

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Механіко-математичний факультет
Очний тур олімпіади

18 травня 2008 року

Варіант 1

1. Розв'язати рівняння

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cos 2x.$$

2. Гіпотенуза AB прямокутного трикутника ABC є хордою кола радіуса 10. Вершина C лежить на діаметрі кола, який паралельний до гіпотенузи. Кут CAB рівний 75° . Знайти площу трикутника ABC .

3. Знайти всі значення параметра a , при яких нерівність

$$x^2 - (3a - 5)x - a + \frac{5}{4} \leq 0$$

має рівно два цілі розв'язки, причому обидва — від'ємні.

4. Бічне ребро правильної піраміди дорівнює a . Довести, що об'єм піраміди не перевищує $\frac{2}{3}a^3$. Чи може цей об'єм дорівнювати $\frac{2}{3}a^3$?
5. Чи можна серед членів послідовності $1, 5, 5^2, \dots, 5^n, \dots$ вибрати кілька попарно різних членів так, щоб вони утворювали геометричну прогресію, сума якої дорівнює 10^{12} ?

Декан механіко-математичного факультету

М.Ф.Городній

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Механіко-математичний факультет
Очний тур олімпіади

18 травня 2008 року

Варіант 2

1. Розв'язати рівняння

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - 6x\right) = \cos 3x \cos 2x.$$

2. Гіпотенуза AB прямокутного трикутника ABC є хордою кола радіуса $\sqrt{7}$. Вершина C лежить на діаметрі кола, який паралельний до гіпотенузи. Відстань від центра кола до гіпотенузи дорівнює $\sqrt{3}$. Знайти гострі кути трикутника ABC .
3. Знайти всі значення параметра a , при яких нерівність

$$x^2 - (2a - 3)x - a + \frac{3}{4} \leq 0$$

має рівно два цілі розв'язки, причому обидва — невід'ємні.

4. У трикутній піраміді п'ять ребер мають однакову довжину a . Довести, що об'єм піраміди не перевищує $\frac{1}{8}a^3$. Чи може цей об'єм дорівнювати $\frac{1}{8}a^3$?
5. Чи можна серед членів послідовності $1, 2, 2^2, \dots, 2^n, \dots$ вибрати кілька попарно різних членів так, щоб вони утворювали геометричну прогресію, сума якої дорівнює 10^8 ?

Декан механіко-математичного факультету

М.Ф.Городній