент найкращого наближення для елемента x_0 в $\operatorname{Ker} f$).

2) За якої умови на функціонал f для кожного елемента $x_0 \in X$ існує не більше одного елемента найкращого наближення в $\operatorname{Ker} f$?

44. Навести приклади підпросторів L у $C([0,1])$ і в c_0 таких, що для довільного $x_0 \notin L$: 1) не існує елемента найкращого наближення в L; 2) існує безліч елементів найкращого наближення в L.

45. Лінійний функціонал $f : C([a,b]) \to \mathbf{R}$ називають невід'ємним, якщо для довільного $x \in C([0,1]),\ x \geq 0,$ виконується нерівність $f(x) \geq 0.$ Довести, що 1) невід'ємний функціонал f неперервний, причому $||f|| = f(x_0),$ де $x_0(t) = 1,\ t \in [a,b]$; 2) якщо для функціонала $f \in (C([a,b]))^*$ норма $||f|| = f(x_0)$, то f – невід'ємний функціонал.

46. Знайти необхідну і достатню умову на функцію $g \in BV_0([a,b])$, щоб функціонал $f(x) = \int\limits_a^b x(t)dg(t),\ x \in C([a,b])$, був невід'ємним.

47. Довести, що для кожного функціонала $f \in (C([a,b]))^*$ існують невід'ємні функціонали f_1 і f_2 такі, що $f = f_1 - f_2$.

48. Лінійний функціонал $f : C([a,b]) \to \mathbf{R}$ називають мультиплікативним, якщо $f(xy) = f(x)f(y),\ x, y \in C([a,b])$. Довести, що: 1) при фіксованому $t_0 \in [a,b]$ функціонал $f(x) = x(t_0),\ x \in C([a,b])$, є мультиплікативним; 2) кожен ненульовий мультиплікативний функціонал є неперервним і має норму, рівну одиниці; 3)* якщо f мультиплікативний функціонал, то $\exists t_0 \in [a,b]\ :\ f(x) = x(t_0),\ x \in C([a,b])$.

49. Нехай X_1, X_2 – ЛНП, $X := X_1 \bigoplus X_2$ – їх пряма сума з нормою $||(x_1, x_2)||_p = (||x_1||^p_{X_1} + ||x_2||^p_{X_2})^{\frac{1}{p}},\ 1 \leq p < +\infty$. Довести, що кожен функціонал $h \in X^*$ однозначно зображується у вигляді $h((x,y)) = f_1(x) + f_2(y),\ (x,y) \in X,$ де $f_i \in X_i^*,\ i = 1, 2.$

50. Довести, що в нескінченновимірному ЛНП існують лінійні розривні функціонали.

51*. **(Ямабе)** Нехай X – ЛНП, $M \subset X$ – опукла скрізь щільна в X множина, $x_0 \in X,\ \varepsilon > 0, \{f_1, ..., f_n\} \subset X^*$. Довести, що $\exists y \in M,\ ||x_0 - y|| < \varepsilon\ :\ f_i(y) = f_i(x_0),\ i = \overline{1, n}$.

РОЗДІЛ 4
ПРОДОВЖЕННЯ ЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ. ТЕОРЕМА ГАНА – БАНАХА. РЕФЛЕКСИВНІ ПРОСТОРИ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Нехай X – лінійний простір над полем $\mathbf{K}(\mathbf{K}=\mathbf{R}$ або $\mathbf{K}=\mathbf{C}),\ G$ – лінійна множина в $X,\ f:G\to\mathbf{K}$ – лінійний функціонал. Лінійний функціонал $F:X\to\mathbf{K}$ називають *продовженням* функціонала f на X, якщо $F(x)=f(x),\ x\in G$. При цьому функціонал f називають *звуженням* функціонала F на G (позначення: $F\restriction G=f$.) Далі G розглядається як ЛНП з нормою, індукованою нормою в $X(||x||_G=||x||_X,\ x\in G)$.

Якщо X – ЛНП, $f\in X^*,\ F\in G^*$ і $F\restriction G=f$, то $||F||\geq||f||$.

Теорема 1 (про продовження за неперервністю). Нехай X – ЛНП, $G\subset X$ – лінійна множина, скрізь щільна в X. Тоді для кожного функціонала $f\in G^*$ існує єдиний функціонал $F\in X^*$ такий, що $F\restriction G=f$. При цьому $||F||=||f||$.

Теорема 2 (Гана–Банаха). Нехай X – ЛНП, $G\subset X$ – лінійна множина. Тоді для кожного функціонала $f\in G^*$ існує функціонал $F\in X^*$ такий, що $F\restriction G=f$ і $||F||=||f||$.

Наслідок 1. Нехай X – ЛНП, $G\subset X$ – підпростір. Тоді для кожного вектора $y\notin G$ існує функціонал $f\in X^*$ такий, що $||f||=1,\ f\restriction G=0$ і $f(y)=\rho(y,G)$.

Наслідок 2. Нехай X – ЛНП, $y\in X,\ y\neq 0$. Тоді існує функціонал $f\in X^*$ такий, що $||f||=1,\ f(y)=||y||$.

Наслідок 3. Нехай X – ЛНП, $x,y\in X,\ x\neq y$. Тоді існує функціонал $f\in X^*$ такий, що $f(x)\neq f(y)$.

Наслідок 4. Для того, щоб множина $M\subset X$ була тотальною в X, необхідно і достатньо, щоб для довільного функціонала $f\in X^*$ з того, що $f\restriction M=0$, випливало $f=0$ на X.

Нехай X – ЛНП, X^* – його спряжений, $X^{**}:=(X^*)^*$ – простір, спряжений до X^*, який називають *другим спряженим* до X.

Теорема 3. Нехай X – ЛНП. Для кожного $x\in X$ відображення $F_x:X^*\to\mathbf{R}$, де $F_x(f):=f(x),\ f\in X^*$, є лінійним неперервним функціоналом на X^*, а відображення $\varphi:X\to X^{**}$, де $\varphi(x)=F_x,\ x\in X$, є лінійним, ін'єктивним і зберігає норму, тобто $||F_x||_{X^{**}}=||x||_X$.

З теореми 3 випливає, що X ізометрично ізоморфний частині, або всьому X^{**}, тобто $\varphi(X)\subset X^{**}$, що позначають $X\subset X^{**}$. Відображення

φ називають природним (або канонічним) вкладенням X у X^{**}. Якщо $\varphi(X) = X^{**}$, то простір X називають *рефлексивним*.

Рефлексивними є скінченновимірний простір, простори $L_p(T, \mathcal{F}, \mu),\ l_p,$ $1 < p < +\infty$; нерефлексивними – простори $l_1, l_\infty, c_0, c, C([a,b])$, а також, якщо міра μ не зосереджена у скінченній кількості атомів, $L_1(T, \mathcal{F}, \mu)$ і $L_\infty(T, \mathcal{F}, \mu)$.

Підпростір $G \subset X$ називають *гіперпідпростором*, якщо існує елемент $x_0 \in X$ такий, що $X =$л.о.$(G \cup \{x_0\})$. *Гіперплощиною* в X називають множину виду $x_0 + G := \{x_0 + y \mid y \in G\}$, де $x_0 \in X,\ G \subset X$ – деякі елемент і гіперпідпростір відповідно.

Теорема Гана–Банаха залишається справедливою і в більш загальній ситуації.

Нехай X – лінійний простір. Функцію $p : X \to \mathbf{R}$ називають *напівадитивною*, якщо $\forall x, y \in X\ :\ p(x+y) \leq p(x) + p(y)$; *додатно однорідною*, якщо $\forall x \in X\ \forall \lambda \geq 0\ :\ p(\lambda x) = \lambda p(x)$, *однорідною*, якщо $\forall x \in X\ \forall \lambda \in \mathbf{K}\ :\ p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$.

Нехай X – лінійний простір. Функцію $p : X \to \mathbf{R}$ називають *напівнормою*, якщо виконуються такі аксіоми:

1) $\forall x \in X\ :\ p(x) \geq 0$;

2) $\forall \alpha \in \mathbf{K}\ \forall x \in X\ :\ p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$;

3) $\forall x, y \in X\ :\ p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

Теорема 2 допускає такі узагальнення.

Теорема 4 (Теорема Гана–Банаха для дійсного простору). Нехай X – дійсний ЛНП, $p : X \to \mathbf{R}$ – напівадитивна додатно однорідна функція, $G \subset X$ – лінійна множина. Тоді для кожного лінійного функціонала $f : G \to \mathbf{R}$ такого, що $f(x) \leq p(x),\ x \in G$, існує лінійний функціонал $F : X \to \mathbf{R}$, для якого $F \restriction G = f$ і $F(x) \leq p(x),\ x \in X$.

Теорема 5 (Теорема Гана–Банаха для комплексного простору). Нехай X – комплексний ЛНП, $p : X \to \mathbf{R}$ – напівнорма, $G \subset X$ – лінійна множина. Тоді для кожного лінійного функціонала $f : G \to \mathbf{C}$ такого, що $|f(x)| \leq p(x),\ x \in G$, існує лінійний функціонал $F : X \to \mathbf{C}$, для якого $F \restriction G = f$ і $|F(x)| \leq p(x),\ x \in X$.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

1. У просторі $\mathbf{R}^2$ на підпросторі $G := \{(x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbf{R}\}$ задано функціонал $f(x) = \alpha x_1,\ x = (x_1, 0) \in G$, де $\alpha \in \mathbf{R}$ – фіксоване. Описати всі лінійні продовження F функціонала f на $\mathbf{R}^2$. Для яких із цих продовжень $||F|| = ||f||$, якщо $\mathbf{R}^2$ розглядати з нормою $||\cdot||_p,\ 1 \leq p \leq +\infty$? В яких випадках продовження, що зберігає норму, єдине?

Р о з в ' я з о к. Кожний лінійний функціонал на $\mathbf{R}^2$ має вигляд $F(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2,\ x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, де $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$ – деякі фіксовані числа (свої для кожного функціонала F). Якщо F – продовження f, то $F((x_1,0)) = f((x_1,0)),\ (x_1,0) \in G$, тобто $a_1x_1 = \alpha x_1,\ x_1 \in \mathbf{R}$. Звідси випливає, що загальний вигляд продовження F функціонала f на $\mathbf{R}^2$ задається формулою $F(x) = \alpha x_1 + a_2x_2,\ x = (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2$, де $a_2 \in \mathbf{R}$ – довільне число. З наслідку 2 розділу 3 випливає, що $||F|| = ||a||_q$, де $a := (\alpha, a_2) \in \mathbf{R}^2,\ q$ – спряжений індекс.

Знайдемо $||f||$. Маємо $||f|| = \sup\limits_{(x_1,0)\in G\setminus\{0\}} \frac{|f((x_1,0))|}{||(x_1,0)||_p} = \sup\limits_{x_1\neq 0} \frac{|\alpha x_1|}{|x_1|} = |\alpha|$.

Тепер при кожному $1 \le p \le +\infty$ з'ясуємо, коли $||F|| = ||f||$ і коли таке продовження єдине.

Нехай $p = 1$. Тоді співвідношення $||F|| = ||f||$ еквівалентне такому: $\max\{|\alpha|, |a_2|\} = |\alpha|$. Звідси випливає, що функціонал F, який є продовженням функціонала f і зберігає норму, має вигляд $F(x) = \alpha x_1 + a_2x_2,\ x = (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2$, де $a_2 \in [-\alpha, \alpha]$ – довільне число; очевидно, що таке продовження єдине тоді й лише тоді, коли $\alpha = 0$.

Нехай $1 < p \le +\infty$. Тоді $1 \le q < +\infty$ і співвідношення $||F|| = ||f||$ рівносильно такому: $|\alpha|^q + |a_2|^q = |\alpha|^q$, тобто $a_2 = 0$. Отже, продовження функціонала f, що зберігає норму, єдине: $F(x) = \alpha x_1$, $x = (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2$.

2. Нехай $G = \left\{x \in C([0,1]) \mid \int\limits_0^1 x(t)dt = 0,\ x(1) = 0\right\}$. Побудувати функціонал $f \in (C([0,1]))^*$ такий, що $f(x) = 0,\ x \in G$, $f(x_1) = f(x_2) = 1$, де $x_1(t) = 1,\ x_2(t) = 1 - t,\ t \in [0,1]$.

Р о з в ' я з о к. Шукатимемо функціонал f у вигляді $f(x) = \alpha \int\limits_0^1 x(t)dt + \beta x(1),\ x \in C([0,1])$, де $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ – деякі числа, які й потрібно знайти. Очевидно, якщо $x \in G$, то $f(x) = 0$. Оскільки $f(x_1) = \alpha + \beta = 1,\ f(x_2) = \frac{\alpha}{2} = 1$, то $\alpha = 2,\ \beta = -1$, тому $f(x) = 2\int\limits_0^1 x(t)dt - x(1),\ x \in C([0,1])$.

3. Довести, що існує ненульовий функціонал $F \in (L_\infty([a,b]))^*$ такий, що:
1) $\forall x \in C([a,b])\ :\ F(x) = x(\frac{a+b}{2})$;
2) $\forall x \in C([a,b])\ :\ F(x) = 0$.

Р о з в ' я з о к. 1) Покладемо $f(x) := x(\frac{a+b}{2}),\ x \in C([a,b])$. У тому, що $f \in (C([a,b]))^*$, можна переконатись або безпосередньо, або за теоремою Рісса (теорема 4 розділу 3), урахувавши зображення $f(x) = \int\limits_a^b x(t)dg(t),\ x \in C([a,b])$, де $g(t) = \chi_{[\frac{a+b}{2},b]}(t),\ t \in [a,b]$, $g \in BV_0([a,b])$. Оскільки $C([a,b])$ – лінійна множина в $L_\infty([a,b])$, то за теоремою Гана–Банаха (теорема 2) існує функціонал $F \in (L_\infty([a,b]))^*$ такий, що $F(x) = f(x),\ x \in C([a,b])$. При цьому функціонал F ненульовий, бо якщо $x_0(t) := 1,\ t \in [a,b]$, то $F(x_0) = f(x_0) = x_0(\frac{a+b}{2}) = 1 \neq 0$.

2) Відзначимо, що $C([a,b])$ – підпростір в $L_\infty([a,b])$. Лінійність множини $C([a,b])$ очевидна, а замкненість випливає з повноти простору $C([a,b])$ з рівномірною нормою і рівності $\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} |x(t)| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|,\ x \in C([a,b])$. Покладемо $y(t) := \chi_{[\frac{a+b}{2},b]}(t),\ t \in [a,b]$. Тоді $y \in L_\infty([a,b])$, але y не належить підпростору $C([a,b])$ в $L_\infty([a,b])$, оскільки не існує такої неперервної на $[a,b]$ функції $x : [a,b] \to \mathbf{R}$, що $y(t) = x(t)(\mathrm{mod}\, m)$ на $[a,b]$ (зауважимо, хоч це і не стосується розв'язку задачі, що функція $z(t) = \chi_{\{a\}}(t),\ t \in [a,b]$, належить підпростору $C([a,b])$ в $L_\infty([a,b])$, бо $z(t) = 0(\mathrm{mod}\, m)$ на $[a,b]$). Скориставшись наслідком 1 з теореми Гана–Банаха, отримаємо шуканий функціонал F.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

4. У просторі $\mathbf{R}^3$ на підпросторі $G = \{(x_1,x_2,0) \mid x_1,x_2 \in \mathbf{R}\}$ задано функціонал $f(x) = \alpha x_1 + \beta x_2, x = (x_1,x_2,0) \in G$, де $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$ – фіксовані. Описати всі лінійні продовження F функціонала f на $\mathbf{R}^3$. Для яких із цих продовжень $||F|| = ||f||$, якщо $\mathbf{R}^3$ розглядати з нормою $||\cdot||_p,\ 1 \le p \le +\infty$? У яких випадках продовження, що зберігає норму, єдине?

5. Нехай $\alpha > 0$ – задане, $G := \{(x,x) \mid x \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^2,\ f((x,x)) = \alpha x,\ (x,x) \in G$. Описати всі лінійні продовження F функціонала f на $\mathbf{R}^2$. Для яких із цих продовжень $||F|| = ||f||$, якщо $\mathbf{R}^2$ розглядати з нормою $||\cdot||_p,\ 1 \le p \le +\infty$? В яких випадках таке продовження єдине?

6. Нехай $f(x) := x_1,\ x \in L := \{x = (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid 2x_1 - x_2 = 0\}$. Довести, що існує єдине продовження F функціонала f на евклідів простір $\mathbf{R}^2$, яке зберігає евклідову норму. Знайти це продовження.

7. 1) Нехай G – підпростір гільбертового простору H і $f \in G^*$. Описати всі лінійні неперервні продовження F функціонала f на H. Які з них зберігають норму?

2) Завдання п. 1 для $G = \{x \in H \mid (x,h) = 0\},\ f(x) = (x,a)$, $x \in G$, де $a,h \in H$ – фіксовані елементи.

3) Завдання п. 1 для $G = \{x \in H \mid (x,h_i) = 0,\ 1 \le i \le n\}$, $f(x) = (x,a),\ x \in G$, де $a \in H$ – фіксований елемент, $\{h_i : 1 \le i \le n\} \subset H$ – ортонормована система.

8. Нехай $(T,\mathcal{F},\mu)$ – простір із σ-скінченною мірою, $A \in \mathcal{F}$, $1 \le p < +\infty$, $G := \{x \in L_p(T,\mathcal{F},\mu) \mid x(t) = 0 \text{ для майже всіх } t \in T \setminus A\}$, $a \in L_q(A),\ q$ – спряжений індекс до p. Описати всі лінійні неперервні продовження F на $L_p(T, \mathcal{F}, \mu)$ функціонала $f(x) = \int\limits_A a(t)x(t)d\mu(t),\ x \in G$. Для яких із цих продовжень $||F|| = ||f||$?

9. Розглянемо c_0 як підпростір простору c. Описати всі лінійні неперервні продовження функціонала $f \in c_0^*$ на c. Які з них зберігають норму?

10. Нехай $G = \{x \in C([0,1]) \mid x(0) = 0\}$. Побудувати лінійний неперервний функціонал на $C([0,1])$, який дорівнює нулю на G і набуває значення 2 на функції $x_0(t) = t + 1,\ t \in [0,1]$.

11. Нехай $G = \{x \in C([0,1]) \mid x(0) = x(1) = 0\}$, $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t,\ t \in [0,1]$. Побудувати лінійний неперервний функціонал на $C([0,1])$, який дорівнює нулю на G і такий, що 1) $f(x_1) = 2,\ f(x_2) = 3$; 2) $f(x_1) = 2,\ ||f|| = 2,\ f(x_2) \le 0$.

12. Нехай A – вимірна за Лебегом множина додатної міри на $[0,1]$ і $G = \{x \in L_2([0,1]) \mid x = 0 \text{ м.с. на} A\}$. Побудувати функціонал $f \in (L_2([0,1]))^*$, рівний нулю на G і такий, що $f(x_0) = 1$, де $x_0(t) = t,\ t \in [0,1]$. Чи єдиний такий функціонал?

13. Нехай X – ЛНП, G – лінійна множина в X, яку будемо розглядати як ЛНП з нормою, індукованою нормою в X. 1) Нехай G – скрізь щільна в X. Довести, що $G^* = X^*$. 2) Чи правильне обернене твердження?

14. Нехай $\Phi := \{x \in l_2 \mid \exists n \in \mathbf{N}\ :\ x_k = 0,\ k \ge n\}$ (множина фінітних елементів в l_2) з нормою $||x|| = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Описати спряжений простір Φ^*.

15. Нехай X – ЛНП, f – лінійний функціонал на X. Довести, що $f \in X^*$ тоді й тільки тоді, коли для довільної фундаментальної послідовності $\{x_n : n \ge 1\} \subset X$ послідовність $\{f(x_n)\ :\ n \ge 1\}$ збіжна в $\mathbf{K}$.

16. Нехай $P := \left\{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k t^k,\ t \in [0,1] \mid n \in \mathbf{N},\ a_0, ..., a_n \in \mathbf{C}\right\}$ – множина многочленів. З'ясувати, які з наведених лінійних функціоналів на P допускають лінійне неперервне продовження на $C([0,1])$ і, якщо продовження існують, знайти їх:

1) $f(x) = a_0$;
2) $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$;
3) $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$;
4) $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} c_k a_k$, де $N \in \mathbf{N},\ \{c_0, ..., c_N\} \subset \mathbf{R}$ – фіксовані числа.

17. Довести, що існують ненульові функціонали $F_i \in (L_\infty([-1,1]))^*$, $i = 1, 2, 3, 4$, такі, що:

1) $F_1(x) = x(0)$, якщо $x \in C([-1,1])$;

2) $F_2(x) = x(0)$, якщо $x \in L_\infty([-1,1])$ і x неперервна в т. 0;
3) $F_3(x) = 0$, якщо $x \in L_\infty([-1,1])$ і x неперервна в т. 0;
4) $F_4(x) = 0$, якщо $x \in L_\infty([-1,1])$ і $x = 0$ м.с. на $[-1,0]$ або неперервна в т. 0;

18. 1) Довести, що існує функціонал $F \in l_\infty^*$ такий, що $F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n,\ x \in c$; 2) Довести, що включення $l_1 \subset l_\infty^*$ строге.

19. Довести, що існує функціонал $F \in l_\infty^*$ такий, що: $F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n,$ $x \in c;\ F(x) = 0,\ x = (0, x_2, 0, x_4, 0, ...)$.

20. Довести, що включення $L_1([a,b]) \subset (L_\infty([a,b]))^*$ строге.

21. Маємо міркування: "Оскільки $c_0 \subset l_\infty$, то за задачею 29 з розділу 3 $l_\infty^* \subset c_0^*$. Згідно із задачею 21 з розділу 3 $c_0^* = l_1$. Отже, $l_\infty^* \subset l_1$.". Отримане включення хибне, бо суперечить задачі 18.2). Де помилка?

22. 1) Нехай l_∞ – дійсний банахів простір, $G := \{(x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, ...) \mid x \in l_\infty\}, e := (1,1,1,...)$. Довести, що існує функціонал $f \in l_\infty^*$ такий, що $f(x) = 0,\ x \in \overline{G}$, $f(e) = 1, ||f|| = 1$. Функціонал f називають банаховою границею і позначають $LIMx_n := f(x),\ x \in l_\infty$.

2) Довести, що: а) $LIMx_n = LIMx_{n+1},\ x \in l_\infty$; б) $LIMx_n \geq 0$, якщо $x_n \geq 0,\ n \geq 1$; в) якщо $x_n \to a,\ n \to \infty$, то $LIMx_n = a$; г) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \leq LIMx_n \leq \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$; д) існує $x \in l_\infty$ такий, що $\forall N \geq 1\ \exists n \geq N\ :\ x_n = 1$ і $LIMx_n = 0$.

23. Нехай $B([0,+\infty))$ – лінійний простір обмежених дійсних функцій на $[0,+\infty)$ з нормою $||x|| = \sup\limits_{t\geq 0} |x(t)|,\ x \in B([0,+\infty))$. Довести, що існує функціонал $LIM \in (B([0,+\infty)))^*$ такий, що:

1) $\forall s > 0\ :\ LIMx(\cdot + s) = LIMx(\cdot),\ x \in B([0,+\infty))$;
2) $LIMx(\cdot) \geq 0$ якщо $x(t) \geq 0,\ t \geq 0$;
3) Якщо $x(t) \to a,\ t \to +\infty$, то $LIMx(\cdot) = a$;
4) $\varliminf\limits_{t\to+\infty} x(t) \leq LIMx(\cdot) \leq \varlimsup\limits_{t\to+\infty} x(t),\ x \in B([0,+\infty))$;
5) $\inf\limits_{t\in[0,+\infty)} x(t) \leq LIMx(\cdot) \leq \sup\limits_{t\in[0,+\infty)} x(t),\ x \in B([0,+\infty))$.

24. Нехай X – ЛНП, $G \subset X$ – підпростір, X^* – строго нормований простір. Довести, що для кожного функціонала з G^* існує єдине продовження з X^*, яке зберігає норму.

25*. Нехай f – лінійний неперервний функціонал на підпросторі $c_0 \subset l_\infty$. Довести, що існує єдине лінійне неперервне продовження f на l_∞ зі збереженням норми.

26. Нехай X – ЛНП, A – деяка множина індексів. Системи $\{x_\alpha : \alpha \in A\} \subset X$, $\{f_\alpha : \alpha \in A\} \subset X^*$ називають *біортогональними*, якщо $f_\alpha(x_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta \in A$, де $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера ($\delta_{\alpha\beta} = 0$, $\alpha \neq \beta$, $\delta_{\alpha\alpha} = 1$).

1) Нехай $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$ – лінійно незалежна система. Довести, що існує біортогональна до неї система.

2) Чи правильне твердження п.1 для нескінченної системи лінійно незалежних елементів простору X?

3) Нехай $\{x_\alpha : \alpha \in A\} \subset X$, $\{f_\alpha : \alpha \in A\} \subset X^*$ – біортогональні системи. Чи правильно, що система $\{x_\alpha : \alpha \in A\} \subset X$ лінійно незалежна? система $\{f_\alpha : \alpha \in A\} \subset X^*$ лінійно незалежна?

4)* За якої умови на лінійно незалежну систему $\{x_\alpha : \alpha \in A\} \subset X$ існує біортогональна до неї система?

5)* Нехай $\{f_1, ..., f_n\} \subset X^*$ – лінійно незалежна система. Довести, що в X існує біортогональна до неї система.

27. Нехай X – ЛНП, $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$ – лінійно незалежна система і $c_1, ..., c_n \in \mathbf{R}$. Довести існування функціонала $f \in X^*$ такого, що $f(x_k) = c_k$, $k = 1, ..., n$.

28. Нехай X – ЛНП, $\{x_n : n \geq 1\} \subset X, \{c_n : n \geq 1\} \subset \mathbf{R}, M > 0$. Довести, що для існування функціонала $f \in X^*$, який задовольняє умови $f(x_n) = c_n$, $n \geq 1$ і $||f|| \leq M$, необхідно і достатньо, щоб для довільної скінченної системи $\{\lambda_1, ..., \lambda_m\} \subset \mathbf{R}$ виконувалась нерівність $\left|\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k c_k\right| \leq M \left|\left|\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k x_k\right|\right|$.

29. Чи правильно, що у ЛНП X елементи x та y рівні, якщо $f(x) = f(y)$: 1) для всіх $f \in X^*$? 2) для всіх f з деякої тотальної множини в X^*?

30. 1) Нехай X – нескінченновимірний ЛНП. Довести, що X^* – нескінченновимірний. 2) Чи правильне твердження, обернене до твердження п. 1? 3) Як пов'язані розмірності просторів X і X^*, якщо вони обидва скінченновимірні?

31. Нехай $\{x_n : n \geq 1\}$ – фіксована послідовність елементів ЛНП X, L – її лінійна оболонка. Довести, що $x \in \overline{L}$ тоді й лише тоді, коли для довільного функціонала $f \in X^*$ з того, що $f(x_n) = 0$, $n \geq 1$, випливає, що $f(x) = 0$.

32*. Довести, що ЛНП X строго нормований тоді й тільки тоді, коли для будь-якого функціонала $f \in X^*$ існує не більше одного елемента з замкненої одиничної кулі $\overline{B}(0,1)$, на якому функціонал f досягає своєї норми.

33. Нехай X – ЛНП, $x_0 \in X$ і $\forall f \in X^*$, $||f|| = 1$: $|f(x_0)| \leq 1$. Довести, що $||x_0|| \leq 1$.

34. Нехай X – ЛНП, $x \in X$. Довести, що $||x|| = \max\{|f(x)| \mid f \in X^*,\ ||f|| = 1\}$.

35. Нехай X – рефлексивний банахів простір. Довести, що модуль кожного лінійного неперервного функціонала досягає на $\overline{B}(\overline{0}, 1)$ свого найбільшого значення.

36. Нехай X – ЛНП, $G \subset X$ – підпростір, $x \in X$. Довести, що елемент $y^* \in G$ задовольняє умову $\rho(x, G) = ||x - y^*||$ тоді й тільки тоді, коли існує функціонал $f \in X^*$ такий, що $||f|| = 1,\ f(x) = ||x - y^*||$, $f(y) = 0,\ y \in G$.

37. Довести, що скінченновимірний ЛНП є рефлексивним.

38. Знайти образ $\varphi(y) \in l_\infty$ елемента $y \in c$ при вкладенні з теореми 3.

39. Довести нерефлексивність просторів c і c_0.

40***.** Довести, що підпростір рефлексивного простору рефлексивний.

41***.** Довести, що банахів простір X рефлексивний тоді й тільки тоді, коли рефлексивним є спряжений до нього простір X^*.

42***.** Нехай X – банахів простір. Нехай простір X^* сепарабельний. Довести, що простір X сепарабельний. Чи правильне обернене твердження?

43. Чи правильно, що:

1) рефлексивний ЛНП є банаховим?

2) якщо для ЛНП X множина $\varphi(X)$, де $\varphi : X \to X^{**}$ – канонічне вкладення з теореми 3, скрізь щільна в X^{**}, то X рефлексивний?

44. Довести, що функціонал $F(g) := \int\limits_0^{\frac{1}{2}} dg(t),\ g \in BV_0([0,1])$, є лінійним і неперервним на $(C([0,1]))^*$. Вивести звідси нерефлексивність простору $C([0,1])$.

45. З тверджень яких задач цього розділу випливає нерефлексивність простору $1) C([0,1]);\ 2) l_1$?

46. З'ясувати геометричний зміст: 1) наслідку 1 теореми 2 (Гана–Банаха) у $\mathbf{R}^3$, якщо G – пряма, що проходить через початок координат; 2) наслідку 2 теореми 2 (Гана–Банаха) у $\mathbf{R}^2$ і $\mathbf{R}^3$.

47. Нехай X – ЛНП, $M \subset X$ – довільна множина. Покладемо $M^\perp := \{f \in X^* \mid f(x) = 0,\ x \in M\}$.

1) Довести, що $M^\perp$ – підпростір в X;

2) Що являє собою $M^\perp$, якщо X – гільбертів простір?

3) Довести, що $\left\{x \in X \mid f(x) = 0,\ f \in M^\perp\right\} =$ з.л.о.(M).

4) Довести, що $M^{\perp\perp} = M$ (точніше, $M^{\perp\perp} = \varphi(M)$, де $\varphi : X \to X^{**}$ – канонічне вкладення з теореми 3), якщо X – рефлексивний простір, $M \subset X$ – підпростір.

5) Чи справедливе твердження пункту 4 для нерефлексивного простору X?

6) Довести, що $M^{\perp\perp} \cap X$ =з.л.о.(M) (точніше, $M^{\perp\perp} \cap \varphi(X) = \varphi($з.л.о.$(M))$.

48. Нехай X – банахів простір, $M \subset X^*$. Розглянемо такі твердження: а) M – тотальна множина в X^*; б) якщо $x \in X$ таке, що $f(x) = 0$ для будь-якого $f \in M$, то $x = 0$.

1) Довести, що з (а) випливає (б);
2) Довести, що з (б) випливає (а), якщо X – рефлексивний;
3) Побудувати приклад, що доводить істотність умови рефлексивності у пункті 2;
4) Нехай X є спряженим до деякого банахового простору і з (б) випливає (а). Довести, що простір X рефлексивний.

49. Довести, що кожна замкнена куля з центром у точці 0 у дійсному ЛНП є перетином деякої сім'ї півпросторів виду $\{x \in X \mid f(x) \le c\}$, де $f \in X^*,\ c \in \mathbf{R}$.

