

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

*механіко-математичний факультет  
кафедра загальної математики*

**Укладач:** доцент Кушніренко С.В.

**Вища математика для економістів  
РОБОЧА НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА**

для студентів 1 курсу Військового інституту  
спеціальності "фінанси та військова економіка "

**Затверджено**

на засіданні вченої ради  
механіко-математичного факультету  
протокол № 8 від 24.04.2012 р.

на засіданні кафедри  
загальної математики  
протокол № 9 від 26.03.2012 р.

*Зав. кафедри*

\_\_\_\_\_ *Станжицький О.М.*

Голова вченої ради  
механіко-математичного факультету

\_\_\_\_\_ *Городній М.Ф.*

**КИЇВ - 2012**

Робоча навчальна програма дисципліни  
«Вища математика для економістів»

**Укладач:** кандидат фізико-математичних наук,  
доцент Кушніренко С.В.

**Лектор:** кандидат фізико-математичних наук,  
доцент Кушніренко С.В.

**Викладач:** кандидат фізико-математичних наук,  
доцент Кушніренко С.В.

**Погоджено**  
з науково-методичною комісією  
протокол № 7 від 18.04.2012 р.

---

*Підпис голови НМК факультету/ інституту*

## Методичні рекомендації по вивченню дисципліни

Навчальна дисципліна "Вища математика для економістів" є базовою нормативною дисципліною для спеціальності "фінанси та військова економіка" підготовки фахівців за освітньо-кваліфікаційним рівнем "бакалавр" Військового інституту.

Викладається в I та II семестрах на 1 курсі в обсязі 6 кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS) всього 216 годин, з них лекцій - 87 годин, семінарських занять - 72 години і 57 годин самостійної роботи (I семестр: лекції – 45 год., семінарські – 30 год., самостійна робота - 15 год.; II семестр: лекції – 42 год., семінарські – 42 год., самостійна робота - 42 год.).

Форма підсумкового контролю – іспит у письмовій формі у II семестрі.

### **Мета і завдання навчальної дисципліни.**

*Мета* викладання дисципліни "Вища математика для економістів" – ознайомлення студентів з основними поняттями, теоретичними положеннями та сучасними математичними моделями та методами для розв'язування певних прикладних економічних задач; сприяння розвитку логічного та аналітичного мислення студентів.

*Завдання* дисципліни "Вища математика для економістів" – теоретична та практична підготовка студентів, спрямована на оволодіння сучасними математичними методами, які повинні допомогти майбутнім військовим фінансистам розв'язувати прикладні економічні задачі.

**Предмет навчальної дисципліни** "Вища математика для економістів" включає основні методи та моделі лінійної та векторної алгебри, аналітичної геометрії, математичного аналізу, диференціального та інтегрального числення, теорії звичайних диференціальних рівнянь. Поряд з вивченням математичних понять розглядаються їх практичні застосування в економіці, фінансах, управлінні та менеджменті.

### **Вимоги до знань та вмінь:**

*знати* основні поняття вищої математики такі як матриці, визначники, системи лінійних рівнянь, вектори, границя та неперервність функції однієї та багатьох змінних, похідна, диференціал функції однієї та багатьох змінних, інтеграли, диференціальні рівняння;

*вміти* вибирати математичні методи та моделі, методичні прийоми математичного аналізу для дослідження прикладних задач; застосовувати сучасні математичні методи для розв'язування практичних економічних задач та набути навичок самостійного використання і вивчення математичної літератури.

**Місце навчальної дисципліни в структурно-логічній схемі спеціальності.** Нормативна навчальна дисципліна "Вища математика для економістів" є складовою циклу професійної підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня "бакалавр", є базовою для вивчення таких спеціальних дисциплін як "теорія ймовірностей та математична статистика", "основи маркетингу", "основи менеджменту".

**Система контролю знань та умови складання іспиту чи заліку.** Навчальна дисципліна "Вища математика для економістів" оцінюється за модульно-рейтинговою системою. Вона складається з 4-х модулів (за два семестри): до першого входять 1-3 теми, до другого 4-8 теми - за перший семестр; до третього 9-10 теми, до четвертого – 11-14 теми - за другий семестр.

Результати навчальної діяльності студентів оцінюються кожного семестру за 100-бальною шкалою в кожному семестрі окремо.

**Форми поточного контролю:** написання та захист студентами домашніх самостійних завдань, написання самостійних робіт під час практичних занять. Студент може отримати бали за усні відповіді та доповнення на семінарських заняттях у кожному семестрі.