50. 1) Нехай X – ЛНП, G – гіперпідпростір в $X,\ z \in X \setminus G$. Довести, що $\forall x \in X\ \exists! y \in G\ \exists! \lambda \in \mathbf{R}\ :\ x = y + \lambda z$. 2) За якої умови на $x_0 \in X$ гіперплощина $x_0 + G$ є гіперпідпростором у X?

51. Нехай X – ЛНП. Довести, що: 1) множина $G \subset X$ є гіперпідпростором тоді й тільки тоді, коли існує функціонал $f \in X^*$ такий, що $G = \operatorname{Ker} f$. 2) множина $M \subset X$ є гіперплощиною тоді й тільки тоді, коли існують функціонал $f \in X^*$ і число $\lambda \in \mathbf{K}$ такі, що $M = \{x \in X \mid f(x) = \lambda\}$.

52. Нехай X – лінійний простір. Довести, що:

1) функціонал $p : X \to \mathbf{R}$ є напівнормою тоді й лише тоді, коли p – напівадитивний однорідний функціонал;
2) якщо p – напівнорма, то $|p(x) - p(y)| \le p(x - y),\ x, y \in X$;
3) якщо f – лінійний функціонал на X, то функціонал $p(x) := |f(x)|$,
   $x \in X$, є напівнормою;
4) якщо p – напівнорма, f – лінійний функціонал на X такий, що $f(x) \le p(x),\ x \in X$, то $|f(x)| \le p(x),\ x \in X$.

За якої умови напівнорма є нормою?

53. Нехай p – напівадитивний додатно однорідний функціонал на дійсному лінійному просторі X. Довести, що: 1) p – не обов'язково напівнорма; 2) твердження задачі 52.4 хибне.

54. Якщо в комплексному лінійному просторі X розглянути операції додавання та множення на дійсні числа, то отримаємо дійсний лінійний простір, який позначають $X_{\mathbf{R}}$ і називають асоційованим із X дійсним простором. Нехай p – напівнорма на X. Довести, що:

1) Якщо f – лінійний функціонал на $X,\ |f(x)| \le p(x),\ x \in X,$ $g(x) := \mathrm{Re} f(x),\ h(x) := \mathrm{Im} f(x),\ x \in X,$ то g, h – лінійні функціонали на $X_{\mathbf{R}},\ |g(x)| \le p(x),\ |h(x)| \le p(x),\ x \in X$ а також $h(x) = -g(ix),\ x \in X.$
2) Якщо g – лінійний функціонал на $X_{\mathbf{R}},\ |g(x)| \le p(x),\ x \in X,$ $f(x) := g(x) - ig(ix),\ x \in X,$ то f – лінійний функціонал на $X,$
$|f(x)| \le p(x),\ x \in X.$
3) Довести теорему 5, користуючись теоремою 4.

55. Нехай X – комплексний ЛНП, $X_{\mathbf{R}}$ – ЛНП, асоційований з X. Гіперплощину M_0 в $X_{\mathbf{R}}$ називають дійсною гіперплощиною в X. Довести, що:

1) якщо M_0 дійсна гіперплощина, то iM_0 також дійсна гіперплощина в X;
2) множина $M \subset X$ є гіперпідпростором в X тоді й тільки тоді, коли $M = M_0 \cap (iM_0)$, де M_0 – дійсний гіперпідпростір в X, який визначається однозначно;
3) множина $M \subset X$ є гіперплощиною в X тоді й тільки тоді, коли $M = M_1 \cap M_2$, де M_1, M_2 – дійсні гіперплощини в X, визначені однозначно.

56. Нехай X – дійсний лінійний простір, $p : X \to \mathbf{R}$ – напівадитивна додатно однорідна функція. Довести, що існує лінійний функціонал $F : X \to \mathbf{R}$ такий, що $F(x) \le p(x),\ x \in X.$

57. Нехай l_∞ – дійсний лінійний простір обмежених послідовностей. Покладемо для $x \in l_\infty$ $\pi(x; n_1, ..., n_k) := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{1}{k} \sum\limits_{j=1}^{k} x_{n+n_j},$ $p(x) := \inf \pi(x; n_1, ..., n_k)$, де точна нижня межа береться за всіма скінченними наборами натуральних чисел $n_1, ..., n_k$.

1) Довести, що p – напівадитивний додатно однорідний функціонал на l_∞.

2) Довести, що існує лінійний функціонал f на l_∞ такий, що: а) $f(x) = 1,\ x = (1, 1, ...)$; б) $f(x_1, x_2, ...) = f(x_2, x_3, ...),\ x \in l_\infty$; в) $f(x) \ge 0$ якщо $x_n \ge 0,\ n \ge 1$. Такий функціонал позначають $LIM(x) := f(x)$.

3) Довести, що функціонал LIM задовольняє умови: а) Якщо $x_n \to a$, $n \to \infty$, то $LIM(x) = a$; б) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \le LIM(x) \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

58. Нехай $B([0, +\infty))$ – лінійний простір обмежених дійсних функцій на $[0, +\infty)$. Покладемо для $x \in B([0, +\infty))$: $\pi(x; \alpha_1, ..., \alpha_k) := \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \frac{1}{k} \sum\limits_{j=1}^{k} x(t + \alpha_j),\ p(x) := \inf \pi(x; \alpha_1, ..., \alpha_k)$, де точна нижня межа береться за всіма скінченними наборами додатних дійсних чисел $\alpha_1, ..., \alpha_k$.

1) Довести, що p – напівадитивний додатно однорідний функціонал на $B([0,+\infty))$.

2) Довести, що існує лінійний функціонал f на $B([0,+\infty))$ такий, що: а) $f(x)=1,\ x(t)=1,\ t\geq 0$; б) $\forall s>0\ :\ f(x(\cdot+s))=f(x(\cdot))$, $x\in B([0,+\infty))$; в) $f(x)\geq 0$ якщо $x(t)\geq 0,\ t\geq 0$. Такий функціонал позначають $LIM(x):=f(x)$.

3) Довести, що функціонал LIM задовольняє умови: а) Якщо $x(t)\to a,\ t\to+\infty$, то $LIM(x)=a$; б) $\varliminf\limits_{t\to+\infty} x(t)\leq LIM(x)\leq \varlimsup\limits_{t\to+\infty} x(t)$; в) $\inf\limits_{t\in[0,+\infty)} x(t)\leq LIM(x)\leq \sup\limits_{t\in[0,+\infty)} x(t)$.

59. Нехай $M(\mathbf{R})$ – лінійний простір обмежених дійсних функцій на $\mathbf{R}$ з періодом 1. Покладемо для $x\in M(\mathbf{R})\ :\ \pi(x;\alpha_1,...,\alpha_k):=\sup\limits_{t\in\mathbf{R}}\frac{1}{k}\sum\limits_{j=1}^{k}x(t+\alpha_j),\ p(x):=\inf\pi(x;\alpha_1,...,\alpha_k)$, де точна нижня межа береться за всіма скінченними наборами додатних дійсних чисел $\alpha_1,...,\alpha_k$. Довести, що:

1) p – півадитивний додатно однорідний функціонал на $M(\mathbf{R})$;

2) існує лінійний функціонал F на $M(\mathbf{R})$ такий, що $F(x)\leq p(x),\ x\in M(\mathbf{R})$;

3) функціонал $f(x):=\frac{1}{2}(F(x)+F(\tilde{x})),\ \tilde{x}(t):=x(1-t),\ t\in\mathbf{R}$, задовольняє наступні умови: а) f – лінійний; б) якщо $x(t)\geq 0$, $t\in[0,1]$, то $f(x)\geq 0$; в) $\forall x\in M(\mathbf{R})\ \forall t_0\in\mathbf{R}\ :\ f(x(\cdot+t_0))=f(x(\cdot))$; г) $f(x(1-\cdot))=f(x(\cdot))$; д) якщо $x_0(t)=1,\ t\in[0,1]$, то $f(x_0)=1$;

4) якщо $x(t)=\chi_{[a,b]}(t),\ t\in[0,1],\ 0\leq a<b\leq 1$, то $f(x)=b-a$;

5) функціонал f, що задовольняє умови (а-д), збігається з інтегралом Рімана для функцій, інтегровних за Ріманом;

6) Функціонал f, що задовольняє умови (а-д), можна вибрати так, щоб він збігався з інтегралом Лебега для функцій, інтегровних за Лебегом.

60. 1) Довести, що кожній множині $A\subset[0,1]$ можна зіставити число $\mu(A)$ – "міру"множини A – так, що для довільних $A\subset[0,1],\ B\subset[0,1]$ виконуються умови: а) $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$, якщо $A\cap B=\varnothing$; б) $\mu(A)\geq 0$; в) якщо A і B конгруентні (тобто суміщаються при паралельному перенесенні або центральній симетрії), то $\mu(A)=\mu(B)$; г) $\mu([0,1])=1$.

2) Нехай множина $A\subset[0,1]$ вимірна за Жорданом. Довести, що $\mu(A)$ рівна мірі Жордана множини A.

3) Довести, що функціонал $\mu:2^{[0,1]}\to\mathbf{R}$, який задовольняє умови (а-г), можна вибрати так, щоб він збігався з мірою Лебега для вимірних за Лебегом множин.

РОЗДІЛ 5
СЛАБКА ЗБІЖНІСТЬ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Теорема 1 (Банаха--Штейнгауза; принцип рівномірної обмеженості). Нехай X – банахів простір, $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ – сукупність функціоналів з X^*, обмежена в кожній точці, тобто $\forall x \in X \ \exists C_x > 0 \ \forall \alpha \in A \ : \ |f_\alpha(x)| \leq C_x$. Тоді сукупність норм цих функціоналів обмежена, тобто $\exists C > 0 \ \forall \alpha \in A \ : \ ||f_\alpha|| \leq C$.

Нехай X – ЛНП. Послідовність функціоналів $\{f_n : n \geq 1\} \subset X^*$ називають $*$-слабко збіжною до функціонала $f \in X^*$, якщо $f_n(x) \to f(x)$, $n \to \infty$ для кожного $x \in X$. Позначення: $f_n \xrightarrow{*-w} f$.

Послідовність функціоналів $\{f_n : n \geq 1\} \subset X^*$ називають сильно збіжною до функціонала $f \in X^*$, якщо $f_n \to f, \ n \to \infty$ в X^*, тобто $||f_n - f|| \to 0, \ n \to \infty$.

Теорема 2 (Критерій $*$-слабкої збіжності функціоналів). Нехай X – банахів простір, $\{f_n : n \geq 1\} \subset X^*, \ f \in X^*$. Тоді для того, щоб $f_n \xrightarrow{*-w} f, \ n \to \infty$, необхідно і достатньо, щоб виконувалися такі умови: 1) $\exists C > 0 \ \forall n \geq 1 \ : \ ||f_n|| \leq C$; 2) $\exists M$ – тотальна множина в X така, що $f_n(x) \to f(x), \ n \to \infty$ для всіх $x \in M$.

Теорема 3 (Про слабку повноту спряженого простору). Нехай X – банахів простір, послідовність функціоналів $\{f_n : n \geq 1\} \subset X^*$ є $*$-слабко фундаментальною, тобто для кожного $x \in X$ послідовність $\{f_n(x) : n \geq 1\}$ фундаментальна. Тоді існує функціонал $f \in X^*$ такий, що $f_n \xrightarrow{*-w} f, \ n \to \infty$.

Теорема 4 (Про слабку компактність кулі в спряженому просторі). Нехай X – сепарабельний ЛНП, $R > 0$. Тоді будь-яка послідовність функціоналів з кулі $\overline{B}(0, R) = \{f \in X^* \mid ||f|| \leq R\}$ в X^* містить підпослідовність, що $*$-слабко збігається до деякого функціонала з X^*.

Послідовність $\{x_n : n \geq 1\}$ елементів ЛНП X називають *слабко збіжною* до елемента $x \in X$, якщо $f(x_n) \to f(x), \ n \to \infty$ для довільного функціонала $f \in X^*$. Це позначають $x_n \xrightarrow{w} x$.

Послідовність $\{x_n : n \geq 1\} \subset X$ називають *сильно збіжною* до $x \in X$, якщо $x_n \to x, \ n \to \infty$ в X, тобто $||x_n - x|| \to 0, \ n \to \infty$.

Послідовність $\{x_n : n \geq 1\} \subset X$ називають *слабко обмеженою*, якщо для довільного функціонала $f \in X^*$ послідовність $\{f(x_n) : n \geq 1\}$ обмежена.

Послідовність $\{x_n : n \geq 1\} \subset X$ називають *слабко фундаментальною*, якщо для довільного функціонала $f \in X^*$ послідовність $\{f(x_n) : n \geq 1\}$ фундаментальна.

Теорема 5 (Критерій слабкої збіжності елементів). Нехай X – ЛНП, $\{x_n : n \geq 1\} \subset X,\ x \in X$. Тоді для того, щоб $x_n \xrightarrow{w} x$, необхідно і достатньо, щоб виконувалися такі умови:

1) $\exists C > 0\ \forall n \geq 1\ :\ ||x_n|| \leq C$;

2) $\exists M$ – тотальна множина в X^* така, що

$$\forall f \in M\ :\ f(x_n) \to f(x),\ n \to \infty.$$

Рекомендуємо звернути увагу на задачі 1,7,8, які дають критерії слабкої збіжності у просторах $L_p([a,b])$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$, l_p, $1 < p < \infty$, $C([a,b])$, а також на задачу 2, що встановлює зв'язок між сильною і слабкою збіжністю елементів ЛНП.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

1. Нехай $1 < p < +\infty$, $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ...) \in l_p$, $n \geq 1$; $x = (x_1, x_2, ...) \in l_p$. Довести, що $x^{(n)} \xrightarrow{w} x$ в l_p тоді й тільки тоді, коли виконуються наступні умови: 1) $\exists C > 0\ \forall n \geq 1\ :\ ||x^{(n)}|| \leq C$; 2) $\forall k \geq 1\ :\ x_k^{(n)} \to x_k,\ n \to \infty$.

Р о з в ' я з о к. Скористаємось критерієм слабкої збіжності (теоремою 5). Нехай $f_k(x) = x_k,\ x = (x_1, x_2, ...) \in l_p$ і $M := \{f_n : n \geq 1\}$. Оскільки множина $\{e_n : n \geq 1\}$ тотальна в l_q, q – спряжений індекс до p, то, внаслідок ізометричного ізоморфізму між l_p^* і l_q, отримуємо, що множина M тотальна в l_p^*. Тому умови (2) з задачі і теореми 5 рівносильні.

2. Довести, що у ЛНП кожна сильно збіжна послідовність є слабко збіжною. Показати, що обернене твердження хибне.

Р о з в ' я з о к. Нехай X -- лінійний нормований простір, послідовність $\{x_n : n \geq 1\}$ збігається в X за нормою до $x \in X$. Тоді для довільного $f \in X^*$ отримаємо, що $|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leq ||f|| \cdot ||x_n - x|| \to 0,\ n \to \infty$, тобто $f(x_n) \to f(x),\ n \to \infty$. Отже, $x_n \xrightarrow{w} x,\ n \to \infty$.

Обернене твердження хибне, що показує наступний приклад. Нехай $X = l_2,\ x^{(n)} := e_n,\ n \geq 1$. Тоді послідовність $\left\{x^{(n)}\ :\ n \geq 1\right\}$ не збігається в l_2 (див. задачу 3.3 з розділу 1). Покажемо, що $x^{(n)} \xrightarrow{w} 0,\ n \to \infty$.

Перший спосіб. Скористаємось критерієм слабкої збіжності в l_2 (задача 1). Маємо: 1) $||x^{(n)}|| = 1,\ n \geq 1$ (можна покласти $C := 1$); 2) $\forall k \geq 1\ :$ $x_k^{(n)} = 0,\ n \geq k+1$, тому $x_k^{(n)} \to 0,\ n \to \infty$. З умов (1) і (2) випливає, що $x^{(n)} \xrightarrow{w} 0,\ n \to \infty$.

Другий спосіб. Скористаємось означенням. Якщо $f \in l_2^*$, то $\exists a \in l_2\ :$ $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \overline{a_n},\ x \in l_2$. Тому $f(x^{(n)}) = \overline{a_n} \to 0 = f(0),\ n \to \infty$, бо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^2$ збігається. Отже, $x^{(n)} \xrightarrow{w} 0,\ n\to\infty$.

3. Дослідити наведені послідовності на слабку та сильну збіжність у ЛНП X (для збіжних послідовностей знайти границі):

1) $X = l_p,\ 1 \le p < +\infty,\ x^{(n)} = (\underbrace{0,...,0,\frac{n}{n+1}}_{n},0,...)$;

2) $X = l_p,\ 1 \le p < +\infty,\ x^{(n)} = (1,\frac{1}{2},...,\frac{1}{n},0,...)$;

3) $X = L_p([0,1]),\ 1 \le p \le +\infty,\ x_n(t) = \begin{cases} n, & t\in[0,\frac{1}{n^2}], \\ 0, & t \in (\frac{1}{n^2},1]; \end{cases}$

4) $X = L_p([0,1]),\ 1 < p < +\infty,\ x_n(t) = \sin \pi n t,\ t\in[0,1]$;

5) $X = C([0,1]),\ x_n(t) = \frac{nt^2}{1+n^2t^4},\ t\in[0,1]$.

Р о з в ' я з о к. 1) Якщо послідовність збігається слабко (а тим більше, сильно) в $l_p,\ 1 \le p < +\infty$, то вона збігається покоординатно. (При $1 < p < +\infty$ це випливає із задачі 1, а при $p = 1$ можна безпосередньо розглянути функціонали $f_k(x) = x_k,\ x\in l_1,\ k \ge 1.$) Тому покоординатна границя даної послідовності буде єдиним "претендентом"на слабку і сильну границю.

Покоординатно дана послідовність збігається до 0, бо $\forall k \ge 1$: $x_k^{(n)} = 0,\ n \ge k+1$, отже, $x_k^{(n)} \to 0,\ n\to\infty$.

Маємо для всіх $1 \le p < +\infty$: $||x^{(n)} - 0||_p^p = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_k^{(n)} - 0)^p = \left(\frac{n}{n+1}\right)^p \to 1 \ne 0,\ n\to\infty$, тому $\left\{x^{(n)} : n\ge 1\right\}$ не збігається в l_p. Дослідимо цю послідовність на слабку збіжність.

Нехай $1 < p < +\infty$. Скористаємося критерієм слабкої збіжності в l_p (задача 1). Маємо: 1) $||x^{(n)}|| = \frac{n}{n+1} \le 1,\ n \ge 1;$ 2) покоординатна збіжність до нуля вже доведена. Тому $x^{(n)} \xrightarrow{w} 0,\ n\to\infty$.

Нехай $p = 1$. Покладемо $y := (1,1,...) \in l_\infty, f(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n, x\in l_1$. Тоді $f(x^{(n)}){=}\frac{n}{n+1}{\to}1{\ne}0{=}f(0), n\to\infty$, отже, $x^{(n)} \overset{w}{\not\to} 0, n\to\infty$, в l_1.

Зауважимо, що при $p = +\infty$ дана послідовність не збігається сильно, але збігається слабко. Останнє твердження випливає з того, що оскільки і члени послідовності, і "претендент"на границю – фінітні елементи (зокрема, вони належать замкненому підпростору c_0), то слабка збіжність цієї послідовності в l_∞ рівносильна її слабкій збіжності в c_0, далі див. задачу 9.1.

2) Знайдемо покоординатну границю. Оскільки $\forall k\ge 1$: $x_k^{(n)} = \frac{1}{k}$, $n \ge k+1$, то $x_k^{(n)} \to \frac{1}{k},\ n\to\infty$. Покладемо $x := (1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...)$ і дослідимо, чи $x^{(n)} \to x,\ n\to\infty$, в l_p.

Насамперед, бачимо, що при $1 < p \le +\infty$ елемент $x \in l_p$ (бо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ збігається при $1 < p < +\infty$, і послідовність $\left\{\frac{1}{k} \,:\, k \ge 1\right\}$ обмежена ($p = +\infty$)), а якщо $p = 1$, то $x \notin l_1$, бо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбігається. Тому при $p = 1$ послідовність не збігається слабко, а отже, не збігається сильно.

Нехай $1 < p < +\infty$. Тоді $||x^{(n)} - x||_p^p = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \to 0,\ n \to \infty$, як залишок збіжного ряду. Тому $x^{(n)} \to x,\ n \to \infty$, в l_p, а отже, $x^{(n)} \xrightarrow{w} x,\ n \to \infty$.

Нехай $p = +\infty$. Тоді $||x^{(n)} - x||_\infty = \sup\limits_{k \ge n+1} |\frac{1}{k}| = \frac{1}{n+1} \to 0,\ n \to \infty$, тому $x^{(n)} \to x,\ n \to \infty$, в l_∞, $x^{(n)} \xrightarrow{w} x,\ n \to \infty$, в l_∞.

3) Хоч ні з сильної, ні з слабкої збіжності в $L_p([0,1]),\ 1 < p < +\infty$, не випливає збіжність майже скрізь, проте якщо для даної послідовності існує границя майже скрізь, то природно саме її розглянути як "претендента"на слабку і сильну границі.

Оскільки $\forall t \in (0,1]\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall n \ge N\ :\ \frac{1}{n^2} < t$, то $x_n(t) = 0$, $n \ge N$, тому $x_n(t) \to 0 = x_0(t),\ n \to \infty$. Звідси випливає, що $x_n(t) \to x_0(t) (\mathrm{mod}\, m)$ на $[0,1]$.

Нехай $1 \le p < +\infty$. Тоді $||x_n - x_0||_p^p = \int\limits_0^1 |x_n(t) - x_0(t)|^p dt = \int\limits_0^{\frac{1}{n^2}} n^p dt = \frac{1}{n^{2-p}},\ n \ge 1$. Оскільки $\frac{1}{n^{2-p}} \to 0,\ n \to \infty$, тоді й тільки тоді, коли $1 \le p < 2$, то при цих $p\ :\ x_n \to x_0,\ n \to \infty$, в $L_p([0,1])$, а якщо $2 \le p < +\infty$, то $x_n \not\to x_0,\ n \to \infty$, в $L_p([0,1])$. Більше того, при $2 < p < +\infty$ маємо, що $\frac{1}{n^{2-p}} \to +\infty$, тому послідовність $\{x_n : n \ge 1\}$ не обмежена в $L_p([0,1])$. Звідси за критерієм слабкої збіжності (теорема 5) випливає, що дана послідовність не збігається слабко, а отже (див. задачу 2), не збігається і сильно. Якщо $p = +\infty$, то $||x_n - x_0||_\infty = \operatorname{esssup}\limits_{t \in [0,1]} |x_n(t) - x_0(t)| = \sup\limits_{t \in [0,1]} |x_n(t)| = n,\ n \ge 1$, тобто послідовність $\{x_n : n \ge 1\}$ не обмежена в $L_\infty([0,1])$. Аналогічно до попереднього звідси випливає, що дана послідовність не збігається ні сильно, ні слабко в $L_\infty([0,1])$.

Залишилось до кінця розглянути випадок $p = 2$. Ми вже довели, що $x_n \not\to x_0,\ n \to \infty$, в $L_2([0,1])$. Ураховуючи це і задачу 2.3) з розділу 1, методом від супротивного переконуємось, що послідовність $\{x_n : n \ge 1\}$ взагалі не збігається в $L_2([0,1])$ (так само цей висновок можна було зробити і при $2 < p < +\infty$). Покажемо, що $x_n \xrightarrow{w} x_0,\ n \to \infty$, в $L_2([0,1])$.

Перший спосіб. Скористаємось критерієм слабкої збіжності в $L_2([0,1])$ (див. задачу 7.1). Маємо: 1) $||x_n||_2^2 = \int\limits_0^{\frac{1}{n^2}} n^2 dt = n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 1,\ n \ge 1$ $(c := 1)$; 2)$\forall \tau \in (0,1]\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall n \ge N\ :\ \frac{1}{n^2} < \tau$, тому при $n \ge N$ $:\ \int\limits_0^\tau x_n(t)dt = \int\limits_0^{\frac{1}{n^2}} ndt = \frac{1}{n} \to 0 = \int\limits_0^\tau x_0(t)dt,\ n \to \infty$, (при $\tau = 0$ це співвідношення очевидне). З умов 1) і 2) випливає, що $x_n \xrightarrow{w} x_0,\ n \to \infty$, в $L_2([0,1])$.

Другий спосіб. Скористаємось означенням. Для кожної функції $g \in L_2([0,1])$ за нерівністю Коші–Буняковського маємо $\left|\int\limits_0^1 x_n(t)g(t)dt\right| =$

$$= \left|\int\limits_0^{\frac{1}{n^2}} ng(t)dt\right| \le \left(\int\limits_0^{\frac{1}{n^2}} n^2dt \cdot \int\limits_0^{\frac{1}{n^2}} |g(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int\limits_0^{\frac{1}{n^2}} |g(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}} \to 0,$$

$n \to \infty$, тому $\int\limits_0^1 x_n(t)g(t)dt \to 0 = \int\limits_0^1 x_0(t)g(t)dt,\ n \to \infty$, отже, $x_n \xrightarrow{w} x_0,\ n \to \infty$, в $L_2([0,1])$.

Таким чином, при $1 \le p < 2\ :\ x_n \to x_0,\ n \to \infty$, в $L_p([0,1])$, при $p = 2\ :\ x_n \xrightarrow{w} x_0,\ n \to \infty$, але не збігається сильно, а при $2 < p \le +\infty$ послідовність $\{x_n : n \ge 1\}$ не збігається ні слабко, ні сильно.

4) Покладемо $x_0(t) := 0,\ t \in [0,1]$, і, користуючись критерієм слабкої збіжності в $L_p([0,1]),\ 1 < p < +\infty$ (задача 7.1), покажемо, що $x_n \xrightarrow{w} x_0$, $n \to \infty$. Маємо: 1) $||x_n||_p^p = \int\limits_0^1 |\sin \pi nt|^p dt \le \int\limits_0^1 dt = 1,\ n \ge 1 (c := 1)$; 2) $\forall \tau \in [0,1]\ :\ \int\limits_0^\tau x_n(t)dt = \int\limits_0^\tau \sin \pi ntdt = \frac{1}{\pi n}(-\cos \pi nt)|_0^\tau = \frac{1-\cos \pi n\tau}{\pi n}$ $\to 0 = \int\limits_0^\tau x_0(t)dt,\ n \to \infty$. З умов 1) і 2) випливає, що $x_n \xrightarrow{w} x_0,\ n \to \infty$.

Покажемо, що $x_n \not\to x_0,\ n \to \infty$, в $L_p([0,1])$. Оскільки $||x_n||_1 \le ||x_n||_p$, то досить перевірити, що $||x_n||_1 \not\to 0,\ n \to \infty$. Маємо $\int\limits_0^1 |\sin \pi nt|dt \ge \int\limits_0^1 \sin^2 \pi ntdt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \cos 2\pi ntdt \to \frac{1}{2},\ n \to \infty$. Отже, $x_n \not\to x_0,\ n \to \infty$, в $L_p([0,1])$.

5) При дослідженні на слабку збіжність користуватимемось критерієм слабкої збіжності в $C([0,1])$ (задача 8). З нього випливає, що ко-

ли послідовність збігається слабко (а, тим більше, сильно (див. задачу 2) у $C([0,1])$, то вона збігається поточково, а тому поточкова границя $x_0(t) := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{nt^2}{1+n^2t^4} = 0,\ t \in [0,1]$, – єдиний "претендент"на слабку і на сильну границі.

Покажемо, що $x_n \not\to x_0,\ n \to \infty$, в $C([0,1])$. Це можна зробити безпосередньо аналогічно міркуванням задачі 3.2 розділу 1, але ми скористаємося розв'язком цієї задачі при $\alpha = 2$. Якщо t пробігає відрізок $[0,1]$, то $u := t^2$ теж пробігає відрізок $[0,1]$, тому $||x_n - x_0||_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |\frac{nt^2}{1+n^2t^4} - 0|$ $= \sup\limits_{u\in[0,1]} |\frac{nu}{1+n^2u^2}| = \frac{1}{2},\ n \geq 1$, отже, $x_n \not\to x_0,\ n \to \infty$.

Оскільки $||x_n||_\infty = \frac{1}{2}, n \geq 1$, а також $\forall t \in [0,1]\ :\ x_n(t) \to x_0(t)$, $n \to \infty$, то за критерієм слабкої збіжності в $C([0,1])\ :\ x_n \xrightarrow{w} x_0,\ n \to \infty$.

4. Довести, що послідовність функціоналів $\{f_n : n \geq 1\} \subset X^*$ є $*$-слабко збіжною, якщо:

1) $X = L_p([0,2\pi]),\ 1 < p < +\infty,\ f_n(x) = \int\limits_0^{2\pi} x(t)\sin nt dt;$

2) $X = C([0,1]),\ f_n(x) = \sqrt{n} \int\limits_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1} x(t)dt.$

Р о з в ' я з о к. 1) Покладемо $p_n(t) := \sin nt,\ t \in [0,2\pi],\ n \geq 1.$

Перший спосіб. За означенням $*$-слабка збіжність послідовності $\{f_n : n \geq 1\} \subset X^*$ до деякого $f_0 \in X^*$ рівносильна тому, що $\forall x \in L_p([0,2\pi])\ :\ \int\limits_0^{2\pi} p_n(t)x(t)dt \to \int\limits_0^{2\pi} p_0(t)x(t)dt,\ n \to \infty$, де $p_0 \in L_q([0,2\pi])$ – деяка функція (при цьому $f_0(x) = \int\limits_0^{2\pi} p_0(t)x(t)dt$, $x \in L_p([0,2\pi])$), а це, у свою чергу, рівносильно слабкій збіжності $p_n \xrightarrow{w} p_0,\ n \to \infty$, в $L_q([0,2\pi])$, де q – спряжений індекс до p. Проте аналогічно задачі 2.4 можна встановити, що $p_n \xrightarrow{w} 0 =: p_0,\ n \to \infty$, в $L_q([0,2\pi])$. Отже, $f_n \xrightarrow{*-w} 0,\ n \to \infty$, в X^*.

Другий спосіб. Можна скористатись критерієм $*$-слабкої збіжності функціоналів (теорема 2), безпосередньо перевіривши її умови. Маємо: 1) за теоремою 3 розділу 3 $||f_n|| = ||p_n||_q = \left(\int\limits_0^{2\pi} |\sin nt|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int\limits_0^{2\pi} dt\right)^{\frac{1}{q}} =$ $\sqrt[q]{2\pi},\ n \geq 1;\ 2) \forall \tau \in (0,2\pi]\ :\ f_n(\chi_{[0,\tau]}) = \int\limits_0^{\tau} \sin nt dt = \frac{1-\cos n\tau}{n} \to 0$, $n \to \infty$; множина $\left\{\chi_{[0,\tau]}\ :\ \tau \in (0,2\pi]\right\}$ – тотальна в $L_p([0,2\pi])$. За критерієм отримуємо, що $f_n \xrightarrow{*-w} 0,\ n \to \infty$, в $(L_p([0, 2\pi]))^*$.

2) Покладемо $f(x) := x(1),\ x \in C([0, 1])$, і покажемо, що $f_n \xrightarrow{*-w} f$, $n \to \infty$. Дійсно, використовуючи теорему про середнє для інтегралів Рімана,

$$\forall x \in C([0,1])\ :\ |f_n(x) - f(x)| = \left| \sqrt{n} \int\limits_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1} x(t)dt - \sqrt{n} \int\limits_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1} x(1)dt \right|$$

$\leq \sqrt{n} \int\limits_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1} |x(t) - x(1)|dt = |x(\theta_n) - x(1)|$, де $\theta_n \in [1 - \frac{1}{\sqrt{n}}, 1],\ n \geq 1$.

Оскільки $\theta_n \to 1,\ n \to \infty$, і $x \in C([0, 1])$, то $|f_n(x) - f(x)| \leq |x(\theta_n) - x(1)| \to 0,\ n \to \infty$. За означенням отримуємо, що $f_n \xrightarrow{*-w} f$, $n \to \infty$, у $(C([0, 1]))^*$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

5. Довести єдиність границі для послідовності 1) лінійних неперервних функціоналів, що $*$-слабко збігається; 2) елементів ЛНП, що слабко збігається.

6. Довести, що у скінченновимірному просторі сильна збіжність еквівалентна слабкій збіжності.

7. Нехай $1 < p < +\infty$. 1) Довести, що послідовність $\{x_n : n \geq 1\} \subset L_p([a, b])$ слабко збіжна до елемента $x \in L_p([a, b])$ тоді й тільки тоді, коли виконуються такі умови: а) $\exists C > 0\ \forall n \geq 1\ :\ ||x_n|| \leq C$; б) $\forall \tau \in [a, b]\ :\ \int\limits_a^\tau x_n(t)dt \to \int\limits_a^\tau x(t)dt,\ n \to \infty$.

2) Переконатися, що аналогічний критерій слабкої збіжності справджується в $L_p(\mathbf{R})$.

8. Довести, що послідовність $\{x_n : n \geq 1\} \subset C([a, b])$ слабко збіжна до елемента $x \in C([a, b])$ тоді й тільки тоді, коли виконуються такі умови:
1)$\exists C > 0\ \forall n \geq 1\ :\ ||x_n|| \leq C$;
2)$\forall t \in [a, b]\ :\ x_n(t) \to x(t),\ n \to \infty$.

9. Сформулювати і довести критерії слабкої збіжності у просторах: 1) c_0; 2) c.

10. Дослідити наведені послідовності на слабку та сильну збіжність у ЛНП X (для збіжних послідовностей знайти границі):

1) $X = l_p,\ 1 < p < +\infty,\ x^{(n)} = (\underbrace{0, ..., 0}_{n}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...)$;

2) $X = l_p,\ 1 < p < +\infty,\ x^{(n)} = (\underbrace{0, ..., 0}_{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, ...)$;

3) $X = l_p,\ 1 < p < +\infty,\ x^{(n)} = (\underbrace{1, ..., 1}_{n-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, ...)$;

4) $X = l_p,\ 1 < p < +\infty,\ x^{(n)} = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, ...)$;

5) $X = l_p,\ 1 < p < +\infty,\ x^{(n)} = (\frac{1+n}{1+n}, ..., \frac{1+n}{1+kn}, ...)$;

6) $X = l_p,\ 1 \le p < +\infty,\ x^{(n)} = (\frac{1}{2}, \frac{2}{2^2}, ..., \frac{n}{2^n}, \frac{1}{(n+1)^2}, \frac{1}{(n+2)^2}, ...)$;

7) $X = l_p,\ 1 \le p < +\infty,$
$x^{(n)} = (1, 0, \frac{1}{3^2}, 0, \frac{1}{5^2}, ..., 0, \frac{1}{(2n-1)^2}, \frac{1}{(2n)^2}, \frac{1}{(2n+1)^2}, ...)$;

8) $X = l_\infty,\ x^{(n)} = (\underbrace{0, ..., 0}_{n-1}, \ln n, 0, 0, ...)$;

9) $X = L_p([0,1]),\ 1 \le p < +\infty,\ x_n(t) = t^n$;

10) $X = L_p([0,1]),\ 1 \le p \le +\infty,\ x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n}, & t \in [0, \frac{1}{n}) \\ 0, & t \in [\frac{1}{n}, 1], \end{cases}$;

11) $X = L_p([0,1]),\ 1 < p < +\infty,\ x_n(t) = e^{int}$;

12) $X = L_p([0,1]),\ 1 < p < +\infty,\ x_n(t) = \sin(t \cdot \ln n)$;

13) $X = L_p([0,1]),\ 1 < p < +\infty,\ x_n(t) = \cos(n^2 t)$;

14) $X = L_p([0,1]),\ 1 < p < +\infty,\ x_n(t) = \sin(2^n t)$;

15) $X = L_p([0,1]),\ 1 < p < +\infty,\ x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n} - n\sqrt{n}t, & t \in [0, \frac{1}{n}) \\ 0, & t \in [\frac{1}{n}, 1], \end{cases}$;

16) $X = L_p([0,1]),\ 1 < p \le +\infty,\ x_n(t) = \begin{cases} 2n(1 - nt), & t \in [0, \frac{1}{n}) \\ 0, & t \in [\frac{1}{n}, 1], \end{cases}$;

17) $X = L_p([0,1]),\ 1 \le p < +\infty,\ x_n(t) = \sin(t^n)$;

18) $X = L_p(\mathbf{R}),\ 1 \le p \le +\infty,\ x_n(t) = \sqrt[4]{n}\chi_{[n, n+\frac{1}{n}]}(t)$;

19) $X = L_p(\mathbf{R}),\ 1 < p < +\infty,\ x_n(t) = \chi_{[n, n+1]}(t)$;

20) $X = L_p(\mathbf{R}),\ 1 \le p \le +\infty,\ x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\chi_{[n, 2n]}(t)$.

11. Дослідити наведені послідовності в $C([0,1])$ на слабку та сильну збіжність:

1) $x_n(t) = t^n - t^{3n}$;

2) $x_n(t) = e^{-\frac{t}{n}}$;

3) $x_n(t) = e^{-nt}$;

4) $x_n(t) = te^{-nt}$;

5) $x_n(t) = nte^{-nt}$;

6) $x_n(t) = \frac{n^2 t}{1 + n^4 t^2}$;

7) $x_n(t) = \frac{n^3 t^2}{1 + 4n^4 t^4}$.

12*. Дослідити наведені послідовності $\{x_n : n \ge 1\}$ на слабку та сильну збіжність у ЛНП X, якщо:

1) $X = L_2([0,1]),\ x_n(t) = \sin(nt^2)$;

2) $X = L_2([0,1]),\ x_n(t) = \sin(ne^t)$;

3) $X = L_p([0,+\infty)),\ 1 < p < +\infty,\ x_n(t) = x_0(2^n t)$, де $x_0(t) = (-1)^k,\ x \in [k, k+1),\ k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$;

4) $X = L_1(\mathbf{R}),\ x_n(t) = \chi_{[n,n+1]}(t)$;

5) $X = l_1,\ x_n = e_n$.

13. Довести, що послідовність функціоналів $\{f_n : n \geq 1\} \subset X^*$ є $*$-слабко збіжною, і з'ясувати, чи збігається вона сильно (за нормою), якщо:

1) $X = L_2([0,1]),\ f_n(x) = \int\limits_0^1 \cos 2\pi n t x(t) dt$;

2) $X = L_2([0,1]),\ f_n(x) = \int\limits_0^1 e^{2\pi i n t} x(t) dt$;

3) $X = C([0,1]),\ f_n(x) = n \int\limits_0^{\frac{1}{n}} (1 - 2nt) x(t) dt$;

4) $X = C([0,1]),\ f_n(x) = n \int\limits_0^1 x(t) t^n dt$;

5) $X = C^1([-1,1]),\ f_n(x) = \frac{n}{2}(x(\frac{1}{n}) - x(-\frac{1}{n}))$.

14. Нехай X – простір $C^1([-1,1])$ з нормою $||x|| = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$, $f_n(x) := \frac{n}{2}(x(\frac{1}{n}) - x(-\frac{1}{n})),\ x \in X$. Довести, що: 1) для кожного $x \in C^1([-1,1])$ послідовність $\{f_n(x) : n \geq 1\}$ збіжна і знайти її границю; 2) послідовність $\{||f_n|| : n \geq 1\}$ не обмежена. Як узгоджуються ці твердження з принципом рівномірної обмеженості?

15. Побудувати приклад ЛНП X і $*$-слабко збіжної послідовності $\{f_n : n \geq 1\} \subset X^*$, для якої послідовність $\{||f_n|| : n \geq 1\}$ необмежена.

16. Нехай X – банахів простір, $\{f_n : n \geq 1\} \subset X^*,\ f, g \in X^*$, $f_n \xrightarrow{w} f,\ f_n \xrightarrow{*-w} g, n \to \infty$. Довести, що $f = g$.

17. 1) Нехай функціонали $\{f_n : n \geq 1\} \subset (c_0)^*$ задані таким чином: $f_k(x) := x_k,\ x \in c_0,\ k \in \mathbf{N}$. Довести, що $f_n \xrightarrow{*-w} 0$, але $f_n \overset{w}{\not\to} 0,\ n \to \infty$.

2) Нехай функціонали $\{f_n : n \geq 1\} \subset (l_1)^*$ задані таким чином: $f_k(x) := \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} x_{2n},\ x \in l_1,\ k \in \mathbf{N}$. Довести, що $f_n \xrightarrow{*-w} 0$, але $f_n \overset{w}{\not\to} 0,\ n \to \infty$.

3) Нехай функціонали $\{f_n : n \geq 1\} \subset (C([0,1]))^*,\ f \in (C([0,1]))^*$, задані таким чином: $f_k(x) := x(\frac{1}{k}),\ x \in C([0,1]),\ k \in \mathbf{N}$, $f(x) = x(0),\ x \in C([0,1])$. Довести, що $f_n \xrightarrow{*-w} f$, але $f_n \overset{w}{\not\to} f,\ n \to \infty$.

18. Нехай H – гільбертів простір, $x, x_n \in H,\ n \geq 1$. Довести, що: 1) $x_n \xrightarrow{w} x$ тоді й тільки тоді, коли $(x_n, a) \to (x, a), n \to \infty$, для всіх $a \in H$; 2) якщо $x_n \xrightarrow{w} x,\ y_n \to y$ за нормою, то $(x_n, y_n) \to (x, y),\ n \to \infty$; 3) кожна ортонормована послідовність слабко збігається до нуля; 4) $x_n \to x$ за нормою, якщо $x_n \xrightarrow{w} x$ і виконується одна з таких умов: а)$||x_n|| \to ||x||$; б) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} ||x_n|| \leq ||x||$.

19. Нехай H – гільбертів простір. Побудувати приклади послідовностей $\{x_n : n \geq 1\} \subset H,\ \{y_n : n \geq 1\} \subset H$ таких, що: 1) $x_n \xrightarrow{w} x,\ y_n \xrightarrow{w} y$, де $x, y \in H$; але $(x_n, y_n) \not\to (x, y)$. 2) $x_n \xrightarrow{w} x,\ y_n \xrightarrow{w} y$, де $x, y \in H,\ x_n \not\to x,\ y_n \not\to y$ в H; але $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

20. Нехай $\{x_n : n \geq 1\}$ – ортогональна система в гільбертовому просторі H. Довести еквівалентність таких тверджень: 1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ збігається сильно; 2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ збігається слабко; 3) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||x_n||^2$ збігається.

21. 1) Нехай X – банахів простір, послідовність $\{f_n : n \geq 1\} \subset X^*$ така, що $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$ існує для всіх $x \in X$. Довести, що $f \in X^*$ і $||f|| \leq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} ||f_n||$. 2) Нехай X – ЛНП, послідовність $\{x_n : n \geq 1\} \subset X^*$ слабко збігається до $x \in X$. Довести, що $||x|| \leq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} ||x_n||$.

22. Нехай X – банахів простір, послідовність $\{f_n : n \geq 1\} \subset X^*$. Довести, що для того, щоб існував функціонал $f \in X^*$, для якого $f_n \xrightarrow{*-w} f$, необхідно і достатньо, щоб виконувалися такі умови: 1) $\exists C > 0\ \forall n \geq 1\ :\ ||f_n|| \leq C$; 2) існує тотальна в X множина M така, що послідовність $\{f_n(x)\ :\ n \geq 1\}$ фундаментальна для кожного $x \in M$.

23. Нехай X – рефлексивний банахів простір, послідовність $\{x_n : n \geq 1\} \subset X$. Довести, що коли послідовність $\{f(x_n)\ :\ n \geq 1\}$ фундаментальна для кожного $f \in X^*$, то існує $x \in X$ такий, що $x_n \xrightarrow{w} x$.

24. Нехай X – рефлексивний банахів простір, послідовність $\{x_n : n \geq 1\} \subset X$. Довести, що коли $\exists C > 0\ \forall n \geq 1\ :\ ||x_n|| \leq C$, то існують підпослідовність $\{x_{n_k}\ :\ k \geq 1\}$ послідовності $\{x_n : n \geq 1\}$ та елемент $x \in X$ такі, що $x_{n_k} \xrightarrow{w} x$.

25. Довести, що наведені банахові простори не повні відносно слабкої збіжності: 1) $C([0, 1])$; 2) c_0; 3) c.

26. Нехай X – банахів простір, $x, x_n \in X,\ f, f_n \in X^*,\ n \geq 1$. Довести, що $f_n(x_n) \to f(x)$, якщо виконується одна з умов:

1) $x_n \to x,\ f_n \to f$ за нормою;

2) $x_n \xrightarrow{w} x,\ f_n \to f$ за нормою;

3) $f_n \xrightarrow{*-w} f,\ x_n \to x$ за нормою.

27. Нехай X – сепарабельний ЛНП, послідовність $\{x_n : n \geq 1\} \subset X$ слабко збігається до $x \in X$. Нехай також $f_n(x_n) \to f(x),\ n \to \infty$ для довільного функціонала $f \in X^*$ і кожної послідовності $\{f_n : n \geq 1\} \subset X^*$, яка $*$-слабко збігається до f. Довести, що $x_n \to x$ за нормою.

28. Нехай X – ЛНП. Множину $M \subset X$ називають *слабко замкненою*, якщо для кожного $x \in X$ з того, що $x_n \xrightarrow{w} x$, де $\{x_n : n \geq 1\} \subset M$ – деяка послідовність, випливає, що $x \in M$. Довести, що: 1) кожна слабко замкнена множина в X є сильно замкненою; 2) твердження, обернене до твердження п.1, хибне; 3) підпростір в X є слабко замкненою множиною; 4) замкнена куля в X є слабко замкненою множиною.

29. Нехай X – рівномірно опуклий банахів простір, послідовність $\{x_n : n \geq 1\} \subset X$ слабко збіжна до $x \in X$, а також $||x_n|| \to ||x||$, $n \to \infty$. Довести, що $x_n \to x$ за нормою.

30*. **(Шур)**. Довести, що слабка збіжність у просторі l_1 рівносильна збіжності за нормою.

31. (Теорема про фіксацію особливостей). Нехай X – банахів простір, $\{f_n : n \geq 1\} \subset X^*$, $\sup\limits_{n\geq 1} ||f_n|| = +\infty$. Довести, що $\exists x \in X$: $\sup\limits_{n\geq 1} |f_n(x)| = +\infty$.

32. Нехай $1 \leq p \leq +\infty$, q – спряжений індекс до p. 1) Нехай послідовність $a = \{a_n : n \geq 1\}$ така, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ збігається для довільного $x \in l_p$. Довести, що $a \in l_q$. 2) Нехай вимірна функція p така, що функціонал $f(x) = \int\limits_a^b p(t)x(t)dt$ визначений для кожного $x \in L_p([a,b])$. Довести, що $p \in L_q([a,b])$.

33. Сформулювати й довести твердження, аналогічні твердженням попередньої задачі, для просторів c_0, c.

34. Нехай X – банахів простір. Довести, що послідовність $\{x_n : n \geq 1\} \subset X$ слабко обмежена тоді й тільки тоді, коли вона обмежена за нормою в X.

35. Довести, що послідовність функціоналів $\{f_n : n \geq 1\} \subset (C([0,1]))^*$, де $f_n(x) = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} x(\frac{k}{n}),\ x \in C([0,1]),\ n \geq 1$, $*$-слабко збіжна та знайти її границю. Чи збігається вона за нормою?

36. Нехай $f_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} A_{nk} x(t_{nk}),\ x \in C([a,b])$, де $a \leq t_{n1} \leq$

$\ldots \le t_{nn} \le b,\ n \ge 1,\ \{A_{nk} \mid 1 \le k \le n,\ n \ge 1\} \subset \mathbf{K}$. Довести, що $f_n(x) \to \int\limits_a^b x(t)dt,\ n \to \infty$, для всіх $x \in C([a,b])$ тоді й тільки тоді, коли: 1) $\sup\limits_{n\ge1} \sum\limits_{k=1}^{n} |A_{nk}| < +\infty$; 2) $f_n(p) \to \int\limits_a^b p(t)dx(t),\ n \to \infty$ для кожного многочлена p.

Перевірити, що умова 1) випливає з умови 2), якщо для всіх $n \ge 1$ і $1 \le k \le n$ маємо $A_{nk} \ge 0$.

37. Нехай $f_n(x) = \int\limits_a^b x(t)dF_n(t),\ x \in C([a,b]),\ F_n \in BV([a,b])$, $n \ge 0$. Довести, що $f_n \xrightarrow{*-w} f_0$ тоді й тільки тоді, коли $\sup\limits_{n\ge1} V(F_n,[a,b]) < +\infty,\ F_n(t) \to F_0(t),\ n \to \infty$ у точках неперервності $F_0,\ F_n(a) \to F_0(a),\ n \to \infty$, і $F_n(b) \to F_0(b),\ n \to \infty$.

38. Нехай X – ЛНП. Чи правильно, що для довільного підпростору $L \subset X^*$ існує підпростір $M \subset X$ такий, що $L = M^{\perp}$?

39. Нехай $\{p_n : n \ge 1\} \subset L_1([0,1]),\ f_n(x) := \int\limits_0^1 p_n(t)x(t)dt$, $x \in C([0,1]),\ n \ge 1$.

1) Нехай $p_n(t) \le p_{n+1}(t)$ майже скрізь на $[0,1]$ відносно міри Лебега для всіх $n \in \mathbf{N}$, а також для кожного $x \in C([0,1])$ послідовність $\{f_n(x) : n \ge 1\}$ обмежена. Довести, що послідовність $\{f_n : n \ge 1\}$ $*$-слабко збігається.

2) Чи обов'язково існує підпослідовність послідовності $\{p_n : n \ge 1\}$, яка збігається на $[0,1]$ до нуля, якщо $f_n \xrightarrow{*-w} 0$?

3) Питання пункту 2, якщо $f_n \to 0$ за нормою.

40. Нехай X – ЛНП, $f \in X^*$. За якої умови на послідовність $\{\alpha_n : n \ge 1\} \subset \mathbf{R}$ послідовність функціоналів $f_n(x) := f(\alpha_n x)$, $x \in X,\ n \ge 1$, збігається 1) $*$-слабко? 2) за нормою?

41. Покладемо $x_k(t) := t^k,\ t \in [a,b],\ k = 0,1,2,\ y(t) := (t-a)^2$, $t \in [a,b],\ f(x) := x(a),\ x \in C([a,b])$. Нехай $\{f_n : n \ge 1\}$ – послідовність лінійних невід'ємних функціоналів на $C([a,b])$. Довести, що:

1) для кожного $x \in C([a,b])$ і кожного $\varepsilon > 0$ справедлива нерівність $-\varepsilon - \frac{2\|x\|}{\delta^2}y(t) \le x(t) - x(a) \le \frac{2\|x\|}{\delta^2}y(t) + \varepsilon,\ t \in [a,b]$, де число $\delta = \delta(x,\varepsilon) > 0$ таке, що $\forall t \in [a,b],\ |t-a| < \delta\ :\ |x(t) - x(a)| < \varepsilon$;

2) **(Коровкін)** $f_n \xrightarrow{*-w} f$, якщо виконується одна з умов: а) $f_n(x_0) \to f(x_0),\ f_n(y) \to f(y),\ n \to \infty$; б) $f_n(x_k) \to f(x_k)$, $n \to \infty,\ k = 0,1,2$.

42. Нехай функціонали $f, f_n \in (C([a,b]))^*$ такі, що $f_n(x_k) \to f(x_k)$, $n \to \infty$, де $x_k(t) = t^k,\ t \in [a,b],\ k = 0,1,2$, а також для кожного $n \in \mathbf{N}$ функціонал $f_n - f$ невід'ємний. Довести, що $f_n \xrightarrow{*-w} f,\ n \to \infty$.

43. (Тепліц) Нехай задано нескінченний набір чисел $\{a_{nk} \,:\, k \geq 1,\ n \geq 1\} \subset \mathbf{K}$. Довести, що для кожної збіжної послідовності $x = \{x_n : n \geq 1\}$ послідовність $f_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ збігається до границі послідовності x тоді й тільки тоді, коли виконуються такі умови:

1) $\forall k \geq 1 \;:\; \lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = 0$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$;

3) $\exists C > 0 \ \forall n \geq 1 \;:\; \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq C$.

44*. (Мертенс–Шур) Нехай $\{a_n \,:\, n \geq 0\} \subset \mathbf{C}, \{b_n \,:\, n \geq 0\} \subset \mathbf{C}$, $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},\ n \geq 0$. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ збігається тоді й тільки тоді, коли для будь-якого збіжного ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ збігається.

45. Довести, що: 1) відображення $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \mapsto \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n$, яке задається послідовністю $\{\lambda_n : n \geq 1\} \subset \mathbf{C}$, переводить збіжні ряди у збіжні тоді й тільки тоді, коли $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n - \lambda_{n+1}| < +\infty$;

2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ збігається для будь-якої послідовності $\{a_n : n \geq 1\} \subset \mathbf{C}$, для якої її часткові суми $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k,\ n \geq 1$, рівномірно обмежені, тоді й тільки тоді, коли $b_n \to 0,\ n \to \infty$, і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_{n+1} - b_n| < +\infty$.

46. Довести, що в дійсному сепарабельному ЛНП X будь-яка замкнена куля з центром у точці 0 є перетином зліченної сім'ї множин $\{x \in X \mid f_n(x) \leq C\}$, $n \geq 1$, де $f_n \in X^*,\ n \geq 1$.

РОЗДІЛ 6
ЛІНІЙНІ НЕПЕРЕРВНІ ОПЕРАТОРИ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Нехай $X_1,\ X_2$ – лінійні нормовані простори.

Оператором називають довільне відображення $A : X_1 \to X_2$.

Оператор $A : X_1 \to X_2$ називають *лінійним*, якщо $\forall x, y \in X_1$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{K} : A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$.

Дію лінійного оператора A на елемент $x \in X_1$ позначають Ax.

Ядром лінійного оператора $A : X_1 \to X_2$ називають множину $\mathrm{Ker}\, A := \{x \in X_1 \mid Ax = 0\}$.

Множину значень оператора $A : X_1 \to X_2$ (множину $\{Ax \mid x \in X_1\}$) позначають $R(A)$.

Лінійний оператор $A : X_1 \to X_2$ називають *обмеженим*, якщо $\exists C > 0\ \forall x \in X_1 : ||Ax||_2 \le C||x||_1$.
Лінійний оператор є обмеженим тоді й тільки тоді, коли він є неперервним.

Через $\mathcal{L}(X_1, X_2)$ будемо позначати клас усіх лінійних неперервних операторів з X_1 в X_2. Якщо $X_1 = X_2$, то використовується також позначення $\mathcal{L}(X_1)$.

Для $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ число $||A|| := \sup\limits_{||x||_1=1} ||Ax||_2$ називають нормою оператора A. Простір $\mathcal{L}(X_1, X_2)$ зі стандартно введеними лінійними операціями і визначеною вище нормою є ЛНП.

Якщо X_2 – повний (тобто банахів) простір, то $\mathcal{L}(X_1, X_2)$ – також банахів простір.

Нехай X, Y, Z – ЛНП. *Добутком операторів* $A \in \mathcal{L}(Y, Z)$ і $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ називають оператор $AB \in \mathcal{L}(X, Z)$, для якого $(AB)x = A(Bx)$. Простір $\mathcal{L}(X)$ із введеною операцією множення є алгеброю з одиницею (одиницею є тотожний оператор I.)

Якщо $AB = BA$, то оператори $A, B \in \mathcal{L}(X)$ називають *комутуючими*.

Графіком лінійного оператора A називають множину $\Gamma(A) := \{(x, Ax) \mid x \in X_1\} \subset X_1 \times X_2$. Для довільного $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ множина $\Gamma(A)$ є підпростором у просторі $X_1 \times X_2$ (який розглядається з нормою $||(x_1, x_2)|| := ||x_1||_{X_1} + ||x_2||_{X_2}$.) У випадку банахових просторів X_1, X_2 справедливий і обернений результат.

Теорема (Банаха про замкнений графік). Нехай $X_1,\ X_2$ – ЛНП, A – лінійний оператор з X_1 в X_2. Тоді $\Gamma(A)$ – замкнений підпростір в $X_1 \times X_2$ тоді й лише тоді, коли $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

1. Чи є наведені оператори $A : l_2 \to l_2$ лінійними? неперервними? Для лінійних неперервних знайти їх норми.

1) $Ax = (0, 2x_3, 0, 2x_4, 0, 2x_5, 0, ...),\ x \in l_2$;

2) $Ax = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, ...),\ x \in l_2$.

Р о з в ' я з о к. 1) Маємо $\forall x, y \in l_2\ \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}\ :\ A(\alpha x + \beta y) = A(2\alpha x_1 + 2\beta y_1, 2\alpha x_2 + 2\beta y_2, ...) = (0, 2\alpha x_3 + 2\beta y_3, 0, 2\alpha x_4 + 2\beta y_4, 0, 2\alpha x_5 + 2\beta y_5, 0, ...) = \alpha(0, 2x_3, 0, 2x_4, 0, 2x_5, 0, ...) + \beta(0, 2y_3, 0, 2y_4, 0, 2y_5, 0, ...) = \alpha Ax + \beta Ay$. Отже, A – лінійний оператор. Тому замість неперервності можна перевіряти еквівалентну їй обмеженість. $\forall x \in l_2$: $||Ax||^2 = \sum\limits_{n=3}^{\infty} 4|x_n|^2 \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} 4|x_n|^2 = 4||x||^2$. Отже, A – обмежений і неперервний оператор. Крім того, з останньої нерівності випливає, що $||A|| \le 2$. Для того, щоб показати, що $||A|| = 2$, досить знайти вектор $y \in l_2$ такий, що $||Ay|| = 2||y||$. Покладемо $y := e_3$. Тоді $Ay = 2e_2$, тому $||y|| = 1,\ ||Ay|| = 2$. Отже, $||A|| = 2$.

2) Оскільки можна навести приклад векторів, для яких порушується лінійність (скажімо, $x = y = e_1,\ \alpha = \beta = 1$, тоді $A(x+y) = 4e_1,\ Ax + Ay = 2e_1 \ne A(x+y)$), то оператор A нелінійний.

Перевіримо його неперервність. Нехай $x^{(k)} \to x,\ k \to \infty$, в l_2. Тоді $||Ax^{(k)} - Ax||^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n^{(k)\,2} - x_n^2|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n^{(k)} - x_n|^2 |x_n^{(k)} + x_n|^2 \le ||x^{(k)} + x||^2 \cdot ||x^{(k)} - x||^2 \le 2(||x^{(k)}||^2 + ||x||^2) \cdot ||x^{(k)} - x||^2 \to 0,\ k \to \infty$, бо збіжна послідовність є обмеженою за нормою. Тому A – неперервний оператор.

2. Нехай $X = L_2(T, \mu),\ a \in L_\infty(T, \mu),\ \mu - \sigma$-скінченна. Довести, що оператор множення на a: $(Ax)(t) = a(t)x(t)$ належить до $\mathcal{L}(X)$ та знайти його норму.

Р о з в ' я з о к. Лінійність оператора A очевидна. Крім того, $||Ax||_2 = (\int\limits_T |a(t)x(t)|^2 d\mu(t))^{\frac{1}{2}} \le (\int\limits_T ||a||_\infty^2 |x(t)|^2 d\mu(t))^{\frac{1}{2}} = ||a||_\infty ||x||_2$. (Тут $||a||_\infty := \operatorname*{esssup}\limits_{t \in T} |a(t)| = \inf\{C > 0 \,|\, |a(t)| < C (\operatorname{mod} \mu)\}$ – істотний супремум функції $|a|$.) Для довільного $\varepsilon > 0$ розглянемо множину $B_\varepsilon := \{t \,|\, |a(t)| > ||a||_\infty - \varepsilon\}$. Згідно з означенням $||a||_\infty,\ \mu(B_\varepsilon) > 0$. Нехай B'_ε – вимірна підмножина B_ε така, що $0 < \mu(B'_\varepsilon) < +\infty$ (така множина існує внаслідок σ-скінченності міри μ). Покладемо $x_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\mu(B'_\varepsilon)}} \chi_{B'_\varepsilon}$. Легко перевірити, що $||x_\varepsilon|| = 1$ і $||Ax_\varepsilon|| \ge ||a||_\infty - \varepsilon$. Звідси випливає, що $||A|| = ||a||_\infty$.

3. Знайти норму оператора $(Ax)(t) = \int\limits_0^{2\pi} \sin(t-s)x(s)ds$ в $L_2([0, 2\pi])$.

Р о з в ' я з о к. Позначимо $e_1(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t,\ e_2(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t$. Ясно, що система $\{e_1, e_2\}$ – ортонормована в $L_2([0,2\pi])$. Маємо $Ax = \pi((x,e_1)e_2 - (x,e_2)e_1)$. Тоді за теоремою Піфагора і нерівністю Бесселя $||Ax||^2 = \pi^2(|(x,e_1)|^2 + |(x,e_2)|^2) \le \pi^2||x||^2$ і $||A|| \le \pi$. З іншого боку, $Ae_1 = \pi e_2$ і $||Ae_1|| = \pi$. Звідси випливає, що $||A|| = \pi$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

4. Нехай X_1, X_2 – ЛНП, $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$. Довести рівності $||A|| = \sup\limits_{||x||_1=1} ||Ax||_2 = \sup\limits_{||x||_1\le 1} ||Ax||_2 = \sup\limits_{x\in X_1,\ x\ne 0} \frac{||Ax||_2}{||x||_1} = \min\{C \ge 0 \,|\, \forall x \in X_1\ :\ ||Ax||_2 \le C||x||_1.\}$

5. Довести, що лінійний неперервний оператор $A : X \to Y$ залишається неперервним, якщо в X і Y замінити норми на еквівалентні.

6. Нехай $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ – еквівалентні норми на лінійному просторі X; X_i – це лінійний простір X з нормою $||\cdot||_i,\ i = 1,2$. Довести, що норми в $\mathcal{L}(X_1)$ та $\mathcal{L}(X_2)$ еквівалентні.

7. Довести, що будь-який лінійний оператор у скінченновимірному просторі неперервний. Довести, що будь-який лінійний оператор зі скінченновимірною областю визначення неперервний.

8. Знайти загальний вигляд лінійного оператора $A : X \to Y$ і обчислити його норму (яка існує за попередньою задачею), у таких випадках:

1) $X = \mathbf{R}_1^m,\ Y = \mathbf{R}_1^n$;
2) $X = \mathbf{R}_\infty^m,\ Y = \mathbf{R}_\infty^n$;
3) $X = \mathbf{R}_1^m,\ Y = \mathbf{R}_\infty^n$;
4) $X = \mathbf{R}_\infty^m,\ Y = \mathbf{R}_1^n$;
5) $X = \mathbf{R}_2^m,\ Y = \mathbf{R}_\infty^n$.

Тут $\mathbf{R}_p^m$ – простір $\mathbf{R}^m$ з нормою $||x||_p := \left(\sum\limits_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $1 \le p < +\infty, \mathbf{R}_\infty^m$ – простір $\mathbf{R}^m$ з нормою $||x||_\infty := \max\limits_{1\le k\le n} |x_k|$.

9. Знайти норму діагонального оператора $Ax = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ...)$ в $l_p\ (1 \le p \le \infty)$, якщо $\{\alpha_n : n \ge 1\}$ – обмежена послідовність.

10. Нехай $\alpha = \alpha(t)$ – фіксована функція з $C([a,b])$, оператор $(Ax)(t) := \alpha(t)x(t)$ (оператор множення на функцію).

1) Довести, що A–лінійний неперервний оператор у $C([a,b])$ і знайти норму A.

2) Довести, що A – лінійний неперервний оператор в $L_p([a,b])$, $1 \le p \le +\infty$, і знайти норму A.

11. Довести, що оператор множення на вимірну за Лебегом функцію a в $L_p([a,b]),\ 1 \le p \le +\infty$ обмежений тоді й лише тоді, коли функція a істотно обмежена.

12. Знайти норму оператора $A : \mathbf{R}^m \to l_2$, якщо $Ax = (x_1, ..., x_m, \frac{x_1}{2}, ..., \frac{x_m}{2}, \frac{x_1}{3}, ..., \frac{x_m}{3}, ...)$, $x = (x_1, ...x_m) \in \mathbf{R}^m$ (у $\mathbf{R}^m$ розглядається евклідова норма).

13. Нехай $\{\alpha_{jk}\}_{j,k=1}^{\infty}$ – числова матриця, для якої $\sum\limits_{j,k=1}^{\infty} |\alpha_{jk}|^2 < \infty$. Довести, що оператор множення на матрицю $(Ax)_j = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_{jk} x_k, \ j \geq 1$, є лінійним і неперервним у просторі l_2. Оцінити норму A.

14. Довести лінійність і неперервність інтегрального оператора A з неперервним ядром K, тобто оператора $A : C([a,b]) \to C([a,b])$, що діє за формулою $(Ax)(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds, \ t \in [a,b], \ K \in C([a,b]^2)$. Довести також, що $||A|| = \max\limits_{t \in [a,b]} \int\limits_a^b |K(t,s)|ds$.

15. Довести лінійність і неперервність інтегрального оператора A з L_2-ядром K, тобто оператора $A : L_2([a,b]) \to L_2([a,b])$, що діє за формулою $(Ax)(t) = \int\limits_{[a,b]} K(t,s)x(s)ds, \ t \in [a,b], \ K \in L_2([a,b]^2)$. Довести оцінку $||A|| \leq ||K||_{L_2([a,b]^2)} = \left(\int\limits_{[a,b]^2} |K(t,s)|^2 dtds \right)^{\frac{1}{2}}$.

16. Довести лінійність і неперервність інтегрального оператора Вольтерри A з неперервним ядром K, тобто $A : C([a,b]) \to C([a,b])$ і визначається формулою $(Ax)(t) = \int\limits_a^t K(t,s)x(s)ds, \ t \in [a,b]$, де $K \in C(\{(t,s) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leq s \leq t, \ a \leq t \leq b\})$. Знайти $||A||$.

17. 1) Довести, що оператор $A : C^1([a,b]) \to C([a,b])$, де $(Ax)(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \ t \in [a,b]$ є лінійним і неперервним. Знайти його норму.

2) Довести, що оператор $A : C([a,b]) \to C([a,b])$, де $(Ax)(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \ t \in [a,b]$ з областю визначення $D(A) = C^1([a,b])$ є *щільно визначеним* (тобто $\overline{D(A)} = C([a,b])$), *замкненим* (тобто коли $x_n \to x, \ n \to \infty$, у $C([a,b])$ і $\{Ax_n : n \geq 1\}$ – збіжна в $C([a,b])$, то $x \in D(A)$ і $Ax_n \to Ax, \ n \to \infty$, у $C([a,b])$), але не є неперервним.

18. Нехай $p, q \in L_2([a,b])$. Довести, що інтегральний оператор $A : L_2([a,b]) \to L_2([a,b])$, який визначається формулою $(Ax)(t) = \int\limits_{[a,b]} p(t)q(s)x(s)ds, \ t \in [a,b]$, є лінійним, неперервним, причому $||A|| = ||p|| \cdot ||q||$.

19. Знайти норму тотожного оператора, який діє:

1) з $C^1([a,b])$ у $C([a,b])$; 2) з $L_p([a,b])$ у $L_q([a,b]), \ p \geq q \geq 1$.

20. Нехай ядро $K \in C([a,b]^2), \ \alpha < 1$. Довести, що інтегральний оператор $A : C([a,b]) \to C([a,b])$, де $(Ax)(t) = \int\limits_a^b \frac{K(t,s)}{|t-s|^{\alpha}} x(s)ds$,

$t \in [a,b]$, – лінійний та неперервний.

21. 1) Знайти n-й степінь інтегрального оператора Фредгольма $A : L_2([a,b]) \to L_2([a,b])$, який визначається формулою $(Ax)(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds,\ t \in [a,b],\ K \in L_2([a,b]^2)$.

2) Знайти n-й степінь інтегрального оператора Вольтерри $A : L_2([a,b]) \to L_2([a,b])$, який визначається формулою $(Ax)(t) = \int\limits_a^t K(t,s)x(s)ds,\ t \in [a,b],\ K \in L_2(\{(t,s) \in [a,b]^2 \mid s \le t\})$.

22. Нехай числа α, β, γ такі, що $\beta > \alpha \ge \gamma \ge 0$. Позначимо через C_α банахів простір неперервних на $[0,+\infty)$ функцій x таких, що $\sup\limits_{0 \le t < \infty} e^{\alpha t}|x(t)| < \infty$, з нормою $||x||_\alpha = \sup\limits_{0 \le t < \infty} e^{\alpha t}|x(t)|$. Довести, що оператор $A : C_\alpha \to C_\gamma$, який визначається формулою $(Ax)(t) = \int\limits_0^t e^{-\beta(t-s)}x(s)ds,\ t \ge 0$, є лінійним і неперервним. Знайти норму A.

23. Нехай X, Y – ЛНП, $f \in X^*,\ y \in Y$ і $Ax = f(x)y,\ x \in Y$. Довести, що $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ і знайти $||A||$.

24. Нехай H – гільбертів простір, $y, z \in H,\ Ax = (x,y)z,\ x \in H$. Довести, що $A \in \mathcal{L}(H)$ і знайти $||A||$.

25. Нехай $p, q \in C([a,b])$ і $Ax = \int\limits_a^b p(t)q(s)x(s)ds$. Довести, що $A \in \mathcal{L}(X)$ та знайти норму $||A||$. Розглянути випадки: 1) $X = L_p([a,b])$; 2) $X = C([a,b])$.

26. Оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ називають скінченновимірним, якщо $\dim(R(A)) < \infty$. Довести, що A – скінченновимірний тоді й лише тоді, коли існують $\{f_1, ..., f_n\} \subset X^*,\ \{y_1, ..., y_n\} \subset Y$ такі, що $Ax = \sum\limits_{k=1}^n f_k(x)y_k,\ x \in X$.

27. Встановити загальний вигляд скінченновимірного оператора: 1) у гільбертовому просторі; 2) в $L_p([a,b])$ $(1 \le p < \infty)$; 3) у $C([a,b])$.

28. Нехай $\{y_k \mid 1 \le k \le n\}$ і $\{z_k \mid 1 \le k \le n\}$ – ортонормовані системи в гільбертовому просторі H. Обчислити норму оператора A, де $Ax = \sum\limits_{k=1}^n c_k(x,y_k)z_k,\ c_k \in \mathbf{C}$. Довести, що ця формула задає загальний вигляд скінченновимірного оператора A.

29. Довести, що наведені інтегральні оператори є лінійними, неперервними. Знайти їх норми.

1) $X = C([0,1]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^1 t^\alpha s^\beta x(s)ds,\ \alpha \ge 0, \beta > -1$;

2) $X=C([0,1]),\ (Ax)(t)=\int\limits_0^1 e^{3t-2s}x(s)ds;$

3) $X=C([0,1]),\ (Ax)(t)=\int\limits_0^1 \sin\pi(t-s)x(s)ds;$

4) $X=C([0,1]),\ (Ax)(t)=\int\limits_0^\pi \cos t\sin sx(s)ds;$

5) $X=L_2([0,2\pi]),\ (Ax)(t)=\int\limits_0^{2\pi} \cos(t-s)x(s)ds;$

6) $X=L_2([0,1]),\ (Ax)(t)=\int\limits_0^1 t^\alpha s^\beta x(s)ds,\ \alpha>-\frac{1}{2},\ \beta>-\frac{1}{2};$

7) $X=L_2([0,2\pi]),\ (Ax)(t)=\int\limits_0^{2\pi} \sin(t+s)x(s)ds;$

8) $X=L_2([0,2\pi]),\ (Ax)(t)=\int\limits_0^{2\pi} \cos(2t+2s)x(s)ds;$

9) $X=C([0,1]),\ (Ax)(t)=\int\limits_0^t x(s)ds.$

30. Довести, що наведені оператори $A: l_2 \to l_2$ є лінійними, неперервними і знайти їх норми:

1) $Ax=(\underbrace{0,0,...,0}_{k},x_1,x_2,...);$

2) $Ax=(\underbrace{0,0,...,0}_{k},x_{k+1},x_{k+2},...);$

3) $Ax=(x_{k+1},x_{k+2},...);$

4) $Ax=(x_1,0,x_2,0,x_3,0,...);$

5) $Ax=(x_1,0,x_3,0,x_5,0,...);$

6) $Ax=(0,x_2,0,x_4,0,x_6,...).$

31. Довести, що наведені оператори нелінійні й неперервні:

1) $X=C([0,1]),\ Ax=x^2(t);$

2) $X=C([0,1]),\ Ax=\sin x^2(t);$

3) $X=C([0,1]),\ Ax=\int\limits_0^1 x^2(t)dt.$

32. 1) Довести, що ядро $\mathrm{Ker}\,A$ будь-якого лінійного неперервного оператора $A: X \to Y$, де X, Y – ЛНП, є підпростором в X.

2) Нехай $A: X \to Y$ – лінійний оператор, $\mathrm{Ker}\,A$ – підпростір в X. Чи випливає звідси, що A – обмежений оператор?

3) Навести приклад лінійного неперервного оператора A, в якого область значень: а) замкнена; б) незамкнена.

33. Нехай X – банахів простір, $A \in L(X)$ – такий оператор, що $\exists C > 0 \ : \ ||Ax|| \geq C||x||, \ x \in X$. Довести, що: 1) $R(A)$ – підпростір в X; 2) $\operatorname{Ker} A = \{0\}$.

34*. Нехай X, Y – ЛНП, $A : X \to Y$ – лінійний оператор, причому $\dim R(A) < +\infty$, а $\operatorname{Ker} A$ – замкнена множина в X. Довести, що $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

35. Нехай H – гільбертів простір, $G \subset H$ – підпростір, $Px = \operatorname{pr}_G x$. Довести, що оператор проектування P є лінійним і неперервним. Знайти норму P.

36. Нехай A – лінійний оператор у ЛНП X. Довести, що A неперервний тоді й тільки тоді, коли множина $\{x \in X \mid ||Ax|| < 1\}$ має внутрішні точки.

37. 1) Нехай A – лінійний оператор у ЛНП, який будь-яку обмежену послідовність перетворює на обмежену. Довести, що A – обмежений оператор.

2) Нехай A – лінійний оператор у ЛНП, який переводить замкнену одиничну кулю в обмежену множину. Довести, що A – обмежений оператор.

3) Нехай A – лінійний оператор у ЛНП, який будь-яку сильно збіжну послідовність переводить у слабко збіжну. Довести, що A – обмежений оператор.

38. Нехай X – банахів простір, $A : X \to X$. Довести, що $A \in \mathcal{L}(X)$ тоді й тільки тоді, коли для кожного $f \in X^*$ функціонал $f_0(x) := f(Ax), \ x \in X$, є лінійним і неперервним.

39. 1) Для яких $\alpha \in \mathbf{R}$ оператор $(Ax)(t) = x(t^\alpha)$ є лінійним і неперервним у $C([0,1])$? Знайти його норму.

2) Для яких $\alpha \in \mathbf{R}$ оператор $(Ax)(t) = x(t^\alpha)$ є лінійним і неперервним у $L_2([0,1])$? Знайти його норму.

3) Для яких $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ оператор $(Ax)(t) = t^\beta x(t^\alpha)$ є лінійним і неперервним у $L_2([0,1])$? Знайти його норму.

40. 1) Довести, що оператори $Ax = (x_2, 0), \ Bx = (x_2, x_1), \ x \in \mathbf{R}^2$ є лінійними, неперервними і не комутують;

2) Довести, що оператори $Ax = (x_2, 0), \ Bx = (0, x_1), \ x \in \mathbf{R}^2$ є лінійними, неперервними і не комутують;

3) Довести, що оператори $(Ax)(t) = tx(t), \ (Bx)(t) = \int\limits_0^t x(s)ds$, $t \in [0,1]$, є лінійними, неперервними в $L_2([0,1])$ і не комутують.

41. 1) Нехай $X = L_2([0,1])$. Довести, що простір $\mathcal{L}(X)$ – несепарабельний. 2) Нехай $X = l_2$. Довести, що простір $\mathcal{L}(X)$ – несепарабельний.

42*. Знайти необхідну і достатню умову на лінійний нормований простір X, щоб простір $\mathcal{L}(X)$ був сепарабельним.

43. Нехай X – банахів простір, $A \in \mathcal{L}(X)$. Чи будуть нормами в X : 1) $||x||_1 = ||Ax||$? 2) $||x||_2 = ||x|| + ||Ax||$? Чи буде X у нормі $||\cdot||_2$ банаховим простором?

44. Нехай X – ЛНП, Y – банахів простір, лінійна множина $M \subset X$ є скрізь щільною в X, оператор $A \in \mathcal{L}(M, Y)$. Довести, що A допускає єдине лінійне неперервне продовження на X зі збереженням норми.

45. Нехай H – гільбертів простір, $A : H \to H$ – лінійний оператор. Довести, що $A \in \mathcal{L}(H)$ тоді й тільки тоді, коли $\exists C > 0\ \forall x, y \in H$: $|(Ax, y)| \le C||x|| \cdot ||y||$. Більш того, $||A|| = \sup\limits_{||x||=1, ||y||=1} |(Ax, y)|$.

46. 1) Нехай оператор $A : L_2(T, \mu) \to L_2(T, \mu)$ – це інтегральний оператор з ядром K, $(Ax)(t) = \int\limits_T K(t, s)x(s)d\mu(s),\ t \in T$, причому $a_1 = \sup\limits_{t \in T} \int\limits_T |K(t, s)|d\mu(s) < \infty$, $a_2 = \sup\limits_{s \in T} \int\limits_T |K(t, s)|d\mu(t) < \infty$. Довести, що оператор A – лінійний, обмежений і $||A|| \le (a_1 a_2)^{\frac{1}{2}}$.

2) Нехай ядро $K \in L_\infty([a, b]^2),\ \alpha < 1$. Довести, що оператор A : $L_2([a, b]) \to L_2([a, b])$, де $(Ax)(t) = \int\limits_a^b \frac{K(t,s)}{|t-s|^\alpha} x(s)ds,\ t \in [a, b]$, – лінійний та неперервний.

3) Нехай $p \in L_1(\mathbf{R})$. Довести, що інтегральний оператор $A : L_2(\mathbf{R}) \to L_2(\mathbf{R})$, який визначається формулою $(Ax)(t) = \int\limits_{\mathbf{R}} p(t - s)x(s)ds,\ t \in \mathbf{R}$, (оператор згортки з функцією p) є лінійним і неперервним.

47*. Дамо такі означення: 1) Систему множин $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in T\}$ називають *зчіпною*, якщо кожна пара множин з $\mathcal{A}$ має непорожній перетин. 2) ЛНП X є простором *типу* $\mathcal{M}$, якщо кожна зчіпна система замкнених куль з X має непорожній перетин. Довести, що:

1) простір $\mathbf{C}$ не є простором типу $\mathcal{M}$, а дійсні простори $\mathbf{R},\ L_\infty(T, \mu)$ є просторами типу $\mathcal{M}$;

2) кожний простір типу $\mathcal{M}$ є банаховим;

3) Нехай X – дійсний ЛНП, $G \subset X$ – підпростір в X, оператор $A : G \to Y$, де Y – дійсний простір типу $\mathcal{M}$, A – лінійний неперервний оператор на G. Тоді існує лінійне неперервне продовження $\overline{A}$ оператора A на X зі збереженням норми, $||\overline{A}|| = ||A||$.

48. Нехай A – лінійний оператор у гільбертовому просторі H такий, що $\forall x, y \in H$: $(Ax, y) = (x, Ay)$. Довести, що $A \in \mathcal{L}(H)$.

49. Нехай A, B – лінійні оператори в гільбертовому просторі H такі, що $\forall x, y \in H$: $(Ax, y) = (x, By)$. Довести, що $A, B \in \mathcal{L}(H)$.

РОЗДІЛ 7
РІВНОМІРНА, СИЛЬНА, СЛАБКА ЗБІЖНІСТЬ ОПЕРАТОРІВ. ПРИНЦИП РІВНОМІРНОЇ ОБМЕЖЕНОСТІ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Нехай $X_1,\ X_2$ – лінійні нормовані простори.

Послідовність $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{L}(X_1, X_2)$ називають *рівномірно збіжною* (або збіжною за нормою) до оператора $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$, якщо $||A_n - A|| \to 0,\ n \to \infty$; позначається $A_n \rightrightarrows A,\ n \to \infty$.

Послідовність $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{L}(X_1, X_2)$ називають *сильно збіжною* (або поточково збіжною) до оператора $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$, якщо $\forall x \in X_1$: $A_n x \to Ax,\ n \to \infty$, в X_2; позначається $A_n \xrightarrow{s} A,\ n \to \infty$, або $A = s \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

Послідовність $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{L}(X_1, X_2)$ називають *слабко збіжною* до оператора $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$, якщо $\forall x \in X_1$: $A_n x \xrightarrow{w} Ax,\ n \to \infty$ в X_2; позначається $A_n \xrightarrow{w} A,\ n \to \infty$, або $A = w \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

Теорема (Банаха--Штейнгауза; принцип рівномірної обмеженості). Нехай X_1 – банахів простір, X_2 – лінійний нормований простір, сукупність операторів $\{A_\alpha : \alpha \in T\} \subset \mathcal{L}(X_1, X_2)$ така, що $\forall x \in X_1$ $\exists C_x > 0\ \forall \alpha \in T$: $||A_\alpha x|| \leq C_x$. Тоді $\exists C > 0\ \forall \alpha \in T$: $||A_\alpha|| \leq C$.

Критерій сильної збіжності операторів наведено у задачі 5.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

1. Дослідити послідовність операторів $A_n : X \to X,\ n \geq 1$, на рівномірну, сильну та слабку збіжність, якщо:

1) $X = l_2,\ A_n x = \left(0, ..., 0, \dfrac{x_n}{n}, \dfrac{x_{n+1}}{n+1}, ..., \dfrac{x_{2n}}{2n}, 0, 0, ...\right)$;

2) $X = l_2,\ A_n x = (x_1, ..., x_n, 0, 0, ...)$;

3) $X = l_2,\ A_n x = (0, ..., 0, \underbrace{x_1}_{n}, 0, 0, ...)$;

4) $X = C([0,1]),\ (A_n x)(t) = \int\limits_0^1 \sqrt{(t-s)^2 + \frac{1}{n}}\, x(s) ds$;

5) $X = C([0,1]),\ (A_n x)(t) = \int\limits_0^1 t^n x(s) ds$;

6) $X = L_p(\mathbf{R}),\ (A_n x)(t) = \begin{cases} x(t-n), & t \geq n, \\ 0, & t < n, \end{cases}\ 1 \leq p < +\infty;$

7) $X = L_p(\mathbf{R}),\ (A_n x)(t) = e^{-(t-n)^2} x(t),\ 1 \leq p < +\infty.$

Р о з в ' я з о к. 1) Визначимо спочатку оператор, до якого може збігатися задана послідовність операторів. Якщо послідовність $\{A_n : n \geq 1\}$ збігається слабко (а, тим більше, сильно чи рівномірно), то для кожного $x \in l_2$ послідовність елементів $\{A_n x\ :\ n \geq 1\}$ збігається слабко в l_2, а отже, збігається покоординатно в l_2. Визначимо для кожного $x \in l_2$ покоординатну границю послідовності $\{A_n x\ :\ n \geq 1\}$. Оскільки $\forall k \in \mathbf{N}\ :\ (A_n x)_k = 0,\ n > k$, то $(A_n x)_k \to 0,\ n \to \infty$. Таким чином, якщо послідовність $\{A_n : n \geq 1\}$ збігається рівномірно, сильно чи слабко, то лише до нульового оператора. Покладемо $A := 0$.

Тепер з'ясуємо, як збігається послідовність $\{A_n x\ :\ n \geq 1\}$ до оператора A : рівномірно, сильно, слабко, чи, можливо, немає жодного з цих видів збіжності.

Оскільки $\forall x \in l_2\ :\ ||A_n x - Ax||^2 = \sum\limits_{k=n}^{2n} \frac{|x_k|^2}{k^2} \leq \frac{1}{n^2}||x||^2$, то $||A_n - A|| \leq \frac{1}{n},\ n \geq 1$. Отже, $A_n \rightrightarrows A$, а тому $A_n \xrightarrow{s} A$ і $A_n \xrightarrow{w} A$.

2) Визначимо, до якого оператора A може збігатися дана послідовність. Для цього при кожному $x \in l_2$ знайдемо покоординатну границю послідовності $\{A_n x\ :\ n \geq 1\}$. Оскільки $\forall k \in \mathbf{N}\ :\ (A_n x)_k = x_k,\ n \geq k$, то $(A_n x)_k \to x_k,\ n \to \infty$, тому, якщо має місце хоч один із вказаних видів збіжності, то лише до одиничного оператора $A := I$. Тепер з'ясуємо характер збіжності послідовності $\{A_n : n \geq 1\}$ до оператора A.

Дослідимо послідовність спочатку на сильну збіжність. Якщо вона збігається сильно, то збігається і слабко, і залишиться дослідити її на рівномірну збіжність. Якщо ж вона не збігається сильно, то не збігається і рівномірно, і залишиться дослідити її на слабку збіжність.

Маємо $\forall x \in l_2\ :\ A_n x - Ax = (0, ..., 0, -x_{n+1}, -x_{n+2}, ...)$, $||A_n x - Ax||^2 = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 \to 0,\ n \to \infty$, як залишок збіжного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$. Тому $A_n \xrightarrow{s} A$, отже, $A_n \xrightarrow{w} A$.

Покажемо, що $A_n \not\rightrightarrows A$. Покладемо $\forall n \geq 1\ :\ x^{(n)} := e_{n+1}$, тоді $||x^{(n)}|| = 1,\ ||A_n - A|| = \sup\limits_{||x|| \leq 1} ||A_n x - Ax|| \geq ||A_n x_n - Ax_n|| = 1$, отже, $||A_n - A|| \not\to 0,\ n \to \infty$.

3) Визначимо, до якого оператора A може збігатися дана послідовність. Для цього при кожному $x \in l_2$ знайдемо покоординатну границю послідовності $\{A_n x\ :\ n \geq 1\}$. Оскільки $\forall k \in \mathbf{N}\ :\ (A_n x)_k = 0,\ n > k$,

то $(A_n x)_k \to 0,\ n \to \infty$, тому $A := 0$. З'ясуємо характер збіжності послідовності $\{A_n : n \geq 1\}$ до оператора A.

Маємо $\forall x \in l_2\ :\ ||A_n x - Ax||^2 = |x_1|^2 \not\to 0,\ n \to \infty$, якщо $x_1 \neq 0$. Тому $A_n \overset{s}{\not\to} A$, отже, $A_n \not\rightrightarrows A$.

Доведемо, що $A_n \xrightarrow{w} A$, тобто $\forall x \in l_2\ :\ A_n x \xrightarrow{w} Ax = 0$. Перевіримо умови критерію слабкої збіжності в l_2 (див. задачу 1 розділу 5): 1) Як вже було перевірено, $\forall k \in \mathbf{N}\ :\ (A_n x)_k \to 0,\ n \to \infty$; 2) $||A_n x|| = |x_1|,\ n \geq 1,$ отже, послідовність $\{||A_n x||\ :\ n \geq 1\}$ – обмежена. За критерієм слабкої збіжності в l_2 $A_n x \xrightarrow{w} 0,\ n \to \infty$, отже, $A_n \xrightarrow{w} A$.

4) Визначимо граничний оператор A, до якого може збігатися послідовність. Якщо послідовність $\{A_n : n \geq 1\}$ збігається слабко (а тим більше сильно чи рівномірно), то для кожного $x \in C([0,1])$ послідовність елементів $\{A_n x\ :\ n \geq 1\}$ збігається слабко в $C([0,1])$, а отже, збігається поточково. Тепер маємо наступні інтуїтивні міркування. Щоб знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \sqrt{(t-s)^2 + \frac{1}{n}} x(s)ds$, де $x \in C([0,1]),\ t \in [0,1]$ – фіксовані, природно спробувати перейти до границі під знаком інтеграла. Оскільки $\sqrt{(t-s)^2 + \frac{1}{n}} \to |t-s|,\ n \to \infty,\ t, s \in [0,1]$, то покладемо $(Ax)(t) := \int\limits_0^1 |t-s| x(s)ds,\ t \in [0,1],\ x \in C([0,1])$.

Доведемо, що $A_n \rightrightarrows A$. Маємо $\forall t, s \in [0,1]\ :\ \left|\sqrt{(t-s)^2 + \frac{1}{n}} - |t-s|\right|$ $= \frac{(t-s)^2 + \frac{1}{n} - |t-s|^2}{\sqrt{(t-s)^2 + \frac{1}{n}} + |t-s|} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Звідси $\forall x \in C([0,1])\ :\ ||A_n x - Ax||_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{n}}||x||_\infty$ і $||A_n - A|| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0,\ n \to \infty$.

5) Якщо послідовність $\{A_n : n \geq 1\}$ збігається слабко (а тим більше сильно чи рівномірно) до оператора $A : C([0,1]) \to C([0,1])$, то $\forall x \in C([0,1])\ :\ A_n x \xrightarrow{w} Ax$ в $C([0,1])$, а отже, $\forall t \in [0,1]\ :$ $(A_n x)(t) \to (Ax)(t),\ n \to \infty$. Маємо $(A_n x)(t) = t^n \int\limits_0^1 x(s)ds \to$ $\begin{cases} 0, & t \in [0,1), \\ \int\limits_0^1 x(s)ds, & t = 1, \end{cases}$ $n \to \infty$. Якщо $x_0(t) := 1,\ t \in [0,1]$, то $(A_n x_0)(t) \to \chi_{\{1\}}(t),\ t \in [0,1]$, отже, $(Ax_0)(t) = \chi_{\{1\}}(t),\ t \in [0,1]$, тобто $Ax_0 \notin C([0,1])$. Отримана суперечність (з тим, що $A : C([0,1]) \to C([0,1])$) означає, що послідовність $\{A_n : n \geq 1\}$ не збігається слабко, а отже, не збігається ні сильно, ні рівномірно.

6) Визначимо спочатку оператор, до якого може збігатися задана послі-

довність операторів. Хоч ні зі слабкої, ні із сильної збіжності в $L_p(\mathbf{R})$ не випливає поточкова збіжність, проте як "претендента"на границю природно взяти такий оператор A, що елемент Ax є поточковою границею (або, принаймні, границею майже скрізь) послідовності функцій $\{A_n x : n \geq 1\}$, якщо така границя існує. Оскільки $\forall x \in L_p(\mathbf{R})$ $\forall t \in \mathbf{R}$: $(A_n x)(t) = 0,\ n > t$, то $(A_n x)(t) \to 0,\ n \to \infty$, тому покладемо $A := 0$ і з'ясуємо характер збіжності послідовності $\{A_n : n \geq 1\}$ до оператора A.

Маємо $\forall x \in L_p(\mathbf{R})$: $||A_n x - Ax||^p = \int\limits_{\mathbf{R}} |(A_n x)(t)|^p dt = \int\limits_{n}^{+\infty} |x(t-n)|^p dt = \int\limits_{0}^{+\infty} |x(t)|^p dt,\ n \geq 1$. Якщо x не є нульовою функцією на $[0, +\infty)$, то $A_n x \not\to Ax,\ n \to \infty$, тому $A_n \overset{s}{\not\to} A$, отже, $A_n \not\rightrightarrows A$.

Нехай $1 < p < +\infty$. Доведемо, що $A_n \xrightarrow{w} A$, тобто $\forall x \in L_p(\mathbf{R})$: $A_n x \xrightarrow{w} Ax$ в $L_p(\mathbf{R})$.

Скористаємося критерієм слабкої збіжності в $L_p(\mathbf{R})$ (див. задачу 7 розділу 5). Маємо: 1) $||A_n x||^p = \int\limits_{n}^{\infty} |x(t-n)|^p dt = \int\limits_{0}^{+\infty} |x(t)|^p dt,\ n \geq 1$, тобто послідовність $\{||A_n x||^p : n \geq 1\}$ обмежена; 2) $\forall \tau \in \mathbf{R}$: $\int\limits_{0}^{\tau} (A_n x)(t) dt = 0,\ n > \tau$, оскільки $(A_n x)(t) = 0,\ t \in [0, \tau]$ при $n > \tau$; тому $\int\limits_{0}^{\tau} (A_n x)(t) dt \to 0,\ n \to \infty$. Отже, $A_n x \xrightarrow{w} 0,\ n \to \infty$. Зауважимо, що це можна було довести також безпосередньо за означенням слабкої збіжності.

Нехай тепер $p = 1$. Покладемо $g(t) := 1,\ t \in \mathbf{R}$, отримаємо, що $g \in L_\infty(\mathbf{R})$ і $\int\limits_{\mathbf{R}} (A_n x)(t)\overline{g(t)} dt = \int\limits_{n}^{+\infty} x(t-n) dt = \int\limits_{0}^{+\infty} x(u) du \not\to 0$, $n \to \infty$, якщо, наприклад, $x(t) = x_0(t) = e^{-|t|},\ t \in \mathbf{R}$. Отже, за означенням $A_n x_0 \overset{w}{\not\to} 0$, тобто $A_n \overset{w}{\not\to} A$.

7) Визначимо спочатку граничний оператор A, до якого може збігатись дана послідовність. Нехай $x \in L_p(\mathbf{R})$. Ясно, що $(A_n x)(t) = e^{-(t-n)^2} x(t) \to 0,\ n \to \infty (\operatorname{mod} m)$. Покладемо $A := 0$ і з'ясуємо характер збіжності послідовності $\{A_n : n \geq 1\}$ до оператора A.

Маємо $\forall x \in L_p(\mathbf{R})$: $||A_n x - Ax||^p = \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-p(t-n)^2} |x(t)|^p dt \to 0$, $n \to \infty$, за теоремою Лебега про мажоровану збіжність (перевірте умови теореми самостійно!). Таким чином, $A_n \xrightarrow{s} A$, отже, $A_n \xrightarrow{w} A$.

Згідно із задачею 2 з розділу 6 $||A_n - A|| = 1 \not\to 0,\ n \to \infty$, тому $A_n \not\rightrightarrows A$.

2. За яких умов на число $\alpha \in \mathbf{C}$ послідовність операторів

$A_n : l_p \to l_p,\ 1 \le p \le +\infty,\ A_n x = (\alpha^n x_1,\ \alpha^{n-1}x_2, ..., \alpha x_n, 0, 0, ...)$, збігається рівномірно, слабко, сильно?

Р о з в ' я з о к. Нехай послідовність $\{A_n : n \ge 1\}$ збігається слабко. Тоді для довільного $x \in l_p$ послідовність $\{A_n x : n \ge 1\}$ збігається слабко в l_p, а отже, збігається покоординатно. Зокрема, повинна збігатися числова послідовність $\{\alpha^n x_1 : n \ge 1\}$, збіжність якої при $x_1 \ne 0$ рівносильна збіжності послідовності $\{\alpha^n : n \ge 1\}$, тобто тому, що $|\alpha| < 1$ або $\alpha = 1$. Таким чином, умова $\alpha \in B(0,1) \cup \{1\}$ є необхідною умовою слабкої (а отже, сильної і рівномірної) збіжності послідовності операторів $\{A_n : n \ge 1\}$ при будь-якому $1 \le p \le +\infty$; при цьому граничний оператор $A = I$ при $\alpha = 1$ і $A = 0$ при $|\alpha| < 1$.

Визначимо, чи є ця умова достатньою для кожного з указаних видів збіжності.

Нехай $1 \le p < +\infty$. Якщо $\alpha = 1$, то згідно із задачею 1.2) $A_n \not\rightrightarrows A$.

Якщо $|\alpha| < 1$, то для кожного $x \in l_p$ і для кожного $\varepsilon > 0$ існує $m \in \mathbf{N}$ таке, що $\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} |x_k|^p < \frac{\varepsilon}{2}$. При $n \ge m$ маємо $||A_n x - Ax||^p = |\alpha|^{np}|x_1|^p + |\alpha|^{(n-1)p}|x_2|^p + ... + |\alpha|^p|x_n|^p \le |\alpha|^{n+1-m} \sum\limits_{k=1}^{m} |x_p| + \sum\limits_{k=m+1}^{n} |x_k|^p < \varepsilon$, якщо n таке, що $|\alpha|^{n+1-m} < \left(1 + \sum\limits_{k=1}^{m} |x_p|\right)^{-1} \dfrac{\varepsilon}{2}$. Отже, $A_n \xrightarrow{s} A$. При цьому, якщо $x = e_n,\ n \ge 1$, то $||A_n x - Ax|| = |\alpha|$, отже, $||A_n - A|| \ge |\alpha|,\ n \ge 1$, тому $A_n \rightrightarrows A$ лише при $\alpha = 0$ (тоді $A_n = 0,\ n \ge 1$).

Нехай $p = +\infty$. Якщо $\alpha = 1$, то для $x = (1, 1, ...)$ маємо $||A_n x - Ax|| = 1,\ n \ge 1$, тому $A_n \stackrel{s}{\not\to} A$. Покажемо також, що $A_n \stackrel{w}{\not\to} A$. Дійсно, якщо функціонал $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, визначений на c, за теоремою Гана–Банаха продовжити до функціонала F на l_∞, то при $x = (1, 1, ...)$ маємо $F(A_n x) = 0,\ n \ge 1,\ F(Ax) = 1$.

Якщо $|\alpha| < 1$, то для $x = (1, 1, ...)$ маємо $||A_n x - Ax|| = |\alpha|,\ n \ge 1$, тому $A_n \xrightarrow{s} A$ лише при $\alpha = 0$. Покажемо тепер, що $A_n \xrightarrow{w} A = 0$. Справді, нехай $x \in l_\infty$ – довільний фіксований елемент. Потрібно довести, що $A_n x \xrightarrow{w} 0$ в l_∞, тобто $\forall F \in l_\infty^* \ :\ F(A_n x) \to 0,\ n \to \infty$. Однак, ураховуючи, що $A_n x \in c_0,\ n \ge 1$, і $F \restriction c_0 \in c_0^*$, співвідношення, яке доводиться, рівносильне тому, що $A_n x \xrightarrow{w} 0$ в c_0. Оскільки $c_0^* = l_1$ і множина $\{e_n : n \ge 1\}$ тотальна в l_1, то з критерію слабкої збіжності в банаховому просторі випливає, що слабка збіжність у c_0 рівносильна покоординатній збіжності й рівномірній обмеженості норм. Для послідовності $\{A_n x : n \ge 1\}$ обидві ці умови виконуються, тому $A_n x \xrightarrow{w} 0$ в c_0, а отже, як доведено вище, і в l_∞.

Таким чином, при $1 < p < +\infty$ послідовність збігається рівномірно

$\Leftrightarrow \ \alpha = 0$, а збігається сильно $\Leftrightarrow$ збігається слабко $\Leftrightarrow \ |\alpha| < 1$ або $\alpha = 1$; при $p = +\infty$ послідовність збігається рівномірно $\Leftrightarrow$ збігається сильно $\Leftrightarrow \ \alpha = 0$, а збігається слабко $\Leftrightarrow \ |\alpha| < 1$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

3. Довести такі твердження:

1) якщо границя існує, то вона єдина для будь-якої операторної збіжності;
2) з рівномірної збіжності випливає сильна;
3) з сильної збіжності випливає слабка;
4) твердження, обернені до тверджень пп. 2,3 – хибні;
5) у скінченновимірному просторі рівномірна, сильна та слабка збіжності рівносильні.

4. Якого вигляду набуває рівномірна, сильна та слабка операторні збіжності для операторів із $\mathcal{L}(X, \mathbf{K})$, де X – лінійний нормований простір, тобто для функціоналів?

5. Нехай $X_1, \ X_2$ – лінійні нормовані простори, $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{L}(X_1, X_2)$, $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$. Довести, що для збіжності $A_n \xrightarrow{s} A, \ n \to \infty$, достатньо, а якщо X_1 – банахів простір, то і необхідно, щоб виконувались умови: 1) послідовність $\{||A_n|| \ : \ n \geq 1\}$ обмежена; 2) існує множина $M \subset X_1$, тотальна в X_1, така, що $\forall x \in M \ : \ A_n x \to Ax, \ n \to \infty$, в X_2.

6. Сформулювати і довести твердження, аналогічне попередній задачі, для слабкої збіжності операторів.

7. Дослідити послідовність операторів $A_n \ : \ l_p \to l_p, \ n \geq 1$, на рівномірну, сильну та слабку збіжність, якщо:

1) $A_n x = (\underbrace{0, ..., 0}_{n}, x_1, x_2, ...), \ 1 \leq p < +\infty$;
2) $A_n x = (x_{n+1}, x_{n+2}, ...), \ 1 \leq p \leq +\infty$;
3) $A_n x = (\underbrace{0, ..., 0}_{n-1}, x_n, 0, 0, ...), \ 1 \leq p < +\infty$;
4) $A_n x = (\underbrace{0, ..., 0}_{n-1}, x_n, x_{n+1}, ...), \ 1 \leq p < +\infty$;
5) $A_n x = (x_n, x_{n-1}, x_2, ...x_1, 0, 0, ...), \ 1 \leq p \leq +\infty$;
6) $A_n x = (\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n-1}, ..., \frac{x_n}{1}, 0, 0, ...), \ 1 \leq p < +\infty$;
7) $A_n x = (\underbrace{0, ..., 0}_{n-1}, \sqrt{n}\, x_{2n}, 0, 0, ...), \ 1 \leq p \leq +\infty$;
8) $A_n x = (\sum\limits_{m=1}^{n} x_m, 0, 0, ...), \ p = 1$;
9) $A_n x = (\frac{1+n}{1+n} x_1, \frac{1+n}{1+2n} x_2, \frac{1+n}{1+3n} x_3, ..., \frac{1+n}{1+n^2} x_n, 0, 0, ...)$, $1 \leq p \leq +\infty$;

10) $A_n x = (\sqrt[n]{n}x_1,\ \sqrt[n]{n}x_2, ...,\ \sqrt[n]{n}x_n, ...),\ 1 \le p \le +\infty;$
11) $A_n x = (\sqrt[n]{n}x_1,\ \sqrt[n]{n}x_2, ...,\ \sqrt[n]{n}x_n, 0, 0, ...),\ 1 \le p < +\infty;$
12) $A_n x = (\frac{x_n}{2n}, \frac{x_{n+1}}{2n+1}, ..., \frac{x_{2n}}{3n}, 0, 0, ...),\ 1 \le p \le +\infty;$
13) $A_n x = (\frac{1+n}{1+n}x_1, \frac{1+n}{1+2n}x_2, \frac{1+n}{1+3n}x_3, ..., \frac{1+n}{1+kn}x_k, ...),$
$1 \le p \le +\infty;$
14) $A_n x = (\frac{1+n}{1+n}x_1, \frac{1+n}{1+2n}x_2, \frac{1+n}{1+3n}x_3, ..., \frac{1+n}{1+kn}x_k, 0, 0, ...),$
$1 \le p \le +\infty$, де $k \in \mathbf{N}$ – фіксоване.

8*. Дослідити послідовність операторів з пп. 3,6,11 задачі 7 на рівномірну, сильну та слабку збіжність при $p = +\infty$.

9. Знайти необхідні та достатні умови на послідовність $\{\alpha_n : n \ge 1\} \subset \mathbf{C}$, за яких послідовність операторів $\{A_n : l_p \to l_p \ : \ n \ge 1\}$, $1 \le p \le +\infty$, збігається рівномірно, сильно, слабко, якщо:

1) $A_n x = (\alpha_n x_1, 0, 0, ...);$
2) $A_n x = (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n-1}, \alpha_n x_1, 0, 0, ...);$
3) $A_n x = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_n x_n, 0, 0, ...);$
4) $A_n x = (\alpha_n x_1, \alpha_n x_2, ..., \alpha_n x_n, 0, 0, ...);$
5) $A_n x = (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n-1}, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_n x_n, 0, 0, ...);$
6) $A_n x = (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n-1}, \alpha_n x_1, \alpha_{n-1} x_2, ..., \alpha_1 x_n, 0, 0, ...);$
7) $A_n x = (\alpha_n x_n, \alpha_{n-1} x_{n+1}, ..., \alpha_1 x_{2n-1}, 0, 0, ...);$
8) $A_n x = (\alpha_n x_1, \alpha_{n+1} x_2, ...);$
9) $A_n x = (\alpha_n x_1, \alpha_{n+1} x_2, ..., \alpha_{2n-1} x_n, 0, 0, ...);$
10)* $A_n x = (\alpha_n x_1,\ \alpha_{n-1} x_2, ..., \alpha_1 x_n, 0, 0, ...).$

10. Дослідити послідовність операторів $A_n : C([0,1]) \to C([0,1])$ на рівномірну, сильну та слабку збіжність, якщо:

1) $(A_n x)(t) = t^n(1-t)x(t);$
2) $(A_n x)(t) = t^n x(t);$
3) $(A_n x)(t) = e^{-nt}x(t);$
4) $(A_n x)(t) = x(t) \cdot \sin nt;$
5) $(A_n x)(t) = \int\limits_0^1 (t^n + s^n)x(s)ds;$
6) $(A_n x)(t) = x(t) \cdot \sin \frac{t}{n};$
7) $(A_n x)(t) = \int\limits_0^1 \frac{(t+s)^n}{3} x(s)ds;$
8) $(A_n x)(t) = \int\limits_0^1 \frac{(t+s)^n}{3^n} x(s)ds;$
9) $(A_n x)(t) = \int\limits_0^t \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k s^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) x(s)ds;$

10) $(A_n x)(t) = x\left(t^{1+\frac{1}{n}}\right)$;

11) $(A_n x)(t) = (t^{10n} - t^{2n})x(t)$;

12) $(A_n x)(t) = t\int\limits_0^1 x\left(\sin^n \frac{\pi}{2}s\right)ds$;

13) $(A_n x)(t) = t\int\limits_0^1 x(s)\sin^n \frac{\pi}{2}s ds$;

14) $(A_n x)(t) = \int\limits_0^1 t\frac{1+(2s)^n}{1+(2s)^{2n}}x(s)ds$;

15) $(A_n x)(t) = \frac{\ln(1+nt)}{1+nt}x(t)$;

16) $(A_n x)(t) = \frac{\ln(1+t)}{1+nt}x(t)$;

17) $(A_n x)(t) = \int\limits_0^1 t^2\frac{\ln(1+ns)}{1+ns}x(s)ds$;

18) $(A_n x)(t) = \int\limits_0^{\frac{t^n}{2^n}} x(s)ds$;

19) $(A_n x)(t) = \int\limits_0^{t^n} x(s)ds$;

20) $(A_n x)(t) = (1-t)^n \int\limits_0^{t^n} x(s)ds$;

21) $(A_n x)(t) = n\int\limits_t^{t+\frac{1}{n}} x(s)ds$, де $x(s) := x(1),\ s > 1$.

11. Дослідити послідовність операторів $A_n : L_p(T) \to L_p(T)$ на рівномірну, сильну та слабку збіжність, якщо:

1) $T = \mathbf{R},\ (A_n x)(t) = x(t+n),\ 1 \le p < +\infty$;

2) $T = \mathbf{R},\ (A_n x)(t) = \begin{cases} x(t), & t \ge n, \\ 0, & t < n, \end{cases}\ 1 \le p < +\infty$;

3) $T = \mathbf{R},\ (A_n x)(t) = \frac{1}{1+|t-n|}x(t),\ 1 \le p < +\infty$;

4) $T = [0,1],\ (A_n x)(t) = t^n \int\limits_0^1 s^n x(s)ds,\ 1 \le p < +\infty$;

5) $T = [0,1],\ (A_n x)(t) = x(t)\cos nt,\ p = 2$;

6) $T = [0,1],\ (A_n x)(t) = x(t)\cos e^n t,\ p = 2$;

7) $T = [0,1],\ (A_n x)(t) = x(t)\cos ne^t,\ p = 2$;

8)* $T = [0,1],\ (A_n x)(t) = x(t)\cos e^{nt},\ p = 2$;

9) $T = \mathbf{R},\ (A_n x)(t) = x(t)\cdot\chi_{[\ln n, 2\ln n]}(t),\ 1 \le p < +\infty$;

10) $T = [0,1],\ (A_n x)(t) = \sqrt[n]{t}x(t),\ p = 1$;

11) $T = [0,1],\ (A_n x)(t) = \int\limits_0^1 t^2(s^n - s^{2n})x(s)ds,\ 1 \le p < +\infty$.

12. Нехай $\{p_n : n \ge 1\} \subset C([a,b])$ – фіксована послідовність, $(A_n x)(t) := p_n(t)x(t),\ t \in [a,b],\ x \in C([a,b])$. За яких умов на послідовність $\{p_n : n \ge 1\}$ послідовність операторів $\{A_n : n \ge 1\}$ збігається: 1) рівномірно; 2) сильно; 3) слабко? Визначити вигляд граничного оператора.

13. Нехай X_1, X_2 – банахові простори. 1) Довести, що простір $\mathcal{L}(X_1, X_2)$ повний відносно сильної збіжності операторів, тобто довільна послідовність $\{A_n : n \ge 1\} \subset \mathcal{L}(X_1, X_2)$, для якої $\forall x \in X_1\ :\ \{A_n x : n \ge 1\}$

– фундаментальна послідовність елементів з X_2, сильно збігається до деякого оператора $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$; 2) За якої умови на банахові простори X_1 та X_2 простір $\mathcal{L}(X_1, X_2)$ буде повним відносно слабкої збіжності?

14. В $L_p(\mathbf{R})$, $1 \le p < +\infty$, визначимо оператор зсуву $(A_s x)(t) := x(t+s)$, $t \in \mathbf{R}$, $x \in L_p(\mathbf{R})$, $s \in \mathbf{R}$. Нехай $s_n \to s$, $n \to \infty$. Довести, що $A_{s_n} \xrightarrow{s} A_s$, але, узагалі кажучи, $A_{s_n} \not\rightrightarrows A_s$.

15. Нехай X – простір $C^1([0,1])$ з нормою $||x|| := \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$, $x \in C^1([0,1])$. Визначимо оператор $A_n : X \to C([0,1])$ формулою $(A_n x)(t) = n(x(t+\frac{1}{n}) - x(t))$, $t \in [0,1]$, $x \in X$, $n \ge 1$ (якщо $t > 1$, то покладемо $x(t) := x(1) + x'_-(1)(t-1)$.) Довести, що:

1) для кожного $x \in X$ послідовність $\{A_n x : n \ge 1\}$ збігається за нормою в $C([0,1])$;

2) $\{||A_n|| : n \ge 1\}$ не обмежена;

3) простір $\mathcal{L}(X, C([0,1]))$ не є повним відносно сильної операторної збіжності. Як узгоджуються ці твердження з принципом рівномірної обмеженості?

16*. Позначимо через $\tilde{C}$ простір усіх 2π-періодичних неперервних функцій на $\mathbf{R}$. Його можна ототожнити з підпростором у $C([-\pi,\pi])$, що складається з функцій x, для яких $x(-\pi) = x(\pi)$. Нехай для довільних $n \ge 1$ і $t \in [-\pi,\pi]$: $(S_n x)(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t-s)x(s)ds$, де $D_n(t) = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\pi\sin\frac{t}{2}}$ – ядро Діріхле. Довести, що:

1) $A_n \xrightarrow{s} I$, $A_n \not\rightrightarrows I$ в $L_2([-\pi,\pi])$;
2) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|dt \to +\infty$, $n \to \infty$;
3) існують функції $x \in \tilde{C}$ $(x \in L_1([-\pi,\pi]))$, для яких ряд Фур'є за тригонометричною системою не збігається до x у $\tilde{C}$ (в $L_1([-\pi,\pi])$ відповідно);
4) для довільного $t \in [-\pi,\pi]$ існує функція $x \in \tilde{C}$, ряд Фур'є якої в точці t не збігається до $x(t)$;
5) існують функції $x \in C([-\pi,\pi])$ та $y \in L_1([-\pi,\pi])$ такі, що ряд $\frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n)$ розбігається, де $\{a_0, a_n, b_n : n \ge 1\}$, $\{\alpha_0, \alpha_n, \beta_n : n \ge 1\}$ – коефіцієнти Фур'є функцій x та y відповідно.

17*. Нехай X – банахів простір. Припустимо, що білінійне відображення $B : X \times X \to \mathbf{C}$ неперервне за кожною змінною. Довести неперервність B за сукупністю змінних.

18. Нехай X – ЛНП, що складається з алгебраїчних поліномів однієї змінної з нормою $||x|| = \int\limits_0^1 |x(t)|dt$, і $B(x,y) = \int\limits_0^1 x(t)y(t)dt$. Довести, що B – білінійний функціонал, неперервний за кожною змінною, але він не є неперервним на $X \times X$.

19. Нехай X – банахів простір і $\{A, B, A_n, B_n \,:\, n \geq 1\} \subset \mathcal{L}(X)$. Довести, що:

1) $A_n \xrightarrow{s} A,\ B_n \xrightarrow{s} B \ \Rightarrow\ A_nB_n \xrightarrow{s} AB$;
2) $A_n \rightrightarrows A,\ B_n \rightrightarrows B \ \Rightarrow\ A_nB_n \rightrightarrows AB$;
3) $A_n \xrightarrow{w} A,\ B_n \xrightarrow{w} B \ \not\Rightarrow\ A_nB_n \xrightarrow{w} AB$.

20. Нехай X – банахів простір, $\{x, x_n \,:\, n \geq 1\} \subset X$, $\{A, A_n \,:\, n \geq 1\} \subset \mathcal{L}(X)$. Довести, що:

1) $A_n \xrightarrow{s} A,\ x_n \to x \ \Rightarrow\ A_nx_n \to Ax$;
2) $x_n \xrightarrow{w} x,\ A_n \rightrightarrows A \ \Rightarrow\ A_nx_n \xrightarrow{w} Ax$;
3) $A_n \xrightarrow{w} A,\ x_n \to x \ \Rightarrow\ A_nx_n \xrightarrow{w} Ax$;
4) $A_n \xrightarrow{s} A,\ x_n \xrightarrow{w} x \ \not\Rightarrow\ A_nx_n \xrightarrow{w} Ax$.

21. Нехай X, Y – банахові простори, $\{A, A_n \,:\, n \geq 1\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$, $A_n \xrightarrow{s} A$ і K – компакт у просторі X. Довести, що $\{A_n \,:\, n \geq 1\}$ збігається до A рівномірно на K.

22. Нехай H – гільбертів простір, $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{L}(H)$, $\sup\limits_{n\geq 1} ||A_n|| < +\infty$, а також $\exists L \subset H,\ \overline{L} = H,\ \forall x, y \in L \,:\, \exists \lim\limits_{n\to\infty} (A_nx, y)$. Довести, що $\exists A \in \mathcal{L}(H) \,:\, A_n \xrightarrow{w} A$.

23. Нехай X – банахів простір, $A \in \mathcal{L}(X)$, $\{\lambda_k \,:\, k \geq 0\} \subset \mathbf{R}$, $\varphi(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n t^n,\ t \in \mathbf{R}$, – сума збіжного на $\mathbf{R}$ степеневого ряду. Довести, що послідовність $\{\varphi_n(A) \,:\, n \geq 0\}$, де $\varphi_n(A) = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda^k A^k,\ n \geq 0$, $A^0 = I$, збігається в $\mathcal{L}(X)$ до деякого оператора $\varphi(A) \in \mathcal{L}(X)$. За якої умови на послідовність $\{\lambda_k \,:\, k \geq 0\}$ виконується нерівність $||\varphi(A)|| \leq \varphi(||A||)$?

24. Довести, що для довільного оператора $A \in \mathcal{L}(X)$, де X – банахів простір, визначені оператори $e^A := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$, $\sin A := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $\cos A := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A^{2k}}{(2k)!}$, причому $e^A, \sin A, \cos A \in \mathcal{L}(X)$.

25. Нехай X – банахів простір, $A \in \mathcal{L}(X)$. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$ збігається в $\mathcal{L}(X)$ тоді й тільки тоді, коли для деякого $k \in \mathbf{N}$ виконується нерівність $||A^k|| < 1$.

26. Довести, що в гільбертовому просторі кожен лінійний неперервний оператор є сильною границею скінченновимірних операторів тоді й тільки тоді, коли цей простір є сепарабельним.

27*. Позначимо через T_n підпростір простору $\tilde{C}$ (див. задачу 16), що складається з тригонометричних поліномів порядку не вище n. Оператор $U \in \mathcal{L}(\tilde{C})$ називають поліноміальним (тригонометричним) оператором порядку n, якщо: 1) $\forall x \in \tilde{C} \ : \ Ux \in T_n;$ 2) $\forall x \in T_n \ Ux = x$. Довести такі твердження:

1) поліноміальними операторами є: оператор S_n із задачі 16; оператор, що зіставляє функції її інтерполяційний (тригонометричний) поліном, побудований за фіксованою системою вузлів;

2) **(Зігмунд–Марцинкевич–Берман)** якщо U – поліноміальний оператор порядку n, то $\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (Ux^\tau)(s-\tau)d\tau = (S_n x)(s), \ s \in \mathbf{R}, \ x \in \tilde{C}$, де $x^\tau(t) := x(t+\tau), \ t \in \mathbf{R}, \ \tau \in \mathbf{R}$, причому при кожному $s \in \mathbf{R}$ підінтегральна функція як функція від τ неперервна; 3) якщо U – поліноміальний оператор порядку n, то $||U|| \geq ||S_n|| > A \ln n, \ n \geq 1$, де $A > 0$ – деяка стала; 4) послідовність $\{U_n : n \geq 1\}$ тригонометричних поліноміальних операторів, де U_n – оператор порядку n, не збігається сильно в $\tilde{C}$.

28. Лінійний оператор $A : C([a,b]) \to C([a,b])$ називають невід'ємним, якщо $\forall x \in C([a,b]), \ x \geq 0$ на $[a,b] \ : \ Ax \geq 0$ на $[a,b]$. Довести, що: 1) невід'ємний оператор неперервний, причому $||A|| = ||Ax_0||_\infty$, де $x_0(t) = 1, \ t \in [a,b]$; 2) **(Коровкін)** якщо $\{A_n : n \geq 1\}$ – послідовність невід'ємних операторів, то $A_n \xrightarrow{s} A$ в $C([a,b])$ тоді й тільки тоді, коли $A_n x_k \to A x_k, \ n \to \infty$, де $x_k(t) = t^k, \ t \in [a,b], \ k = 0,1,2$. Чи справедливий аналогічний критерій слабкої збіжності невід'ємних операторів?

29. Нехай $X = L_p([0,1])$ або $X = C([0,1])$, оператор $K : X \to X$ кожній функції $x \in X$ ставить у відповідність многочлен Канторовича $(K_n x)(t) := \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x_{nk} t^k (1-t)^k, \ t \in [0,1]$, де $x_{nk} = (n+1) \int\limits_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} x(t)dt, \ 0 \leq k \leq n, \ n \geq 1$. Довести, що: 1) $K_n \xrightarrow{s} I$ в $C([0,1])$; 2) $K_n \xrightarrow{s} I$ в $L_p([0,1]), \ 1 \leq p < +\infty$. Чи правильне це твердження при $p = +\infty$?

30*. Нехай H – сепарабельний гільбертів простір. Довести, що замкнена куля в $\mathcal{L}(H)$ слабко компактна (тобто з усякої обмеженої в $\mathcal{L}(H)$ послідовності операторів можна виділити слабко збіжну підпослідовність).

РОЗДІЛ 8
ОБЕРНЕНІ ОПЕРАТОРИ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Якщо X, Y – ЛНП, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ – оператор із множиною значень $R(A) \subset Y$, $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, то визначене обернене до A відображення $A^{-1} : R(A) \to X$, $A^{-1}(Ax) := x$, $x \in X$. Це відображення є лінійним оператором, який називають *алгебраїчним оберненим* до оператора A.

Нехай $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Оператор A називають *неперервно оборотним*, якщо: 1) $\operatorname{Ker} A = \{0\}$; 2) $R(A) = Y$; 3) алгебраїчний обернений $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$. У цьому випадку A^{-1} називають *неперервним оберненим* до A оператором.

Теорема 1 (Банаха). Якщо X, Y – банахові простори і оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ є бієкцією, то оператор A є неперервно оборотним, тобто $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Теорема 2. Нехай X, Y – ЛНП, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Якщо A неперервно оборотний, то $\exists m > 0\ \forall x \in X\ :\ ||Ax|| \geq m||x||$. Для оператора A з $R(A) = Y$ ця нерівність є достатньою умовою неперервної оборотності. Зауважимо, що вказана умова еквівалентна такій: $\inf\limits_{||x||=1} ||Ax|| > 0$.

Теорема 3 (Критерій неперервної оборотності). Нехай X, Y – ЛНП. Оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ неперервно оборотний тоді й лише тоді, коли $\exists B \in \mathcal{L}(Y, X)\ \forall x \in X\ :\ BAx = x,\ \forall y \in Y\ :\ ABy = y$.

Теорема 4. Нехай X – банахів простір, $A \in \mathcal{L}(X)$, $||A|| < 1$. Тоді оператор $I - A$ неперервно оборотний і $(I - A)^{-1} = I + \sum\limits_{n=1}^{\infty} A^n$, де ряд збігається за нормою.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

1. Нехай $X = l_2$, $\sup\limits_{n\geq 1} |a_n| < +\infty$, $Ax = \{a_n x_n\ :\ n \geq 1\}$. Довести, що:

1) $\operatorname{Ker} A = \{0\} \ \Leftrightarrow\ \forall n \geq 1\ :\ a_n \neq 0$;

2) A – неперервно оборотний $\Leftrightarrow\ \inf\limits_{n\geq 1} |a_n| > 0$.

Р о з в ' я з о к. Перше твердження задачі випливає з того, що $Ax = 0$ $\Leftrightarrow\ \forall n \geq 1\ :\ a_n x_n = 0$. Доведемо друге твердження. Нехай спочатку $m := \inf\limits_{n\geq 1} |a_n| > 0$. Розглянемо оператор, що діє за формулою $Bx =$

$\left\{\frac{1}{a_n}x_n \,:\, n\geq 1\right\}, x\in l_2$. Ясно, що $B\in\mathfrak{L}(l_2)$ і $||B||\leq\frac{1}{m}$. Очевидно, що $BA=AB=I$ і з критерію неперервної оборотності (теорема 3) випливає, що A неперервно оборотний (більше того, $A^{-1}=B$). Нехай тепер A неперервно оборотний. Тоді $\inf\limits_{||x||=1}||Ax||\leq\inf\limits_{n\geq 1}||Ae_n||=\inf\limits_{n\geq 1}|a_n|$ і твердження задачі випливає з теореми 2.

2. Нехай $X=L_2([a,b]), p\in L_2([a,b]), (Ax)(t)=p(t)x(t)$. Довести, що:
1) $\operatorname{Ker}A=\{0\} \;\Leftrightarrow\; |p(t)|>0(\operatorname{mod} m)$;
2) A – неперервно оборотний $\Leftrightarrow\; p^{-1}\in L_\infty([a,b])$.

Р о з в ' я з о к. Розв'язок задачі в основному повторює аргументи розв'язку задачі 1 (зауважимо, що роль оператора B відіграє оператор множення на функцію $p^{-1}(t)$). Зупинимося більш детально на випадку, коли $p^{-1}\notin L_\infty([a,b])$ і доведемо, що A не є неперервно оборотним. Позначимо $\triangle_\varepsilon=\left\{t\in[a,b]\,|\,|p^{-1}(t)|\geq\frac{1}{\varepsilon}\right\}=\{t\in[a,b]\,|\,|p(t)|\leq\varepsilon\},\ \varepsilon>0$. Умова $p^{-1}\notin L_\infty([a,b])$ еквівалентна умові $\forall\varepsilon>0\ :\ m(\triangle_\varepsilon)>0$. Уведемо функції $x_\varepsilon:=(m(\triangle_\varepsilon))^{-\frac{1}{2}}\chi_{\triangle_\varepsilon}\in\mathfrak{L}_2([a,b])$. Ясно, що $||x_\varepsilon||=1$ і $||Ax_\varepsilon||\leq\varepsilon||x_\varepsilon||=\varepsilon$. Маємо, $\inf\limits_{||x||=1}||Ax||\leq\inf\limits_{\varepsilon>0}||Ax_\varepsilon||\leq\inf\limits_{\varepsilon>0}\varepsilon=0$ і з теореми 2 випливає, що A не є неперервно оборотним.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

3. Довести, що обернений оператор до лінійного є лінійним.

4. Довести, що для лінійного оператора $A\ :\ C_p^m\ \to\ C_p^m$, $1\leq p\leq+\infty$, наведені твердження еквівалентні:
1) $\operatorname{Ker}A=\{0\}$;
2) оператор A має неперервний обернений A^{-1};
3) матриця $[A]$ є невиродженою;
4) рівняння $Ax=y$ має розв'язок для кожного $y\in\mathbf{C}^m$.

5. Нехай оператор A задається формулою $Ax=(\alpha_1x_1,\ \alpha_2x_2,...)$, $x\in l_p,\ 1\leq p\leq+\infty$, де $\{\alpha_n:\,n\geq 1\}\subset\mathbf{C}$ – фіксована послідовність, $\sup\limits_{n\geq 1}|\alpha_n|<+\infty$.
1) Довести, що A має неперервний обернений A^{-1} тоді й лише тоді, коли $\inf\limits_{n\geq 1}|\alpha_n|>0$;
2) Нехай $\alpha_n=\frac{1}{n}$. Довести, що область значень $R(A)$ не замкнена в l_2.

6. Нехай X – банахів простір, $A\in\mathfrak{L}(X),\ ||A||<1$. Довести, що оператор $I+A$ має неперервний обернений, і знайти $(I+A)^{-1}$.

7. 1) Нехай X – банахів простір, $A,B\subset\mathfrak{L}(X),\ A$ має неперервний обернений $A^{-1},\ ||B||<||A^{-1}||^{-1}$. Довести, що $A+B$ неперервно оборотний і знайти $(A+B)^{-1}$.

2) Довести, що множина неперервно оборотних операторів відкрита в $\mathfrak{L}(X)$.

8. Нехай X – банахів простір. Довести, що оператор $A \in \mathfrak{L}(X)$ має неперервний обернений тоді й тільки тоді,коли A^2 має неперервний обернений.

9. Нехай ядро $K = K(t,s) \in C([0,1]^2)$, причому $K(t,s) = k(t)l(s)$, де $k, l \in C([0,1])$, не є тотожними нулями. Довести, що оператор $A : C([0,1]) \to C([0,1])$, де $(Ax)(t) = x(t) - \lambda \int\limits_0^t K(t,s)x(s)ds$, $t \in [0,1],\ \lambda \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$, є неперервно оборотним. Знайти A^{-1}.

10. Нехай ядро $K = K(t,s) \in C([0,1]^2)$, причому $K(t,s) = k(t)l(s)$, де $k, l \in C([0,1])$, не є тотожними нулями і $\int\limits_0^1 k(t)l(t)dt \neq 1$. Довести, що оператор $A : C([0,1]) \to C([0,1])$, де $(Ax)(t) = x(t) - \lambda \int\limits_0^1 K(t,s)x(s)ds$, $t \in [0,1],\ \lambda \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$, є неперервно оборотним. Знайти A^{-1}.

11. Нехай $X_0 = X_1 = \left\{x \in C^1([0,1]) \,:\, x(0) = 0\right\}$ і на X_i розглядаються норми $||x||_0 = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$ та $||x||_1 = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max\limits_{t\in[0,1]} |x'(t)|$ відповідно. Нехай також $A_i : C([0,1]) \to X_i,\ (A_i x)(t) = \int\limits_0^t x(s)ds$. Знайти A_i^{-1}. Довести. що A_1^{-1} неперервний, A_0^{-1} не є неперервним.

12. Нехай X_1 – простір з попередньої задачі. Довести, що кожний з наступних операторів: $A : X_1 \to C([0,1])$ є неперервно оборотним і знайти A^{-1}, якщо:

1) $(Ax)(t) = 2x'(t) - 3x(t)$;
2) $(Ax)(t) = x'(t) - tx(t)$;
3) $(Ax)(t) = x'(t) + e^t x(t)$;
4) $(Ax)(t) = x'(t) + 2t^2 x(t)$;
5) $(Ax)(t) = e^t x'(t) - 2tx(t)$;
6) $(Ax)(t) = (t+1)x'(t) + tx(t)$;
7) $(Ax)(t) = x'(t) + \alpha(t)x(t),\ \alpha \in C([0,1])$.

13. Нехай X – ЛНП, $A, B \in \mathfrak{L}(X)$ і неперервно оборотні. Довести, що AB – неперервно оборотний і $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

14. У просторі $C([0,1])$ оператори A і B визначаються формулами $(Ax)(t) = (t+1)x(t)$; $(Bx)(t) = x(t^2)$, $t \in [0,1]$. Знайти $(AB)^{-1}$ та $(BA)^{-1}$.

15. Нехай $A,\ BA \in \mathfrak{L}(X)$ і неперервно оборотні. Довести, що оператор B також неперервно оборотний.

16. Нехай X – ЛНП, $A, B : X \to X$ – лінійні оператори.

1)* Нехай $(I - AB)^{-1} \in \mathfrak{L}(X)$. Довести, що $(I - BA)^{-1} \in \mathfrak{L}(X)$.

2) Довести, що $(AB)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ не означає, що $(BA)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.
3) Нехай існують $(AB)^{-1}$, $(BA)^{-1}$. Чи обов'язково існують A^{-1}, B^{-1}?

17.Нехай X–ЛНП, $A \in \mathcal{L}(X)$, існує послідовність $\{x_n : n \geq 1\} \subset X$ така, що $||x_n|| = 1$ і $Ax_n \to 0, n \to \infty$. Довести, що A не є неперервно оборотним.

18. Довести, що оператор $A : C([0,1]) \to C([0,1])$, де $(Ax)(t) = \alpha(t)x(t),\ \alpha \in C([0,1])$, є неперервно оборотним тоді й тільки тоді, коли $\alpha(t) \neq 0,\ t \in [0,1]$.

19. Нехай $A_i : C([0,1]) \to C^{(i)}([0,1]),\ A_i$ задається формулою $(A_i x)(t) = \int\limits_0^t e^{-(s-t)}x(s)ds$. У кожному з випадків $i = 0; 1; 2$ відповісти на такі питання. 1) Чи існує A_i^{-1}? 2) Чи є A_i неперервно оборотним?

20. Нехай $A, B : C([-1,1]) \to C([-1,1])$, де $(Ax)(t) = x(t^2)$, $(Bx)(t) = x(t^3),\ t \in [-1,1]$. Довести, що A^{-1} не існує, а B є неперервно оборотним. Знайти B^{-1}.

21. Нехай $X_2 = \left\{x \in C^2([0,1]) : x(0) = x(1) = 0\right\}$, $||x||_2 = \sum\limits_{k=0}^{2} \max\limits_{t\in[0,1]} |x^{(k)}(t)|$, оператор $A : X_2 \to C([0,1]), (Ax)(t) = x''(t) - 4x(t)$, $t \in [0,1]$. Знайти A^{-1} і довести, що A – неперервно оборотний.

22. Нехай $X_3 = \left\{x \in C^3([0,1]) \mid x(0) = x'(0) = x''(0) = 0\right\}$, $||x||_3 = \sum\limits_{k=0}^{3} \max\limits_{t\in[0,1]} |x^{(k)}(t)|$, оператор $A : X_3 \to C([0,1])$, $(Ax)(t) = x'''(t) - x''(t),\ t \in [0,1]$. Знайти A^{-1} і довести, що A – неперервно оборотний.

23. Чи є оператор $A : l_2 \to l_2$ неперервно оборотним, якщо:
1) $Ax = (x_1, x_3, x_2, x_4, x_5, ...)$;
2) $Ax = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_3, x_4, ...)$;
3) $Ax = (x_1 + x_2, x_3, 2x_1 + 2x_2, x_4, ...)$;
4) $Ax = (0, x_1, x_2, ...)$;
5) $Ax = (x_2, x_3, x_4, x_5, ...)$;
6) $Ax = (x_1 - x_2, x_2, x_3, ...)$;
7) $Ax = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_4, x_5, ...)$?

Знайти оператор A^{-1}, якщо він існує.

24. Нехай $A : C([0,1]) \to C([0,1]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^1 (ts + t^2s^2)x(s)ds$. Довести, що оператор A^{-1} не існує.

25. Нехай $A : C([-1,1]) \to C([-1,1]),\ (Ax)(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$. Чи існує A^{-1}?

26. Нехай X – банахів простір відносно $||\cdot||_1$ і $||\cdot||_2$. Припустимо, що $||\cdot||_1$ *підпорядкована* $||\cdot||_2$, тобто $\exists C > 0\ \forall x \in X\ :\ ||x||_1 \leq C||x||_2$. Довести, що $||\cdot||_1$ еквівалентна нормі $||\cdot||_2$. Чи істотна повнота простору відносно обох норм?

РОЗДІЛ 9
КЛАСИ ЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ У ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Нехай H – гільбертів простір.

Функцію $b : H \times H \to \mathbf{K}$ називають *білінійною формою*, якщо вона лінійна за першою та антилінійна за другою змінною (при $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ лінійна за кожною змінною):

1) $\forall x_1, x_2, y \in H \ \forall \alpha, \beta \in \mathbf{K} : b(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha b(x_1, y) + \beta b(x_2, y)$,

2) $\forall x, y_1, y_2 \in H \ \forall \alpha, \beta \in \mathbf{K} : b(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \overline{\alpha} b(x, y_1) + \overline{\beta} b(x, y_2)$.

Білінійну форму b називають *ермітовою*, якщо $b(x, y) = \overline{b(y, x)}$, $x, y \in H$. Білінійну форму b називають *обмеженою*, якщо $\exists C \geq 0$ $\forall x, y \in H : |b(x, y)| \leq C||x|| \cdot ||y||$; найменше з таких чисел $C \geq 0$ називають *нормою білінійної форми* b і позначають $||b||$. Якщо b – білінійна форма, то функцію $b[x] := b(x, x), x \in H,$ називають квадратичною формою.

Нехай $A \in \mathcal{L}(H)$. Білінійну форму $b_A(x, y) = (Ax, y), \ x, y \in H$, називають білінійною формою, породженою оператором A.

Теорема 1. Для кожної обмеженої білінійної форми b існує єдиний оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ такий, що $b = b_A$, при цьому $||b|| = ||A||$.

Оператор $A^* \in \mathcal{L}(H)$ називають *спряженим* до оператора $A \in \mathcal{L}(H)$, якщо $\forall \{x, y\} \subset H : (Ax, y) = (x, A^*y)$. Для кожного оператора $A \in \mathcal{L}(H)$ спряжений оператор A^* завжди існує і єдиний, при цьому $||A^*|| = ||A||$.

Оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ називають *самоспряженим*, якщо $A^* = A$, тобто $(Ax, y) = (x, Ay), \ x, y \in H$. Оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ називають *нормальним*, якщо $AA^* = A^*A$. Самоспряжений оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ називають *невід'ємним*, якщо $\forall x \in H : (Ax, x) \geq 0$; позначається $A \geq 0$. Якщо для самоспряжених операторів $A, B \in \mathcal{L}(H)$ справедливо $A - B \geq 0$, то кажуть, що $A \geq B$. Самоспряжений оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ називають *напівобмеженим знизу* числом $c \in \mathbf{R}$ (*напівобмеженим зверху* числом $d \in \mathbf{R}$), якщо $A \geq cI$ ($A \leq dI$ відповідно).

Нехай G – підпростір H. Оператор $P_G : H \to H$, де $P_G x = \mathrm{pr}_G\, x$, називають оператором ортогонального проектування (або *ортопроектором*).

Нехай H_1, H_2– гільбертові простори. Тоді лінійний оператор $V : H_1 \to H_2$ називають *ізометричним*, якщо він зберігає скалярний добуток (тобто $(Vx, Vy)_2 = (x, y)_1, \ x, y \in H_1$.) Лінійний оператор $U : H_1 \to H_2$ називають *унітарним*, якщо U ізометричний і є сюр'єкцією (тобто $R(U) = H_2$).

Поняття спряженого оператора можна ввести і для операторів, що діють у лінійних нормованих просторах.

Нехай X, Y – лінійні нормовані простори, $A \in \mathcal{L}(H)$. Оператор $A' : Y^* \to X^*$, де $(A'f)(x) = f(Ax)$, $f \in Y^*$, $x \in X$ називають спряженим до оператора A.

Теорема 2. Дане означення коректне, тобто однозначно визначає оператор $A' \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$, при цьому $||A'|| = ||A||$.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

1. Нехай H – гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H)$. Довести, що: 1) $A^{**} := (A^*)^* = A$; 2) $||A^*|| = ||A||$; 3) якщо $A = A^*$, то $||A^2|| = ||A||^2$.

Р о з в ' я з о к. 1) Маємо $\forall x, y \in H \ : \ (A^*x, y) = \overline{(y, A^*x)} = \overline{(Ay, x)} = (x, Ay)$. Звідси вже можна зробити висновок, що $A^{**} = A$. Пояснимо це один раз детально. Оскільки $(A^*x, y) = (x, A^{**}y)$, то $(x, A^{**}y) = (x, Ay)$, $x, y \in H$. Покладемо $x = A^{**}y - Ay$, отримаємо $||A^{**}y - Ay||^2 = 0$, тому $A^{**}y = Ay$ для всіх $y \in H$,тобто $A^{**} = A$.

2) Маємо $|(x, A^*y)| = |(Ax, y)| \le ||Ax|| \cdot ||y|| \le ||A|| \cdot ||x|| \cdot ||y||$, $x, y \in H$. Покладемо тут $x = A^*y$, отримаємо $||A^*y||^2 \le ||A|| \cdot ||A^*y|| \cdot ||y||$, звідки $||A^*y|| \le ||A|| \cdot ||y||$, $y \in H$, тому $||A^*|| \le ||A||$. Для доведення протилежної нерівності скористаємося п.1) і вже доведеною нерівністю: $||A|| = ||A^{**}|| \le ||A^*||$.

3) Оскільки $||A^2x|| \le ||A|| \cdot ||Ax|| \le ||A||^2 \cdot ||x||$, $x \in H$, то $||A^2|| \le ||A||^2$ (при цьому самоспряженість A неістотна). Навпаки, $||Ax||^2 = (Ax, Ax) = (A^2x, x) \le ||A^2x|| \cdot ||x|| \le ||A^2|| \cdot ||x||^2$, $x \in H$, звідки $||Ax|| \le \sqrt{||A^2||}||x||$, $x \in H$, тому $||A|| \le \sqrt{||A^2||}$, тобто $||A||^2 \le ||A^2||$.

2. Довести, що:

1) якщо (T, μ) – простір із σ-скінченною мірою, A – інтегральний оператор у комплексному гільбертовому просторі $L_2(T, \mu)$ з ядром $K \in L_2(T \times T, \mu \times \mu)$, тобто $(Ax)(t) = \int\limits_T K(t, s)x(s)d\mu(s)$, $t \in T$, $x \in L_2(T, \mu)$, то A^* – інтегральний оператор з ядром $K^*(t, s) = \overline{K(s, t)}$, $(t, s) \in T \times T$;

2) якщо H – комплексний сепарабельний гільбертів простір, оператор A задано матрицею $(a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$, то оператор A^* задається матрицею $(a^*_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$, де $a^*_{jk} = \overline{a_{kj}}$, $j, k \in \mathbf{N}$.

Р о з в ' я з о к. 1) Для кожного $x \in L_2(T, \mu)$ і кожного $y \in L_2(T, \mu)$ потрібно знайти такий елемент $y^* \in L_2(T, \mu)$, що $(Ax, y) = (x, y^*)$ (тоді $y^* = A^*y$). Маємо $(Ax, y) = \int\limits_T (Ax)(t)\overline{y(t)}dt = \int\limits_T (\int\limits_T K(t, s)x(s)ds)\overline{y(t)}dt$

$=\int\limits_T(\int\limits_T K(t,s)x(s)\overline{y(t)}dt)ds=\int\limits_T x(s)\overline{(\int\limits_T \overline{K(t,s)}y(t)dt)}ds$. Тут ми змінили порядок інтегрування, користуючись теоремою Фубіні. З отриманої рівності (так само, як при розв'язанні задачі 1.1) випливає, що $(A^*y)(s)=y^*(s)=\int\limits_T \overline{K(t,s)}y(t)dt$. Перейменувавши змінні (t на s, а s на t), знаходимо, що A^* – інтегральний оператор з ядром $K^*(t,s)=\overline{K(s,t)},\ (s,t)\in T\times T$.

2) Спряжений оператор A^* задається деякою матрицею $(A^*_{jk})^\infty_{j,k=1}$, при цьому $a^*_{jk}=(A^*e_k,e_j),\ j,k\in\mathbf{N}$. Але $(A^*e_k,e_j)=(e_k,Ae_j)=\overline{(Ae_j,e_k)}=\overline{a_{kj}}$, тобто $a^*_{jk}=\overline{a_{kj}},\ j,k\in\mathbf{N}$.

Зауваження. 1. У дійсному просторі в п.1 $K^*(t,s)=K(s,t)$, $(t,s)\in T\times T$, у п.2 $a^*_{jk}=a_{kj},\ j,k\in\mathbf{N}$.

2. Твердження п.2 можна вивести з твердження п.1.

3. Знайти спряжений до оператора $A:X\to X$, якщо

1) $X=l_2,\ Ax=(0,x_1,x_2,...)$;

2) $X=L_2([0,1]),\ (Ax)(t)=\int\limits_0^t x(s)ds$.

Р о з в ' я з о к. 1) Для кожного $x\in l_2$ і кожного $y\in l_2$ потрібно знайти такий елемент $y^*\in l_2$, що $(Ax,y)=(x,y^*)$. Маємо, що $(Ax,y)=0\cdot\overline{y_1}+x_1\cdot\overline{y_2}+x_2\cdot\overline{y_3}+...=x_1\overline{y_2}+x_2\overline{y_3}+...$, тому, якщо покласти $y^*:=(y_2,y_3,...)$, то $(Ax,y)=(x,y^*)$. Отже, $A^*y=(y_2,y_3,...),\ y\in l_2$.

Зауважимо, що за умови $A:l_p\to l_p,\ 1\le p<+\infty$, оператор A' задається тією ж формулою, але $A':l_q\to l_q$, де q – спряжений до p індекс.

2) Для кожного $x\in L_2([0,1])$ і кожного $y\in L_2([0,1])$ потрібно знайти такий елемент $y^*\in L_2([0,1])$, що $(Ax,y)=(x,y^*)$. Маємо, що $(Ax,y)=\int\limits_0^1(Ax)(t)\overline{y(t)}dt=\int\limits_0^1(\int\limits_0^t x(s)\overline{y(t)}ds)dt$. Змінимо порядок інтегрування. Отримаємо $(Ax,y)=\int\limits_0^1(\int\limits_s^1 x(s)\overline{y(t)}dt)ds=\int\limits_0^1 x(s)\overline{(\int\limits_s^1 y(t)dt)}ds$, тобто $y^*(s)=\int\limits_s^1 y(t)dt$. Перейменувавши змінні (t на s, а s на t), знаходимо, що $(A^*y)(t)=\int\limits_t^1 y(s)ds,\ t\in[0,1],\ y\in L_2([0,1])$.

Зауважимо, що ці результати можна отримати і за допомогою задачі 2.

4. Нехай H – гільбертів простір. Довести, що:

1) якщо $U:H\to H,\ R(U)=H$ і $(Ux,Uy)=(x,y),\ x,y\in H$, то U – лінійний неперервний оператор (тобто U – унітарний оператор) і $||U||=1$;

2) оператор $U\in L(H)$ є унітарним тоді й тільки тоді, коли він непе-

рервно оборотний і $U^{-1} = U^*$, при цьому U^* також є унітарним оператором.

Р о з в ' я з о к. 1) Покажемо, що U – лінійний оператор, тобто для всіх $x, y \in H$ і $\alpha \in \mathbf{K}$ справедливі рівності $U(\alpha x) = \alpha Ux$, $U(x+y) = Ux + Uy$.

Використовуючи властивості скалярного добутку і рівність з умови задачі, маємо $||U(\alpha x) - \alpha Ux||^2 = (U(\alpha x) - \alpha Ux, U(\alpha x) - \alpha Ux) = (U(\alpha x), U(\alpha x)) - \alpha(Ux, U(\alpha x)) - \overline{\alpha}(U(\alpha x), Ux) + \alpha\overline{\alpha}(Ux, Ux) = (\alpha x, \alpha x) - \alpha(x, \alpha x) - \overline{\alpha}(\alpha x, x) + \alpha\overline{\alpha}(x, x) = 0$, звідки $U(\alpha x) - \alpha Ux = 0$, тобто перша рівність, що доводиться, істинна. Друга встановлюється аналогічно; для цього потрібно довести, що $||U(x+y) - Ux - Uy||^2 = 0$. Таким чином, U – лінійний оператор.

Якщо в рівності з умови покласти $x = y$, то отримаємо $||Ux|| = ||x||,\ x \in H$; звідси випливає, що U – неперервний оператор і $||U|| = 1$.

2) *Необхідність.* Нехай U – унітарний оператор, тобто $R(U) = H$ і $||Ux|| = ||x||,\ x \in H$. За критерієм неперервної оборотності звідси випливає, що $\exists U^{-1} \in \mathcal{L}(H)$.

Оскільки $(x, U^*y) = (Ux, y) = (Ux, UU^{-1}y) = (x, U^{-1}y)$, $x, y \in H$, то (див. розв'язок задачі 1.1) $U^* = U^{-1}$.

Унітарність оператора $U^* = U^{-1}$ випливає зі співвідношення $(U^{-1}x, U^{-1}y) = (UU^{-1}x, UU^{-1}y) = (x, y),\ x, y \in H$, і рівності $R(U^{-1}) = H$, яка виконується, бо область значень $R(U^{-1})$ оператора U^{-1} дорівнює області визначення оператора U, тобто дорівнює H.

Достатність. Нехай $\exists U^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ і $U^{-1} = U^*$. Тоді $R(U) = H$, бо U – бієкція. Маємо також, що $(Ux, Uy) = (x, U^*Uy) = (x, U^{-1}Uy) = (x, y),\ x, y \in H$.

5. Нехай H – гільбертів простір. Довести, що:

1) якщо $P : H \to H$ – ортопроектор на деякий підпростір $G \subset H$, то $P \in \mathcal{L}(H)$, причому якщо $G \neq \{\overline{0}\}$, то $||P|| = 1$;

2) оператор $P \in \mathcal{L}(H)$ є ортопроектором на деякий підпростір $G \subset H$ тоді й тільки тоді, коли $P^* = P$ і $P^2 = P$, при цьому $G = \{x \in H \ :\ Px = x\}$.

Р о з в ' я з о к. 1) Покажемо, що P – лінійний оператор. Нехай $\{x, y\} \subset H,\ \{\alpha, \beta\} \subset \mathbf{K}$. Тоді за теоремою про розклад гільбертового простору $\alpha x + \beta y = \alpha(\operatorname{pr}_G x + \operatorname{pr}_{G^\perp} x) + \beta(\operatorname{pr}_G y + \operatorname{pr}_{G^\perp} y) = (\alpha \operatorname{pr}_G x + \beta \operatorname{pr}_G y) + (\alpha \operatorname{pr}_{G^\perp} x + \beta \operatorname{pr}_{G^\perp} y) =: z_1 + z_2$. Оскільки $z_1 \in G,\ z_2 \in G^\perp$, то внаслідок єдиності розкладу гільбертового простору маємо, що $z_1 = \operatorname{pr}_G(\alpha x + \beta y),\ z_2 = \operatorname{pr}_{G^\perp}(\alpha x + \beta y)$. Перша з цих рівностей означає, що P – лінійний оператор.

З рівності $||\operatorname{pr}_G x||^2 + ||\operatorname{pr}_{G^\perp} x||^2 = ||\operatorname{pr}_G x + \operatorname{pr}_{G^\perp} x||^2 = ||x||^2$ отримуємо, що $||\operatorname{pr}_G x|| \leq ||x||,\ x \in H$, тобто $||Px|| \leq ||x||,\ x \in H$. З цієї нерівності випливає, що P – неперервний оператор і $||P|| \leq 1$. Якщо $G = \{0\}$, то $Px = 0,\ x \in H$, тобто $P = 0$ і $||P|| = 0$. Якщо $G \neq \{0\}$, то $\exists g \in G \;:\; g \neq 0$, тому $Pg = g$ і $\frac{||Pg||}{||g||} = 1$; звідси робимо висновок, що $||P|| = 1$.

2) *Необхідність.* Нехай P – ортопроектор на підпростір G. Для довільних $x, y \in H$ існують $x_1, y_1 \in G,\ x_2, y_2 \in G^{\perp}$ такі, що $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$.

Маємо $(Px, y) = (x_1, y_1 + y_2) = (x_1, y_1),\ (x, Py) = (x_1 + x_2, y_1) = (x_1, y_1)$ (бо $y_2 \perp x_1,\ x_2 \perp y_1$), тому $(Px, y) = (x, Py)$, звідки $P^* = P$.

Далі, $P^2 x = Px_1 = x_1 = Px$, тобто $P^2 = P$.

Достатність. Нехай $P^* = P$ і $P^2 = P$. Покладемо $G := \{x \in H \mid Px = x\}$. Тоді $G = \mathrm{Ker}\,(P - I)$, отже, G – підпростір в H. Доведемо, що $Px = \mathrm{pr}_G\, x,\ x \in H$. Оскільки $\forall x \in H\ \exists! x_1 \in G$ $\exists! x_2 \in G^{\perp} \;:\; x = x_1 + x_2$, а також $Px = Px_1 + Px_2 = x_1 + Px_2$, то потрібно показати, що $Px_2 = 0$. Оскільки $P^2 = P$, то $P(Px_2) = Px_2$, тобто $Px_2 \in G$. Далі, для кожного $y \in G$ маємо $(Px_2, y) = (x_2, Py) = (x_2, y) = 0$ (бо $x_2 \in G^{\perp},\ y \in G$); поклавши $y := Px_2$, отримаємо $Px_2 = 0$. Таким чином, $Px = x_1 = \mathrm{pr}_G\, x,\ x \in G$, тобто P – ортопроектор на G.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

6. Нехай H – гільбертів простір, $A, B \in \mathcal{L}(H)$. Довести твердження:

1) $I^* = I,\ 0^* = 0$;
2) $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*,\ \alpha, \beta \in \mathbf{C}$;
3) $(AB)^* = B^* A^*$;
4) якщо $A = A^*,\ B^* = B$, то $(AB)^* = AB \ \Leftrightarrow\ AB = BA$;
5) якщо $\exists A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$, то $\exists (A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ і $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

7. Нехай H – гільбертів простір над полем $\mathbf{K},\ b : H \times H \to \mathbf{K}$ – білінійна форма, $b[x] = b(x, x),\ x \in H$, – відповідна квадратична форма. Довести, що:

1) якщо $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, то $4b(x, y) = b[x + y] - b[x - y] + ib[x + iy] - ib[x - iy],\ x, y \in H$ (*поляризаційна тотожність*);

2) якщо $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, то форма b симетрична ($b(x, y) = b(y, x),\ x, y \in H$) тоді й лише тоді, коли $4b(x, y) = b[x + y] - b[x - y],\ x, y \in H$;

8. Довести, що неперервність білінійної форми b рівносильна кожній з наступних умов:

1) білінійна форма b обмежена;

2) існує єдиний оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ такий, що $b(x, y) = (Ax, y)$, $x, y \in H$, і $||b|| = ||A||$;

3) існує єдиний оператор $C \in \mathcal{L}(H)$ такий, що $b(x, y) = (x, Cy)$, $x, y \in H$, і $||b|| = ||C||$.

9. Нехай $b : H \times H \to \mathbf{C}$ – ермітова білінійна форма на комплексному гільбертовому просторі $H,\ b[x] = b(x, x),\ x \in H$. Довести, що:

1) $b(x,y)=\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} b[x+e^{\frac{2\pi ik}{N}}y]e^{\frac{2\pi ik}{N}},\ x,y\in H,\ N\in\mathbf{N},\ N\geq 3;$

2) $b(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} b[x+e^{i\varphi}y]e^{i\varphi}d\varphi,\ x,y\in H.$

10. Довести, що у комплексному гільбертовому просторі такі твердження рівносильні: 1) оператор $A\in\mathcal{L}(H)$ самоспряжений; 2) білінійна форма b_A, породжена оператором A, ермітова; 3) квадратична форма $b_A[x]=b_A(x,x),\ x\in H,$ набуває лише дійсних значень. Довести, що у дійсному гільбертовому просторі перші два твердження рівносильні між собою, але не рівносильні третьому.

11. 1) Нехай $A\in\mathcal{L}(H)$ – самоспряжений оператор. Довести, що $A=0$ тоді й тільки тоді, коли $\forall x\in H\ :\ (Ax,x)=0.$ 2) У дійсному гільбертовому просторі побудувати ненульовий оператор $A\in\mathcal{L}(H)$ такий, що $\forall x\in H\ :\ (Ax,x)=0.$

12. Нехай H – гільбертів простір над полем $\mathbf{K}$ і $A,B,C,D\in\mathcal{L}(H)$. Довести, що:

1) якщо $\mathbf{K}=\mathbf{C}$ і $\exists C\in\mathbf{R}\ \forall x\in H\ :\ (Ax,x)\geq C||x||^2$, то $A=A^*$;
2) якщо $A^*=A$, то $A^2\geq 0$;
3) умова $A^*=A$ у пункті 2 істотна;
4) якщо $A\leq B,\ B\leq A$, то $A=B$;
5) якщо $A\leq B,\ B\leq C$, то $A\leq C$;
6) якщо $A\leq C,\ B\leq D$, то $A+B\leq C+D$;
7) якщо $A\leq B,\ \lambda\geq 0$, то $\lambda A\leq\lambda B$;
8) якщо $A\leq B$, то $-B\leq -A$;
9) якщо $A^*=A,\ B^*=B$ і $AB=BA$, то $A^2+B^2\geq 2AB$;
10) якщо $A^*=A$, то $\exists m,M\in\mathbf{R}\ :\ mI\leq A\leq MI$;
11) якщо $A^*=A,\ B^*=B$, то не обов'язково $A\leq B$ або $B\leq A$;
12) якщо $A^*=A,\ A\geq 0$ і $A^{-1}\in\mathcal{L}(H)$, то $A^{-1}\geq 0$;
13) якщо A і B унітарні, то AB теж унітарний;
14) якщо $A^*=A,\ B^*=B,\ A\geq B$, то оператори $C^*AC,\ C^*BC$ самоспряжені і $C^*AC\geq C^*BC$;
15) якщо $A^2=A$, то $R(A)$ – замкнена множина в H;
16) якщо $\mathbf{K}=\mathbf{C},\ \alpha,\beta\in\mathbf{C},\ |\alpha|=|\beta|=1$, то оператор $\alpha A+\beta A^*$ нормальний;
17) якщо A – ортопроектор, то $A\geq 0$;
18) якщо A – ортопроектор, то $I-A$ також ортопроектор;
19) якщо $\mathbf{K}=\mathbf{C},\ A=A^*,\ B=B^*$, то оператор $C:=i(AB-BA)$ самоспряжений.

13. Нехай H – гільбертів простір, $A\in\mathcal{L}(H)$. Довести, що:

1) A – ізометричний $\Leftrightarrow\ ||Ax||=||x||,\ x\in H$;

2) якщо H – скінченновимірний, то A – унітарний тоді й лише тоді, коли A – ізометричний;
3) A – ізометричний $\Leftrightarrow$ $A^*A = I$;
4) A – унітарний $\Leftrightarrow$ $A^*A = I$ і $AA^* = I$;
5) A може бути ізометричним, але не унітарним.

14. Нехай лінійний оператор A в гільбертовому просторі $\mathbf{C}^m$ заданий матрицею $\mathcal{A} = (a_{jk})_{j,k=1}^m$ і нехай $\overline{\mathcal{A}}^T$ – транспонована комплексно спряжена матриця, E – одинична матриця. Довести, що:

1) A – самоспряжений $\Leftrightarrow$ $\overline{\mathcal{A}}^T = \mathcal{A}$;
2) A – унітарний $\Leftrightarrow$ A – ізометричний $\Leftrightarrow$ $\overline{\mathcal{A}}^T \mathcal{A} = E$;
3) A – невід'ємний $\Leftrightarrow$ $\overline{\mathcal{A}}^T = \mathcal{A}$ та всі корені рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$ невід'ємні;
4) у випадку гільбертового простору $\mathbf{R}^m$ (тоді $\overline{\mathcal{A}}^T = \mathcal{A}^T$ – звичайна транспонована матриця) твердження пп. 1 і 2 істинні, але з умови $(Ax, x) \geq 0,\ x \in \mathbf{R}^m$, не випливає рівність $\overline{\mathcal{A}}^T = \mathcal{A}^T$.

15. Знайти спряжений до оператора $A : H \to H$, якщо:

1) $H = l_2,\ Ax = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ...)$;
2) $H = l_2,\ Ax = (x_2, x_3, ...)$;
3) $H = l_2,\ Ax = (x_1, ..., x_j, 0, 0, ...)$;
4) $H = l_2,\ Ax = (\underbrace{0, ..., 0}_{j-1}, x_1, 0, 0, ...)$;
5) $H = l_2,\ Ax = (\underbrace{x_1, ..., x_1}_{j}, 0, 0, ...)$;
6) $H = l_2,\ Ax = (x_2, x_1, x_4, x_3, x_6, x_5, ...)$;
7) $H = l_2,\ Ax = (\alpha_j x_j, \alpha_{j+1} x_{j+1}, ...)$;
8) $H = l_2,\ Ax = (0, 0, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ...)$;
9) $H = l_2,\ Ax = (2x_1 + 3x_2, 3x_1 + 5x_2, x_3, 0, 0, ...)$;
10) $H = l_2,\ Ax = (x_1, 4x_2 + 7x_3, 7x_2 + 2x_3, 0, x_5, 0, 0, ...)$;
11) $H = l_2,\ Ax = (3x_1 - 2x_2, x_2, x_3, x_4, ...)$,

де $x = (x_1, x_2, ...)$, $j \in \mathbf{N}$ – фіксоване, $\{\alpha_n : n \geq 1\} \subset \mathbf{C}$ – задані числа;

12) $H = L_2(\mathbf{R}),\ (Ax)(t) = \chi_{[-\alpha,\alpha]}(t)x(t)$;
13) $H = L_2(\mathbf{R}),\ (Ax)(t) = tx(t)$;
14) $H = L_2(\mathbf{R}),\ (Ax)(t) = a(t)x(t+s)$;
15) $H = L_2(\mathbf{R}),\ (Ax)(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$;
16) $H = L_2([0,1]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^1 e^{t+\tau} x(\tau) d\tau$;

17) $H = L_2([0,1]),\ (Ax)(t) = t^3 \int\limits_0^{t^2} x(\tau)d\tau;$

18) $H = L_2([0,1]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^1 t^2\tau^3 x(\tau)d\tau;$

19) $H = L_2([0,1]),\ (Ax)(t) = x(t^\alpha),$

де $a \in L_\infty(\mathbf{R})$ – задана функція, $\{s,\alpha\} \subset \mathbf{R},\ \alpha > 0;$

20) $Ax = (x,y)z$, де $y, z \in H$ – фіксовані елементи.

16. Нехай $\{\alpha_n : n \geq 1\} \subset \mathbf{C}$ – фіксована обмежена послідовність, $Ax = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ...),\ x = (x_1, x_2, ...) \in l_2$. Виразити в термінах чисел $\alpha_n,\ n \geq 1$, твердження:

1) A – самоспряжений;
2) A – нормальний;
3) A – унітарний;
4) A – ізометричний;
5) A – ортопроектор;
6) $\operatorname{Ker} A = \{0\}$.

17. Нехай $(T, \mathcal{F}, \mu)$ – простір із σ-скінченною мірою, A – оператор множення на функцію $p \in L_\infty(T,\mu)$ у просторі $L_2(T,\mu)$. Довести, що:

1) $A = A^* \ \Leftrightarrow$ функція p дійсна майже скрізь;
2) A – унітарний $\Leftrightarrow\ |p| = 1$ майже скрізь;
3) $A \geq 0 \ \Leftrightarrow\ p \geq 0$ майже скрізь;
4) A – ортопроектор $\Leftrightarrow\ p^2 = p$ майже скрізь, тобто $p = \chi_C (\operatorname{mod} \mu)$, де $C \in \mathcal{F}$ – деяка множина.

18. Нехай $s \in \mathbf{R}, (A_s x)(t) = x(t+s), t \in \mathbf{R}, x \in L_2(\mathbf{R}),$ – оператор зсуву.

1) Знайти A_s^* і A_s^{-1} та довести, що оператор A_s унітарний.
2) Покладемо $A = \frac{1}{2}(A_{s_0} + A_{s_1}),\ \{s_0, s_1\} \subset \mathbf{R}$. Довести, що $A^* = A \ \Leftrightarrow\ s_0 + s_1 = 0.$

19. За якої умови на підпростір гільбертового простору ортопроектор на цей підпростір має неперервний обернений?

20. Нехай H – сепарабельний гільбертів простір і $\{e_n : n \geq 1\}$ – ортонормований базис в H.

1) Знайти проектор на лінійну оболонку множини $\{e_1, ..., e_k\},\ k \in \mathbf{N}$.
2) Довести, що оператор $Ax = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} e_n,\ x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in H,$ де $\sigma : H \to H$ – фіксована бієкція, є унітарним.

21. Навести приклад гільбертового простору H і операторів $A, B \in \mathcal{L}(H)$ таких, що:

1) A – нормальний, але не самоспряжений:
2) $A^2 = A$, але A не є ортопроектором;
3) A – унітарний оператор, але не ортопроектор;

4) $A^* = A$, але жодна з нерівностей $A \geq 0,\ A \leq 0$ не виконується;
5) $A^2 = I$, але жодна з нерівностей $A \geq 0,\ A \leq 0$ не виконується;
6) $A^* = A$, але $R(A)$ не є замкненою в H;
7) $A^*{=}A$, але множина $\{(Ax, x) \mid x \in H,\ ||x|| = 1\}$ не є замкненою в $\mathbf{R}$;
8) $A \geq 0,\ B \geq 0$, але AB не є невід'ємним;
9) A не є нормальним;
10) $A \neq 0$, але $A^2 = 0$;
11) $A = A^*, B = B^*,\ A^2 = B^2$, але $AB \neq BA$.

22. Нехай H – гільбертів простір над полем $\mathbf{K},\ A \in \mathcal{L}(H),\ A \geq 0$. Довести, що:
1) $|(Ax, y)|^2 \leq (Ax, x)(Ay, y),\ x, y \in H$;
2) $||Ax||^2 \leq ||A||(Ax, x),\ x \in H$.

23. Чи є підпростором у гільбертовому просторі H множина $G = \{x \in H \mid (Ax, x) = 0\}$, де $A \in \mathcal{L}(H)$, якщо: 1) $A^* = A$; 2) $A \geq 0$?

24. Нехай H – гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H),\ A^* = A,\ x \in H$, $x \notin \operatorname{Ker} A$. Довести, що:
1) $A^n x \neq 0$ для всіх $n \in \mathbf{N}$;
2) послідовність $\left\{\alpha_n := \frac{||A^{n+1}x||}{||A^n x||}\ :\ n \geq 1\right\}$ збіжна.

25. Нехай H – гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H)$. Довести, що $||A^*A|| = ||AA^*|| = ||A||^2 = ||A^*||^2$.

26. Нехай H – комплексний гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H)$. Довести, що:
1) оператори $\mathrm{Re}A := \frac{1}{2}(A + A^*),\ \mathrm{Im}A := \frac{1}{2i}(A - A^*)$ самоспряжені;
2) оператор A однозначно зображається у вигляді $A = B + iC$, де B і C – самоспряжені оператори;
3) оператор A нормальний $\Leftrightarrow\ \mathrm{Re}A \cdot \mathrm{Im}A = \mathrm{Im}A \cdot \mathrm{Re}A$;
4) оператор A унітарний тоді й тільки тоді, коли виконуються умови: а) A – нормальний; б) $(\mathrm{Re}A)^2 + (\mathrm{Im}A)^2 = I$.

27. Нехай A, B – лінійні оператори у гільбертовому просторі H такі, що $(Ax, y) = (x, By),\ x, y \in H$. Довести, що $A \in \mathcal{L}(H)$ і $B = A^*$.

28. Нехай H – гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H)$. Довести, що: $(R(A))^\perp = \operatorname{Ker} A^*,\ (\operatorname{Ker} A)^\perp = \overline{R(A^*)}$ (риска означає замикання).

29. Нехай H – гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H)$. Довести, що $AA^* = A^*A$ тоді й тільки тоді, коли $\forall x \in H\ :\ ||Ax|| = ||A^*x||$.

30. Нехай H – гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H)$ – нормальний оператор. Довести, що:
1) $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^* = (R(A))^\perp$;
2) $||A^2|| = ||A||^2$;
3) якщо $A^2 = 0$, то $A = 0$;
4) якщо $\exists A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$, то A^{-1} – нормальний оператор.

31*. Нехай H – гільбертів простір, $P \in \mathcal{L}(H),\ P^2 = P$. Довести, що такі твердження рівносильні:

1) P – ортопроектор;
2) $P = P^*$;
3) $PP^* = P^*P$;
4) $R(P) = (\operatorname{Ker} P)^{\perp}$;
5) $(Px, x) = ||Px||^2,\ x \in H$.

32*. Нехай $H_1,\ H_2$ – підпростори гільбертового простору H, $H_0 := H_1 \cap H_2,\ P_j$ – ортопроектор на $H_j,\ j = 0, 1, 2$. Позначимо $H_i \ominus H_0 := \{x \in H_i \mid x \perp H_0\},\ i = 1, 2$. Довести такі твердження:

1) $P_1 + P_2$ – ортопроектор $\Leftrightarrow\ P_1P_2 = 0\ \Leftrightarrow\ H_1 \perp H_2$, при цьому $P_1 + P_2$ – ортопроектор на $H_1 \oplus H_2$;
2) P_1P_2 – ортопроектор $\Leftrightarrow\ P_1P_2 = P_2P_1\ \Leftrightarrow\ (H_1 \ominus H_0) \perp (H_2 \ominus H_0)$, при цьому P_1P_2 – ортопроектор на H_0;
3) $P_1 - P_2$ – ортопроектор $\Leftrightarrow\ P_1 \geq P_2\ \Leftrightarrow\ H_1 \supset H_2$, при цьому $P_1 - P_2$ – ортопроектор на $H_1 \ominus H_0$;
4) $P_1P_2 = P_2\ \Leftrightarrow\ P_2P_1 = P_2\ \Leftrightarrow\ P_1 \geq P_2\ \Leftrightarrow\ H_1 \supset H_2$.

Для оператора $A \in \mathcal{L}(H)$ виразити у вигляді алгебраїчного співвідношення між A і P_1 такі твердження:

5) H_1 інваріантний відносно A (тобто $A(H_1) \subset H_1$);
6) H_1 і $H_1^{\perp}$ інваріантні відносно A.

33. Нехай H – гільбертів простір і $\{A,\ A_n\ :\ n \geq 1\} \subset \mathcal{L}(H)$. Довести, що:

1) $A_n \rightrightarrows A\ \Leftrightarrow\ A_n^* \rightrightarrows A^*$;
2) $A_n \xrightarrow{w} A\ \Leftrightarrow\ A_n^* \xrightarrow{w} A^*$;
3) $A_n \xrightarrow{s} A\ \not\Leftrightarrow\ A_n^* \xrightarrow{s} A^*$.

34. Нехай H – гільбертів простір і $\{A,\ A_n\ :\ n \geq 1\} \subset \mathcal{L}(H)$. Довести, що:

1) $A_n = A_n^*,\ n \geq 1,\ A_n \xrightarrow{w} A,\ n \to \infty, \Rightarrow A = A^*$;
2) $A_n \geq 0,\ n \geq 1,\ A_n \xrightarrow{w} A,\ n \to \infty, \Rightarrow A \geq 0$;
3) A_n, A – нормальні, $n \geq 1,\ A_n \xrightarrow{s} A,\ n \to \infty, \Rightarrow\ A_n^* \xrightarrow{s} A^*,\ n \to \infty$;
4) $A_n \xrightarrow{w} A,\ n \to \infty$, і $\forall x \in H\ :\ ||A_nx|| \to ||Ax||,\ n \to \infty$, $\Rightarrow A_n \xrightarrow{s} A,\ n \to \infty$; зокрема, це означає, що якщо A, A_n, $n \geq 1$, – ізометричні (унітарні), то $A_n \xrightarrow{w} A,\ n \to \infty,\ \Leftrightarrow$ $A_n \xrightarrow{s} A,\ n \to \infty$;
5) якщо $A_n,\ n \geq 1$, – ізометричні і $A_n \xrightarrow{w} A,\ n \to \infty$, то A – не обов'язково ізометричний;
6)* якщо $A_n,\ n \geq 1$, – унітарні і $A_n \xrightarrow{w} A,\ n \to \infty$, то A – не обов'язково унітарний.

35. Нехай H – гільбертів простір, $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{L}(H)$, $A_n \geq 0,\ n \geq 1$, а також $\exists C > 0\ \forall n \geq 1\ :\ ||A_n|| \leq C$. Довести, що: $A_n \xrightarrow{s} 0,\ n \to \infty,\ \Leftrightarrow\ A_n \xrightarrow{w} 0,\ n \to \infty,\ \Leftrightarrow\ \forall x \in H\ :$ $(A_n x, x) \to 0,\ n \to \infty$.

36*. Нехай H – гільбертів простір, $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{L}(H)$, і $\forall n \geq 1\ :$ $A_n \geq 0,\ A_{n+1} \leq A_n$. Довести, що $\exists A \in \mathcal{L}(H)\ :\ A_n \xrightarrow{s} A,\ n \to \infty$.

37. Нехай H – гільбертів простір, P_n – ортопроектори на підпростори $H_n,\ n \geq 1$. Довести, що:

1) якщо $P_{n+1} \geq P_n,\ n \geq 1$, то $P_n \xrightarrow{s} P,\ n \to \infty$, де P – ортопроектор на з.л.о.$\{H_n : n \geq 1\}$;
2) якщо $P_{n+1} \leq P_n,\ n \geq 1$, то $P_n \xrightarrow{s} P,\ n \to \infty$, де P – ортопроектор на $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} H_n$;
3) якщо $H_k \perp H_j,\ k \neq j,\ k, j \geq 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n$ сильно збігається до ортопроектора на підпростір з.л.о.$\{H_n : n \geq 1\}$;
4) якщо $P_n \xrightarrow{s} P,\ n \to \infty$, де $P \in \mathcal{L}(H)$, то P – ортопроектор;
5) якщо $\{P_n : n \geq 1\}$ монотонна і $P_n \rightrightarrows P,\ n \to \infty$, де $P \in \mathcal{L}(H)$, то $\exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \geq n_0\ :\ P_n = P$. Чи істотна в цьому твердженні умова монотонності?
6)* якщо $P_n \xrightarrow{w} P,\ n \to \infty$, де $P \in \mathcal{L}(H)$, то не обов'язково P – ортопроектор;
7) якщо $P_n \xrightarrow{w} P,\ n \to \infty$, і $P \in \mathcal{L}(H)$ – ортопроектор, то $P_n \xrightarrow{s} P,\ n \to \infty$.

38*. Нехай H – гільбертів простір над полем $\mathbf{K}$, $A \in \mathcal{L}(H)$, причому $\forall B \in \mathcal{L}(H)\ :\ AB = BA$. Довести, що $\exists \gamma \in \mathbf{K}\ :\ A = \gamma I$.

39. Нехай H – гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H)$ – самоспряжений оператор. Довести, що A неперервно оборотний тоді й тільки тоді, коли $\exists m > 0\ :\ ||Ax|| \geq m||x||,\ x \in H$.

40. Нехай H – гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H)$. Довести, що:

1) якщо $A \geq 0$, то $\exists A^{-1} \in \mathcal{L}(H)\ \Leftrightarrow\ \exists \lambda > 0\ :\ A \geq \lambda I$;

2) $\exists (I + AA^*)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$;

3) якщо $A^* = A,\ m := \inf\limits_{x \in S(0,1)} (Ax, x),\ M := \sup\limits_{x \in S(0,1)} (Ax, x),\ \lambda \in \mathbf{R}$, то $\exists (A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(H)\ \Leftrightarrow\ \lambda \notin [m, M]$;

4) якщо $A^* = A,\ \lambda = \alpha + \beta i \in \mathbf{C}$, то

$$||(A - \lambda I)x||^2 \geq |\beta|^2 ||x||^2,\ x \in H;$$

5) якщо $A^* = A,\ \lambda \in \mathbf{C} \backslash \mathbf{R}$, то $\exists (A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$.

41. Нехай H – гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H)$. Довести, що $\exists A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ тоді й тільки тоді, коли $\exists \alpha > 0\ \exists \beta > 0\ :\ AA^* \geq \alpha I,\ A^*A \geq \beta I.$

42. Нехай H – гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H)$. Довести, що:

1) $||A|| = \sup\limits_{x,y \in S(0,1)} |(Ax, y)|;$

2)* якщо $A^* = A$, то $||A|| = \sup\limits_{x \in S(0,1)} |(Ax, x)|.$

43. Нехай H – гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H)$ – самоспряжений оператор. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$ збігається в $\mathcal{L}(H)$ тоді й тільки тоді, коли $||A|| < 1.$

44. Нехай A – оператор у l_2, заданий матрицею Якобі

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \gamma_1 & \alpha_2 & \beta_2 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \gamma_2 & \alpha_3 & \beta_3 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \gamma_3 & \alpha_4 & \beta_4 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix},\ \{\alpha_j, \beta_j,\ \gamma_j\ :\ j \geq 1\} \subset \mathbf{K}.$$

Довести, що оператор A неперервний тоді й тільки тоді, коли $\sup\limits_{k \geq 2}(|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2 + |\gamma_k|^2) < +\infty$. За яких умов на матрицю $\mathcal{A}$ оператор A самоспряжений? Розглянути випадки $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ і $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

45. Довести, що: 1) якщо $\{L_n\ :\ n \geq 0\}$ – поліноми Лежандра (див. задачу 39.2 з 2 розділу), то $(n+1)L_{n+1}(t) - (2n+1)tL_{n+1}(t) + nL_{n-1}(t) = 0,$ $t \in [-1;1],\ n \geq 1;$ 2) оператору множення на незалежну змінну $(Ax)(t) = tx(t),\ t \in [-1;1],\ x \in L_2([-1;1]),$ у базисі поліномів Лежандра відповідає матриця Якобі.

46. Нехай $\{e_n : n \geq 1\}$ – ОНБ у гільбертовому просторі H. Довести, що матриця $(a_{jk})_{j,k=1}^{\infty},\ a_{jk} \in \mathbf{C},\ j \geq 1,\ k \geq 1,$ визначає лінійний неперервний оператор в H тоді й тільки тоді, коли виконуються умови:

1) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{jk}x_k$ збігається для будь-яких $j \in \mathbf{N}$ та $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k \in H;$

2) $\exists C > 0\ \forall x \in H\ :\ \sum\limits_{j=1}^{\infty} |\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{jk}x_k|^2 \leq C||x||^2.$

47. Довести, що кожна з таких двох умов є необхідною і достатньою для того, щоб числова матриця $(a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ визначала у заданому ортонормованому базисі оператор $A \in \mathcal{L}(H)$:

1) $\exists M > 0\ \forall\{m, n\} \subset \mathbf{N}\ \forall\{x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m\} \subset \mathbf{C}\ :$

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{jk}x_j\overline{y_k}\right| \leq M\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{m}|y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}};$$

2) $\exists C \geq 0 \; \forall \{n, m\} \subset \mathbf{N} \; \forall \{c_1, ..., c_m\} \subset \mathbf{C}$:
$\sum\limits_{j=1}^{n} \left| \sum\limits_{k=1}^{m} a_{jk} c_k \right|^2 \leq C^2 \sum\limits_{k=1}^{m} |c_k|^2.$

Довести, що умова (2) виконується у кожному з випадків: 1) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 < +\infty$; 2) $a_{jk} = \delta_{jk} a_j, \; \sup\limits_{j \geq 1} |a_j| < +\infty$.

48. Нехай $(a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}, \; (b_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ – матриці, що відповідають в ортонормованому базисі $\{e_n : n \geq 1\}$ операторам $A, B \in \mathcal{L}(H)$. Визначити матриці, що відповідають операторам $A + B, \; AB$.

49. Нехай оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ задається в деякому ортонормованому базисі комплексного гільбертового простору H матрицею $(a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$. Довести, що:

1) A – самоспряжений $\Leftrightarrow$ матриця $(a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ ермітова;
2) $A \geq 0 \;\Leftrightarrow$ матриця $(a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ ермітова і для кожного $n \in \mathbf{N}$ матриця $(a_{jk})_{j,k=1}^{n}$ невід'ємно визначена;
3) A – ортопроектор $\Leftrightarrow$ матриця $(a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ ермітова і $a_{jk} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{ji} a_{ik}, \; j, k \in \mathbf{N}$;
4) A – ізометричний $\Leftrightarrow$ стовпчики матриці $(a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ є координатами відносно базиса $\{e_n : n \geq 1\}$ деякої ортонормованої системи.

Знайти умови, необхідні й достатні для того, щоб матриця $(a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ визначала унітарний оператор в H.

50*. Нехай $A \in \mathcal{L}(H)$ – невід'ємний оператор у гільбертовому просторі H. Покладемо $A_0 := I - \frac{A}{||A||}, \; B_1 := 0, \; B_{n+1} := \frac{1}{2}(A_0 + B_n^2), \; n \geq 1$. Довести, що (спочатку корисно розглянути випадок $H = \mathbf{C}$):

1) $A_0 \geq 0, \; ||A_0|| \leq 1$;
2) усі оператори $B_n, \; n \geq 1$, комутують з A_0 і між собою, а також $||B_n|| \leq 1, \; B_n \geq 0, \; B_{n+1} \geq B_n, \; n \geq 1$;
3) $\exists B_0 \in \mathcal{L}(H) \;:\; B_n \xrightarrow{s} B_0, \; n \to \infty$, причому $||B_0|| \leq 1$, $B_n^2 \xrightarrow{s} B_0^2$;
4) $\exists B \in \mathcal{L}(H), \; B \geq 0 : B^2 = A$ (такий оператор B називають *квадратним коренем з оператора* A і позначають $B = \sqrt{A}$ або $B = A^{\frac{1}{2}}$);
5) всі оператори $B_n, \; n \geq 1, \; B_0, \; B$ комутують з кожним оператором, який комутує з A;
6) довести єдиність (невід'ємного) квадратного кореня B з невід'ємного оператора A.

51. Для оператора A з задачі 15 п.1 (вважаючи $\alpha_k \geq 0,\ k \geq 1$), та пп. 3,9,12,13,15,16 довести, що $A \geq 0$ і знайти $\sqrt{A}$.

52*. Довести, що не існує оператора $B \in \mathcal{L}(l_2)$ такого, що $B^2 = A$, якщо:

1) $Ax = (x_2, x_3, ...),\ x \in l_2$;
2) $Ax = (0, x_1, x_2, ...),\ x \in l_2$.

53. Нехай H – гільбертів простір, $A, B, C, D \in \mathcal{L}(H)$ – невід'ємні оператори, що попарно комутують. Довести, що:

1) $AB \geq 0$;
2) якщо $A \leq B$, то $A^2 \leq B^2$;
3) якщо $A \leq B$, то $AC \leq BC$;
4) якщо $A \leq B,\ C \leq D$, то $AC \leq BD$.

54. Нехай A – невід'ємний оператор у гільбертовому просторі H. Довести, що $||\sqrt{A}|| = \sqrt{||A||}$.

55. Нехай A – невід'ємний оператор у гільбертовому просторі H. Довести, що такі твердження рівносильні:

1) $R(A)$ скрізь щільна в H;
2) $\operatorname{Ker} A = \{0\}$;
3) $(Ax, x) > 0$ для кожного $x \in H,\ x \neq 0$.

56. Нехай H – гільбертів простір, $A, B \in \mathcal{L}(H)$. Чи правильно, що:

1) якщо $AB = BA,\ A \geq 0,\ AB \geq 0$, то $B \geq 0$;
2) якщо $A^2 = A$, то $A = 0$ або $A = I$;
3) якщо $\sqrt{A}B = B\sqrt{A}$, то $AB = BA$;
4)* якщо $I \leq A$, то $I \leq \sqrt{A} \leq A$?

57. Нехай H – гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H)$. Довести, що існує єдиний невід'ємний оператор $B \in \mathcal{L}(H)$ такий, що $||Ax|| = ||Bx||,\ x \in H$.

58*. Нехай H – гільбертів простір, $A, B \in \mathcal{L}(H),\ I \leq A \leq B$. Довести, що оператори A, B неперервно оборотні і $B^{-1} \leq A^{-1}$.

59. Нехай H – гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H), |A| := \sqrt{A^*A}$. Довести, що:

1) $|A| \geq 0,\ |A| = 0 \ \Leftrightarrow\ A = 0$;
2) $A \geq 0 \ \Leftrightarrow\ |A| = A$;
3) норми операторів $|A|$ та A рівні;
4) $\operatorname{Ker}|A| = \operatorname{Ker} A,\ \overline{R(|A|)} = \overline{R(A^*)}$.

60. Нехай у попередній задачі оператор A самоспряжений, $A^+ := \frac{1}{2}(|A| + A),\ A^- := (|A| - A)$. Довести, що:

1) $A^+A^- = A^-A^+ = 0$;
2) $|A|^2 = A^2$;
3) $A^- = 0 \ \Leftrightarrow\ A = A^+ = |A|$;
4) $A^+ = 0 \ \Leftrightarrow\ A = -A^- = -|A|$.

61. Нехай H – гільбертів простір, оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ неперервно оборотний. Довести, що:

1) оператор $|A|$ неперервно оборотний;

2) оператор $U := A|A|^{-1}$ унітарний; таким чином, справедливе зображення $A = U|A|$, яке називають полярним розкладом A (у випадку $H = \mathbf{C}$ він зводиться до запису комплексного числа a у формі $re^{i\varphi}$);
3) полярний розклад у сенсі п.2 єдиний;
4) існують невід'ємний неперервно оборотний оператор $C \in \mathfrak{L}(H)$ і унітарний оператор $V \in \mathfrak{L}(H)$ такі, що $A = CV$, причому таке зображення єдине.

62. Нехай H – гільбертів простір. Оператор $U \in \mathfrak{L}(H)$ називають частково ізометричним, якщо $||Ux|| = ||x||,\ x \in (\operatorname{Ker} U)^{\perp}$. Покладемо $H_1 := (\operatorname{Ker} U)^{\perp},\ H_2 := \overline{R(U)},\ P_1$ і P_2 – ортопроектори на H_1 і H_2 відповідно. 1) Довести, що оператор U частково ізометричний тоді й тільки тоді, коли $U^*U = P_1$; при цьому $UU^* = P_2$ і оператор U^* також частково ізометричний. 2) За якої умови на H_1 і H_2 оператор U можна перевизначити на множині $H_1^{\perp} = \operatorname{Ker} U$ так, щоб отриманий оператор на H став: а) ізометричним; б) унітарним?

63. Нехай H – гільбертів простір, $A \in \mathfrak{L}(H)$. Зображення $A = UB$, де оператор $B \in \mathfrak{L}(H)$ невід'ємний, а $U \in \mathfrak{L}(H)$ – частково ізометричний, називають полярним розкладом A (порівняти із задачею 61). Довести, що: 1) полярний розклад існує, причому можна взяти $B := |A|$, а оператор U визначити так: на $R(|A|)$ покласти $U|A|x := Ax,\ x \in H$, на $\overline{R(|A|)}$ продовжити його за неперервністю, а також $Ux := 0,\ x \in (\overline{R(|A|)})^{\perp} = \operatorname{Ker} A$; 2) існують невід'ємний оператор $C \in \mathfrak{L}(H)$ і частково ізометричний оператор $V \in \mathfrak{L}(H)$ такі, що $A = CV$.

64. Знайти полярний розклад операторів із задачі 15 пп. 1-3.

65. Нехай $A = UB$ – полярний розклад оператора A (див. задачу 63).

1) Нехай $\operatorname{Ker} U = \operatorname{Ker} B$. Довести, що оператори B і U визначаються однозначно (так, як у п. 1 задачі 63), причому умова $\operatorname{Ker} U = \operatorname{Ker} B$ істотна;
2) За яких умов на A оператор U: а) можна вибрати ізометричним; б) можна вибрати унітарним; в) обов'язково ізометричний; г) обов'язково унітарний?
3) Довести, що у скінченновимірному просторі оператор U можна вибрати унітарним;
4) Нехай оператор A нормальний. Довести, що оператор U можна вибрати унітарним; при цьому оператори $|A|$ і U комутують між собою і комутують з кожним оператором, що комутує з A і A^*;
5) Нехай $C \in \mathfrak{L}(H),\ AC = CA$ і C – унітарний. Довести, що U і B комутують із C;
6) Чи правильне твердження п. 5, якщо C не обов'язково унітарний оператор?

66. Нехай H – комплексний гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H)$. Довести, що:

1) якщо A самоспряжений, то оператор $U := (A + \lambda I)(A + \overline{\lambda} I)^{-1}$, $\lambda \in \mathbf{C} \backslash \mathbf{R}$, унітарний;

2) якщо $\exists (A - iI)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ і оператор $U = (A + iI)(A - iI)^{-1}$ унітарний, то A самоспряжений;

3) якщо оператор $U \in \mathcal{L}(H)$ унітарний і $\exists (U - I)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$, то оператор $A := i(U + I)(U - I)^{-1}$ самоспряжений.

67. Довести, що:

1) спряжений до інтегрального оператора в $L_p(T, \mu),\ 1 < p < +\infty$, з ядром $K \in L_\infty(T \times T, \mu \times \mu)$ (див. задачу 2.1) є інтегральним оператором з ядром $K^*(t, s) = K(s, t),\ (t, s) \in T \times T$;

2) спряжений до лінійного оператора в $\mathbf{C}^N$ з нормою $||\cdot||_p$, заданого матрицею $(a_{jk})_{j,k=1}^N$, задається матрицею $(a_{jk}^*)_{j,k=1}^N$, де $a_{jk}^* = a_{kj},\ j, k \in \mathbf{N}$.

Чи не суперечить результат цієї задачі при $p = 2$ результату задачі 2? Чому?

68. Знайти спряжений до оператора A із задачі 15 пп. 1-19, якщо у випадках пп. 1-11 $A : l_p \to l_p$, а у випадках пп. 12-19 $A : L_p \to L_p,\ 1 \le p < +\infty$.

69. Знайти спряжений до оператора A із задачі 15.2, якщо він діє: 1) з c_0 в c_0; 2) з l_1 в l_2; 3) з l_1 в c_0.

70. Знайти спряжений до оператора A, якщо:

1) $A : l_1 \to l_2$ – оператор вкладення: $Ax = x,\ x \in l_1$;
2) $A : C([0, 2]) \to C([0, 1])$ – оператор звуження: $(Ax)(t) = x(t),\ t \in [0, 1],\ x \in C([0, 2])$;
3) $A : L_p([0, 2]) \to L_p([0, 1]),\ 1 \le p < +\infty$, – оператор звуження;
4) $A : C([0, 1]) \to C([0, 1]),\ (Ax)(t) = a(t)x(t)$, де $a \in C([0, 1])$ – фіксована функція;
5) $A : C([0, 1]) \to C([0, 1]),\ (Ax)(t) = \int\limits_0^t x(s)ds$;
6) X, Y – лінійні нормовані простори, $f_0 \in X^*,\ y_0 \in Y$, $Ax = f_0(x)y_0,\ x \in X$.

71. Нехай $X_1,\ X_2,\ X_3$ – лінійні нормовані простори над полем $\mathbf{K}$, $A \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$. Довести, що:

1) якщо $B \in \mathcal{L}(X_1, X_2),\ \alpha, \beta \in \mathbf{K}$, то $(\alpha A + \beta B)' = \alpha A' + \beta B'$;
2) якщо $B \in \mathcal{L}(X_2, X_3)$, то $(AB)' = B'A'$;
3) звуження оператора $A'' \in \mathcal{L}(X_1^{**}, X_2^{**})$ на X_1 збігається з A;
4) якщо простори X_1 та X_2 рефлексивні, то $A'' = A$;
5) якщо A неперервно оборотний, то A' також неперервно оборотний і $(A')^{-1} = (A^{-1})'$;
6) $\overline{R(A)} = \{y \in X_2 \mid \forall f \in \operatorname{Ker} A' \ :\ f(y) = 0\}$;
7) оператор A неперервно оборотний тоді й тільки тоді, коли $\exists C > 0$ $\forall x \in X_1\ \forall f \in X_2^* \ :\ ||Ax||_2 \ge C||x||_1,\ ||A'f|| \ge C||f||$.

РОЗДІЛ 10
СПЕКТР ЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Нехай X – комплексний банахів простір. Число $\lambda \in \mathbf{C}$ називають *регулярною точкою* оператора $A \in \mathcal{L}(X)$, якщо оператор $A - \lambda I$ неперервно оборотний. Сукупність усіх регулярних точок оператора A називають *резольвентною множиною* оператора A і позначають $\rho(A)$. Множину $\sigma(A) = \mathbf{C} \backslash \rho(A)$ називають *спектром* оператора A.

Власним числом оператора $A \in \mathcal{L}(X)$ називають число $\lambda \in \mathbf{C}$ таке, що $\exists x \in X,\ x \neq 0\ :\ Ax = \lambda x$. Елементи $x \in X$, що задовольняють цю рівність, називають *власними елементами(векторами)* оператора A, які відповідають власному числу λ.

Множину власних чисел оператора $A \in \mathcal{L}(X)$ називають *точковим спектром* A і позначають $\sigma_p(A)$. *Неперервним спектром* оператора A називають множину $\sigma_c(A) := \left\{ \lambda \in \sigma(A) \mid \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I) = \{0\} \text{ і } \overline{R(A - \lambda I)} = X \right\}$. *Залишковим спектром* оператора A називають множину $\sigma_r(A) := \left\{ \lambda \in \sigma(A) \mid \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I) = \{0\} \text{ і } \overline{R(A - \lambda I)} \neq X \right\}$. Ясно, що $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$ і множини $\sigma_p(A), \sigma_c(A), \sigma_r(A)$ попарно не перетинаються.

Теорема 1. Для довільного $A \in \mathcal{L}(X)$ спектр $\sigma(A)$ – замкнена обмежена непорожня множина в $\mathbf{C}$.

Оператор $R_z(A) = (A - zI)^{-1},\ z \in \rho(A)$ називають *резольвентою* оператора A.

Для резольвенти виконується *тотожність Гільберта* $\forall z_1, z_2 \in \rho(A)\ :$ $R_{z_1}(A) - R_{z_2}(A) = (z_1 - z_2) R_{z_1}(A) R_{z_2}(A)$.

Операторнозначна функція $F(z) = R_z(A),\ z \in \rho(A)$, є аналітичною, причому $F'(z) = F^2(z)$.

Спектральним радіусом оператора $A \in \mathcal{L}(X)$ називають число $r(A) = \max\limits_{z \in \sigma(A)} |z|$, тобто $r(A)$ є радіусом найменшого круга з центром у нулі, що містить $\sigma(A)$. Легко довести, що $r(A) \leq ||A||$ і для $|z| > r(A)\ :\ R_z(A) = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{-(n+1)} A^n$.

Теорема 2 (Формула Коші-Адамара). $r(A) = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{||A^n||}$.

Наступні теореми дають опис спектрів самоспряжених та унітарних операторів.

Теорема 3. Нехай H – гільбертів простір, $A = A^* \in \mathcal{L}(H)$. Тоді $\sigma(A) \subset [-||A||, ||A||]$ і хоча б один з кінців відрізка $[-||A||, ||A||]$ належить до $\sigma(A)$. Більш того, $\sigma_r(A) = \varnothing$.

Теорема 4. Нехай U – унітарний оператор у гільбертовому просторі H. Тоді $\sigma(U) \subset \{\lambda \mid |\lambda| = 1\}$ і $\sigma_r(U) = \varnothing$.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

1. Нехай $X = l_2,\ a = \{a_n : n \geq 1\} \in l_\infty,\ Ax = \{a_n x_n\ :\ n \geq 1\}$. Довести, що:

1) $\sigma_p(A) = \{a_n : n \geq 1\}$; 2) $\sigma(A) = \overline{\{a_n : n \geq 1\}}$; 3) $\sigma_r(A) = \varnothing$.

Р о з в ' я з о к. 1) випливає безпосередньо із задачі 1 розділу 8, застосованої до оператора $A_\lambda := A - \lambda I$. Маємо $\{a_n : n \geq 1\} = \sigma_p(A) \subset \sigma(A)$. Оскільки $\sigma(A)$ – замкнена множина, то і $\overline{\{a_n : n \geq 1\}} \subset \sigma(A)$. Якщо $\lambda \notin \overline{\{a_n : n \geq 1\}}$, то $\inf\limits_{n \geq 1} |a_n - \lambda| > 0$ і із задачі 1 розділу 8 випливає, що $A - \lambda I$ неперервно оборотний, тобто $\lambda \in \rho(A)$. Звідси маємо (2). Доведемо (3). Нехай $\lambda \in \sigma_r(A)$. Тоді $\exists y \in l_2,\ y \neq 0\ \forall x \in l_2\ :\ ((A - \lambda I)x, y) = 0$. Звідси випливає, що $A^* y = \overline{\lambda} y$ і завдяки 1), $\overline{\lambda} \in \{\overline{a}_n : n \geq 1\}$, тобто $\lambda \in \sigma_p(A)$. Однак за означенням $\sigma_p(A) \cap \sigma_r(A) = \varnothing$ і ми отримали суперечність.

2. Нехай $X = L_2([a,b]),\ (Ax)(t) = tx(t),\ t \in [a,b]$. Знайти $\sigma(A),\ \sigma_p(A),\ \sigma_c(A), \sigma_r(A)$.

Р о з в ' я з о к. Оператор A самоспряжений, тому $\sigma_r(A) = \varnothing$. Знайдемо $\sigma_p(A)$. Нехай $Ax = \lambda x$, тобто $(t - \lambda)x(t) = 0 (\operatorname{mod} m)$. Тоді $x(t) = 0 (\operatorname{mod} m)$ (функція $t - \lambda$ обертається на нуль тільки в одній точці) і $\sigma_p(A) = \varnothing$. Знайдемо $\sigma(A) = \sigma_c(A)$. Якщо $\lambda \notin [a,b]$, то функція $(t - \lambda)^{-1}$ обмежена на $[a,b]$ і оператор $(Bx)(t) := (t - \lambda)^{-1} x(t)$ – неперервний в X. Ясно, що $B(A - \lambda I) = (A - \lambda I)B = I$, отже $\lambda \in \rho(A)$ і $R_\lambda(A) = B$. Якщо $\lambda \in [a,b]$, то функція $y(t) = 1,\ t \in [a,b]$, не належить до образу оператора $A - \lambda I$ $(x(t) := (t - \lambda)^{-1} \notin L_2([a,b]))$. Звідси випливає, що $R(A - \lambda I) \neq X$ і $\lambda \in \sigma(A)$. Отже, $\sigma(A) = [a,b]$.

3. Нехай $X = l_2,\ A, B \in \mathcal{L}(l_2),\ Ax = (x_2, x_3, x_4, ...)$, $Bx = (0, x_1, x_2, ...),\ x \in l_2$. Знайти $\sigma(A),\ \sigma_p(A),\ \sigma_c(A),\ \sigma_r(A)$ і те саме для оператора B.

Р о з в ' я з о к. 1) Знайдемо власні числа оператора A. Нехай $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$. Тоді $\forall n \geq 1\ :\ x_{n+1} = \lambda x_n$ і $x = x_1(1, \lambda, \lambda^2, ..., \lambda^n, ...),\ x_1 \neq 0$. Умова $x \in l_2$ еквівалентна умові $|\lambda| < 1$, отже $\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda| < 1\}$. Оскільки множина $\sigma(A)$ замкнена, то $\overline{\sigma_p(A)} \subset \sigma(A)$. Зі співвідношень $r(A) \leq ||A||$ і $||A|| = 1$ випливає, що $\sigma(A) \subset \{\lambda \mid |\lambda| \leq 1\}$. Звідси маємо, що $\sigma(A) = \{\lambda \mid |\lambda| \leq 1\} = \overline{B}(0,1)$. Знайдемо $\sigma_r(A)$. Нехай $\lambda \in \sigma_r(A)$. Тоді $\overline{R(A - \lambda I)} \neq l_2$, тобто $\exists y \in l_2,\ y \neq 0$

$\forall x \in l_2 \ : \ ((A-\lambda I)x, y) = 0$, тобто $A^*y = \overline{\lambda}y$. Згідно із задачами 1.1 і 3.1 розділу 9, $A^* = B$, тобто $0 = \overline{\lambda}y_1, \ y_k = \overline{\lambda}y_{k+1}, \ k \geq 1$. Звідси випливає, що $y = 0$, тобто $\overline{R(A-\lambda I)} = l_2$. Таким чином, $\sigma_r(A) = \varnothing$, $\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda| = 1\}$.

2) Оскільки $B = A^*$ (див. задачі 1.1 і 3.1 розділу 9), то $\sigma(B) = \left\{\lambda \in \mathbf{C} \mid \overline{\lambda} \in \sigma(A)\right\} = \overline{B}(0,1) = \sigma(A)$ (перша рівність випливає із задачі 20.2. Безпосередньо з розв'язку п. 1 видно, що $\sigma_p(B) = \varnothing$. Нехай тепер $|\lambda| < 1$ і $x_\lambda := (1, \overline{\lambda}, \overline{\lambda}^2, ..., \overline{\lambda}^n, ...)$. Згідно з розв'язком задачі 1, $(A - \overline{\lambda}I)x_\lambda = 0$. Звідси випливає, що $\forall y \in l_2 \ : \ (x_\lambda, (B-\lambda I)y) = ((A-\overline{\lambda}I)x_\lambda, y) = 0$. Зокрема, $\lambda \in \sigma_r(B)$. Покажемо, що одиничне коло належить до неперервного спектра B. Нехай $|\lambda| = 1$ і $\lambda \notin \sigma_c(B)$. Тоді, $\lambda \in \sigma_r(B)$ $(\sigma_p(B) = \varnothing)$. Зокрема, $\exists x \in l_2, \ x \neq 0 \forall y \in l_2 \ :$ $(x, (B-\lambda I)y) = 0$. Звідси випливає, що $(A - \overline{\lambda}I)x = 0$, але це суперечить тому, що $\sigma_p(A) = \{\lambda \mid |\lambda| < 1\}$. Таким чином, $\sigma_c(B) = \{\lambda \mid |\lambda| = 1\}$ і $\sigma_r(B) = \{\lambda \mid |\lambda| < 1\}$.

4. Нехай $X = L_2(\mathbf{R}), \ (Ax)(t) = x(t+1), \ t \in \mathbf{R}$. Знайти $\sigma(A), \ \sigma_p(A), \ \sigma_c(A), \ \sigma_r(A)$.

Р о з в ' я з о к. A – унітарний оператор. Звідси випливає, що $\sigma(A) \subset \{\lambda \mid |\lambda| = 1\}$ і $\sigma_r(A) = \varnothing$. Доведемо, що $\sigma(A) = \{\lambda \mid |\lambda| = 1\}$. Для кожного $\lambda \in \mathbf{C}, \ |\lambda| = 1$, визначимо функцію $x_{\lambda,n} \in \mathcal{L}_2(\mathbf{R})$ таким чином: $x_{\lambda,n}(t) := \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda^k \chi_{[k,k+1)}(t)$. Ясно, що $||x_{\lambda,n}|| = 1$ і $((A - \lambda I)x_{\lambda,n})(t) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}(\chi_{[-1,0)}(t) - \lambda^n \chi_{[n,n+1)}(t))$. Маємо $||(A-\lambda I)x_{\lambda,n}|| = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \to 0, \ n \to \infty$. Таким чином, згідно із задачею 17 розділу 8, $\lambda \in \sigma(A)$ і $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbf{C} \ : \ |\lambda| = 1\}$. Доведення рівності $\sigma_p(A) = \varnothing$ ми залишаємо читачеві.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

5. 1) Довести, що спектр лінійного оператора A у скінченновимірному нормованому просторі X збігається з множиною власних чисел матриці, яка задає оператор A у деякому базисі.

2) Навести приклад оператора $A \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^m)$ такого, що $r(A) = 0$, але $A \neq 0$.

6. Нехай $A \in \mathcal{L}(X)$. Довести, що при $|\lambda| > ||A||$ виконується нерівність $||R_\lambda(A)|| \leq (|\lambda| - ||A||)^{-1}$.

7. Нехай X – банахів простір, $A \in \mathcal{L}(X)$. Довести, що A і $R_\lambda(A)$ комутують.

8. Розглянемо діагональний оператор $A \in \mathcal{L}(l_p)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$,

$Ax = \{a_n x_n \,:\, n \geq 1\}$, де $\{a_n : n \geq 1\} \in l_\infty$. 1) Знайти множину власних чисел оператора A. 2) Знайти спектр $\sigma(A)$ та резольвенту $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$, оператора A. 3) Знайти степені A^n, $n \geq 1$ та спектральний радіус оператора A. 4) Знайти $\sigma_r(A)$, $\sigma_c(A)$.

9. Знайти $\sigma(A)$, $\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$, $\sigma_r(A)$, резольвенту, спектральний радіус оператора $A : l_2 \to l_2$, якщо:

1) $Ax = (x_1 + x_2, x_2, x_3, ...)$;
2) $Ax = (\alpha x_1 + \beta x_2, \gamma x_1 + \delta x_2, x_3, x_4, ...)$;
3) $Ax = (-2x_3, x_1, 4x_2, x_4, x_5, ...)$;
4) $Ax = (x_1, ..., x_k, 0, ...)$, $k \in \mathbf{N}$ – фіксоване;
5)* $Ax = (x_3, x_4, ...)$;
6) $Ax = (0, x_1, x_2, 0, ...)$;
7)* $Ax = (0, 0, x_1, x_2, ...)$.

10. Нехай $X = l_p (1 \leq p \leq +\infty)$, $A, B \in \mathcal{L}(X)$, $Ax := (x_2, x_3, ...)$, $Bx = (0, x_1, x_2, ...)$, $x \in X$. Знайти $\sigma(A)$, $\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$, $\sigma_r(A)$ і те саме для оператора B.

11. Розв'язати задачу 9 у випадку, коли $A : l_p \to l_p (1 \leq p \leq +\infty)$.

12. 1) Для оператора $A : C([a, b]) \to C([a, b])$, що задається формулою $(Ax)(t) = tx(t), t \in [a, b]$, знайти $\sigma(A)$, $\sigma_p(A)$, $\sigma_r(A)$, $\sigma_c(A)$, $R_\lambda(A)$.

2) Те саме для оператора $A : L_2([a, b]) \to L_2([a, b])$, що задається формулою $(Ax)(t) = e^t x(t), t \in [a, b]$.

3) Те саме для оператора $A : C([0, 1]) \to C([0, 1])$, що задається формулою $(Ax)(t) = a(t)x(t), t \in [0, 1]$, $a \in C([0, 1])$.

4) Те саме для оператора $A : L_2([0, 1]) \to L_2([0, 1])$, що задається формулою $(Ax)(t) = a(t)x(t), t \in [0, 1]$, $a \in C([0, 1])$.

13. Нехай $X = L_p(T, \mu)$, $1 \leq p < +\infty$, $a \in L_\infty(T, \mu)$, μ – σ-скінченна міра на T, $(Ax)(t) := a(t)x(t)$, $t \in T$. Довести, що $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid \forall \varepsilon > 0 \,:\, \mu(\{t \in T \mid |a(t) - \lambda| < \varepsilon\}) > 0\}$. Тобто, $\sigma(A)$ збігається з *істотним образом* функції a. Знайти множину власних чисел оператора A.

14. Нехай X – банахів простір, оператор $A \in \mathcal{L}(X)$ і має неперервний обернений A^{-1}. Довести, що 1) $\sigma(A^{-1}) = \left\{\frac{1}{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(A)\right\}$; 2) A і A^{-1} мають однакові власні вектори.

15*. Нехай X – банахів простір, оператор $A \in \mathcal{L}(X)$. Довести, що

1) $\sigma_p(A^2) = \left\{\lambda^2 \mid \lambda \in \sigma_p(A)\right\}$;
2) $\sigma(A^2) = \left\{\lambda^2 \mid \lambda \in \sigma(A)\right\}$;
3) $\sigma(A^n) = \left\{\lambda^n \mid \lambda \in \sigma(A)\right\}$, $n \geq 1$;
4) якщо p – поліном, то $\sigma(p(A)) = \{p(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A)\}$.

16. Нехай X – банахів простір і оператор $A \in \mathcal{L}(X)$ задовольняє співвідношення $A^n + c_1 A^{n-1} + ... + c_n I = 0$, де $c_1, ..., c_n$ – фіксовані комплексні числа. Довести: якщо $\lambda \in \sigma(A)$, то $\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + ... + c_n = 0$. Чи вірне обернене твердження?

17. Нехай X – банахів простір, $A \in \mathcal{L}(X)$ і $A^2 = A$. Довести, що $\sigma(A) \subset \{0, 1\}$. Навести приклади таких операторів A, що задовольняють це співвідношення і 1) $\sigma(A) = \{0\}$; 2) $\sigma(A) = \{1\}$; 3) $\sigma(A) = \{0, 1\}$.

18. Знайти спектри операторів $(Ax)(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2}$, $(Bx)(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{2}$, $X = C([-1, 1])$.

19. Нехай $\{e_n : n \geq 1\}$ – ортонормований базис у гільбертовому просторі H. Визначимо оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ рівностями $Ae_1 = 0$, $Ae_{n+1} = e_n$, $n \geq 1$. Довести, що $\sigma(A) = \overline{B}(0, 1) \subset \mathbf{C}$, причому $B(0, 1)$ складається з власних чисел оператора A.

20. Нехай H – гільбертів простір і $A \in \mathcal{L}(H)$. Довести твердження:

1) якщо $A = A^*$, то $r(A) = ||A||$;

2) $\sigma(A^*) = \left\{\overline{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(A)\right\}$;

3) якщо $A = A^*$, тобто оператор A – самоспряжений, то $\sigma(A) \subset [-||A||, ||A||]$.

4) якщо $A \geq 0$, тобто оператор A – невід'ємний, то $\sigma(A) \subset [0, ||A||]$.

21. Довести, що довільна непорожня компактна множина в $\mathbf{C}$ може бути спектром деякого лінійного неперервного оператора.

22. Нехай H – гільбертів простір, $U \in \mathcal{L}(H)$ – унітарний оператор. Довести, що $\sigma(U) \subset \{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda| = 1\}$ і $\sigma_r(U) = \varnothing$.

23. Нехай H – гільбертів простір, P – проектор в H, $P \neq 0$ і $P \neq I$. Довести, що $\sigma(P) = \sigma_p(A) = \{0, 1\}$, $R_\lambda(P) = -\frac{1}{\lambda}(I - P) - \frac{1}{\lambda-1}P$, $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$.

24. Нехай H – гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H)$. Довести, що: 1) $\left\{\overline{\lambda} \mid \lambda \in \sigma_r(A)\right\} \subset \sigma_p(A^*)$; 2) $\left\{\overline{\lambda} \mid \lambda \in \sigma_p(A)\right\} \subset \sigma_p(A^*) \cup \sigma_r(A^*)$.

25. Нехай X – банахів простір, $A \in \mathcal{L}(X)$. Тоді: 1) $\sigma(A') = \sigma(A)$; 2)$\sigma_r(A) \subset \sigma_p(A')$; 3)$\sigma_p(A) \subset \sigma_p(A') \cup \sigma_r(A')$.

26. Нехай y, z – фіксовані елементи гільбертового простору H і $A \in \mathcal{L}(H)$ – оператор, що задається рівністю $Ax = (x, y)z$. Знайти $\sigma_p(A), \sigma(A), R_\lambda(A)$, A^n для довільного $n \geq 1$ та $r(A)$.

27. Нехай $s \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ – фіксоване число, оператор $A : L_2(\mathbf{R}) \to L_2(\mathbf{R})$ і визначається рівністю $(Ax)(t) = x(t + s)$, $t \in \mathbf{R}$. Довести, що $\sigma_p(A) = \sigma_r(A) = \varnothing$, а $\sigma(A) = \sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda| = 1\}$.

28. Знайти спектр і спектральний радіус оператора $A : C([0, 1]) \to C([0, 1])$, якщо:

1) $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 e^{t-s}x(s)ds$; 3) $(Ax)(t) = t^3 \int\limits_0^1 sx(s)ds$;

2) $(Ax)(t) = t \int\limits_0^1 s^2x(s)ds$; 4) $(Ax)(t) = t^\alpha \int\limits_0^1 s^\beta x(s)ds$, $\alpha, \beta \geq 0$;

5) $(Ax)(t)=(t+1)x(t)$; 7) $(Ax)(t)=x(0)+tx(1)$;

6) $(Ax)(t)=e^t\int\limits_0^1 sx(s)ds$; 8) $(Ax)(t)=t\int\limits_0^1 \frac{x(s)}{1+s^2}ds$.

29. Розглянемо в $L_2([0,1])$ інтегральний оператор Вольтерри $(Ax)(t)=\int\limits_0^t x(s)ds,\ t\in[0,1]$.

1) Знайти $\sigma(A)$ і $R_\lambda(A)$.

2) Знайти $A+A^*$ і довести, що це проектор на одновимірний підпростір, що складається з констант.

30. Знайти спектр і спектральний радіус оператора $A: L_2([0,1])\to L_2([0,1])$, якщо:

1) $(Ax)(t)=t^\alpha\int\limits_0^1 x(s)ds,\ \alpha>-\frac{1}{2}$;

2) $(Ax)(t)=(t+1)x(t)$;

3) $(Ax)(t)=t\int\limits_0^1 s^2x(s)ds$;

4) $(Ax)(t)=t^3\int\limits_0^1 sx(s)ds$;

5) $(Ax)(t)=\int\limits_0^1 e^{t-s}x(s)ds$;

6) $(Ax)(t)=t^\alpha\int\limits_0^1 s^\beta x(s)ds$, $\alpha,\beta\ge 0$;

7) $(Ax)(t)=e^t\int\limits_0^1 sx(s)ds$;

8) $(Ax)(t)=t\int\limits_0^1 \frac{x(s)}{1+s^2}ds$;

9) $(Ax)(t)=\chi_{[0,\frac{1}{2}]}(t)x(t)$;

10) $(Ax)(t)=\int\limits_0^t K(t,s)x(s)ds,\ t\in[0,1]$,
$K\in C(\{(t,s)\,|\,0\le s\le t,\ 0\le t\le 1\})$.

31. Нехай X – банахів простір, $A\in\mathcal{L}(X)$. Довести, що спектральний радіус $r(A)$ не зміниться, якщо в X перейти до еквівалентної норми.

32. Нехай X – банахів простір, $A,B\in\mathcal{L}(X)$ і $AB=BA$. Довести, що

1) $r(AB)\le r(A)r(B)$;

2)* $r(A+B)\le r(A)+r(B)$.

Чи вірні ці твердження у випадку, коли A і B не комутують?

33. Знайти власні числа, власні функції та спектр оператора $A: C([-\pi,\pi])\to C([-\pi,\pi])$, якщо $(Ax)(t)=x(-t),\ t\in[-\pi,\pi]$.

34. Довести, що спектральний радіус оператора $A: C([0,\frac{1}{2}])\to C([0,\frac{1}{2}])$, де $(Ax)(t)=tx(t^2),\ t\in[0,\frac{1}{2}]$, дорівнює нулю.

35. Нехай X – банахів простір, $A\in\mathcal{L}(X)$. Довести: якщо для $\lambda\in\mathbf{C}$ існує така послідовність $\{x_n: n\ge 1\}\subset X,\ ||x_n||=1$, що $\lim\limits_{n\to\infty}(Ax_n-\lambda x_n)=0$, то $\lambda\in\sigma(A)$.

36. Нехай H – гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H),\ A = A^*$. Довести: $\lambda \in \rho(A)$ тоді й тільки тоді, коли існує $r > 0$ таке, що $\forall x \in H\ :\ ||(A - \lambda I)x|| \geq r||x||$. Вивести звідси, що $\lambda \in \sigma(A)$ тоді й тільки тоді, коли існує така послідовність $\{x_n : n \geq 1\} \subset H,\ ||x_n|| = 1$, що $\lim\limits_{n\to\infty}(Ax_n - \lambda x_n) = 0$.

37. Нехай H – гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H),\ A = A^*$. Нехай також $R(A - \lambda I) = H$. Довести, що $\lambda \in \rho(A)$.

38. Довести, що для нормального оператора $A \in \mathcal{L}(H)$(тобто такого, що $A^*A = AA^*$) $r(A) = ||A||$.

39. Довести, що спектральний радіус оператора $A : C([0,1]) \to ([0,1])$, який задається формулою $(Ax)(t) = \begin{cases} \frac{1}{t}\int\limits_0^t x(s)ds, & 0 < t \leq 1, \\ x(0), & t = 0, \end{cases}$ дорівнює 1.

40. Нехай $X = C([0,1]),\ (Ax)(t) = x(t^2)$. Довести, що $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda| = 1\}$.

41. Нехай H – гільбертів простір, $A \in \mathcal{L}(H),\ A = A^*,\ \lambda \in \rho(A) \cap \mathbf{R}$. Довести, що резольвента $(A - \lambda I)^{-1}$ – самоспряжений оператор.

42. Нехай X – банахів простір, $A, B \in \mathcal{L}(X)$. Довести, що $\forall \lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)\ :$

$$(A - \lambda I)^{-1} - (B - \lambda I)^{-1} = (A - \lambda I)^{-1}(B - A)(B - \lambda I)^{-1}.$$

43. Нехай H_1, H_2 – гільбертові простори, $A_1 \in \mathcal{L}(H_1),\ A_2 \in \mathcal{L}(H_2)$. Оператори A_1 і A_2 називають унітарно-еквівалентними, якщо $A_1 = U^{-1}A_2U$, де U – унітарний оператор з H_1 в H_2. Довести, що $\sigma(A_1) = \sigma(A_2)$.

44*. Нехай $p \in L_1(\mathbf{R}),\ (Ax)(t) = \int\limits_{\mathbf{R}} p(t-s)x(s)ds,\ t \in \mathbf{R}$ (оператор згортки з функцією p), $A : L_2(\mathbf{R}) \to L_2(\mathbf{R})$. Знайти $\sigma(A)$.

45*. Оператор $A \in \mathcal{L}(X)$, де X – банахів простір, називають квазінільпотентним, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}} = 0$. Довести, що A – квазінільпотентний тоді й тільки тоді, коли $\sigma(A) = \{0\}$.

46*. Довести, що для $A, B \in \mathcal{L}(X)\ :\ r(AB) = r(BA)$.

47*. Нехай X – банахів простір, $A, B \in \mathcal{L}(X)$. Довести, що $\sigma(AB)\backslash\{0\} = \sigma(BA)\backslash\{0\}$ і $\forall \lambda \in \rho(AB)\backslash\{0\}\ :\ A(BA - \lambda I)^{-1}B - \lambda(AB - \lambda I)^{-1} = I$.

48*. Нехай X – банахів простір. Нехай для деякого $c \in \mathbf{C}$ $AB - BA = cI$. Довести, що $c = 0$.

ДЕЯКІ ПОЗНАЧЕННЯ З ІНШИХ КУРСІВ

Нехай $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ або $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

$C(M)$ – множина функцій зі значеннями в полі $\mathbf{K}$, визначених і неперервних на множині M;

$C^n(M)$ – множина функцій зі значеннями в полі $\mathbf{K}$, що визначені та мають n неперервних похідних на множині M;

$C^\infty(M)$ – множина функцій зі значеннями в полі $\mathbf{K}$, що визначені та нескінченно диференційовні на множині M;

$R([a,b])$ – клас функцій, інтегровних за Ріманом на відрізку $[a,b]$;

$BV([a,b])$ – клас функцій обмеженої варіації на відрізку $[a,b]$;

$BV_0([a,b]) := \{f \in BV([a,b]) \,|\, f-$ неперервна справа на $(a,b), f(a) = 0\}$;

$V(f,[a,b])$ – варіація функції f на відрізку $[a,b]$;

$RS(\alpha,[a,b])$ – клас функцій, інтегровних за Ріманом-Стілтьєсом відносно функції $\alpha \in BV([a,b])$ на відрізку $[a,b]$;

$\chi_A(x)$ – характеристична функція множини A, що набуває значення 1, якщо $x \in A$, і значення 0, якщо $x \notin A$;

m – міра Лебега у просторі $\mathbf{R}^k,\ k \geq 1$;

$f_n \to f(\operatorname{mod}\mu)$ – послідовність функцій $\{f_n :\ n \geq 1\}$, збігається до функції f майже скрізь відносно міри μ при $n \to \infty$;

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f,\ n \to \infty,$ – послідовність функцій $\{f_n :\ n \geq 1\}$ збігається до функції f за мірою μ;

$f_n \rightrightarrows f,\ n \to \infty,$ – послідовність функцій $\{f_n :\ n \geq 1\}$ збігається до функції f рівномірно на заданій множині;

$\int\limits_A f(x)d\mu(x)$ – абстрактний інтеграл Лебега від функції f по множині A відносно міри μ;

$\int\limits_A f(x)dx$– інтеграл Лебега від функції f по множині A відносно міри Лебега m;

$\int\limits_a^b f(x)dx$ – інтеграл Лебега від функції f по відрізку $[a,b]$ відносно міри Лебега m. Якщо функція f інтегровна за Ріманом, то цей інтеграл збігається з інтегралом Рімана;

$L(A,\mathcal{F},\mu)$ або $L(A,\mu)$ – множина функцій, інтегровних за Лебегом на множині A відносно міри μ, визначеної на σ-алгебрі вимірних множин $\mathcal{F}$;

$L(A)$ – множина функцій, інтегровних за Лебегом на множині A відносно міри Лебега m.

ЛІТЕРАТУРА

1) Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. – К., 1990.
2) Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М., 1989.
3) Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – М., 1965.
4) Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. – М., 1984.
5) Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М., 1984.
6) Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. – Т.1. Общая теория. – М., 1962.
7) Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. – Т.1. Функциональный анализ. – М., 1977.
8) Рудин У. Функциональный анализ. – М., 1975.
9) Городецкий В.В., Нагнибида Н.И., Настасиев П.П. Методы решения задач по функциональному анализу. – К., 1990.
10) Городецький В.В., Нагнибіда М.І., Настасієв П.П. Методи розв'язування задач з функціонального аналізу. У 2 ч. – К., 1997.
11) Городецький В.В., Нагнибіда М.І. Узагальнені функції. Теореми і задачі. У 2 ч. – К., 1996.
12) Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. – М., 1988.
13) Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. – М., 1984.
14) Антоневич А.Б., Князев П.Н., Радыно Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. – Минск, 1978.
15) Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ в задачах. – М., 1969.
16) Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. – М., 1970.