**Модульний контроль.** Чотири модульні контрольні роботи (по 2 роботи на кожний семестр).

### І семестр

#### **Змістовний модуль 1**

<b>Вид роботи</b>	<b>Бали</b>
Домашнє самостійне завдання 1. <i>Матриці. Визначники.</i>	25
<i>Методи розв'язування систем лінійних рівнянь.</i>	
Домашнє самостійне завдання 2. <i>Вектори.</i>	10
Домашнє самостійне завдання 3. <i>Елементи аналітичної геометрії.</i>	25
Усні відповіді та доповнення на практичних заняттях.	10
Модульна контрольна робота 1.	30
<b>Сума</b>	<b>100</b>

#### **Змістовний модуль 2**

<b>Вид роботи</b>	<b>Бали</b>
Домашнє самостійне завдання 4. <i>Границя і неперервність послідовності, функції однієї змінної.</i>	20
Домашнє самостійне завдання 5. <i>Похідні та диференціали.</i>	20
Домашнє самостійне завдання 6. <i>Застосування похідної до дослідження функцій.</i>	20
Усні відповіді та доповнення на практичних заняттях.	10
Модульна контрольна робота 2.	30
<b>Сума</b>	<b>100</b>

### II семестр

#### **Змістовний модуль 3**

<b>Вид роботи</b>	<b>Бали</b>
Домашнє самостійне завдання 7. <i>Функції багатьох змінних.</i>	25
Домашнє самостійне завдання 8. <i>Екстремуми функцій багатьох змінних. Застосування в прикладних задачах.</i>	25
Домашнє самостійне завдання 9. <i>Метод найменших квадратів.</i>	10
Усні відповіді та доповнення на практичних заняттях.	10
Модульна контрольна робота 3.	30
<b>Сума</b>	<b>100</b>

### Змістовний модуль 4

<i>Вид роботи</i>	<i>Бали</i>
Домашнє самостійне завдання 10. <i>Невизначений інтеграл.</i>	10
Домашнє самостійне завдання 11. <i>Визначені і невластні інтеграли.</i>	10
<i>Застосування.</i>	
Домашнє самостійне завдання 12. <i>Диференціальні рівняння.</i>	20
Домашнє самостійне завдання 13. <i>Застосування диференціальних рівнянь в економічних моделях.</i>	20
Усні відповіді та доповнення на практичних заняттях	10
Модульна контрольна робота 4.	30
<b>Сума</b>	<b>100</b>

За результатами кожного семестру студент отримує підсумкову оцінку за 100-бальною системою, яка розраховується як середньозважене оцінок за кожен з двох модулів у семестрі та оцінки за іспит (комплексний підсумковий модуль) за наступною формулою:

### І семестр

	<i>Змістовний модуль 1 (ЗМ<sub>1</sub>)</i>	<i>Змістовний модуль 2 (ЗМ<sub>2</sub>)</i>	<i>Комплексний підсумковий модуль (КПМ)</i>	<i>Разом (підсумкова оцінка)</i>
Вагові коефіцієнти (%)	30% $k_1=0,3$	30% $k_2=0,3$	40% $k_3=0,4$	100%
Максимальна оцінка в балах	100	100	100	100

Розрахунок підсумкової оцінки за перший семестр (зваженої):

$$ПО = ЗМ_1 \times k_1 + ЗМ_2 \times k_2 + КПМ \times k_3$$

### Шкала відповідності

За 100-бальною шкалою	Оцінка за національною шкалою
<b>60 – 100</b>	<i>зараховано</i>
<b>1 – 59</b>	<i>незараховано</i>

## II семестр

	<i>Змістовний модуль 3 (ЗМ<sub>3</sub>)</i>	<i>Змістовний модуль 4 (ЗМ<sub>4</sub>)</i>	<i>Комплексний підсумковий модуль (КПМ) (іспит)</i>	<i>Разом (підсумкова оцінка)</i>
Вагові коефіцієнти (%)	30% $k_1=0,3$	30% $k_2=0,3$	40% $k_3=0,4$	100%
Максимальна оцінка в балах	100	100	100	100

Розрахунок підсумкової оцінки за другий семестр (зваженої):

$$ПО = ЗМ_3 \times k_1 + ЗМ_4 \times k_2 + КПМ \times k_3.$$

### Шкала відповідності

За 100-бальною шкалою	Оцінка за національною шкалою	
<b>90 – 100</b>	<b>5</b>	<b>відмінно</b>
<b>85 – 89</b>	<b>4</b>	<b>добре</b>
<b>75 – 84</b>		
<b>65 – 74</b>	<b>3</b>	<b>задовільно</b>
<b>60 – 64</b>		
<b>35 – 59</b>	<b>2</b>	<b>незадовільно</b>
<b>1 – 34</b>		

При цьому кількість балів відповідає оцінці:

- **1 - 34** - «незадовільно» з обов'язковим повторним вивченням дисципліни (F);
- **35 - 59** - «незадовільно» з можливістю повторного складання (FX) ;
- **60 - 64** - «задовільно» («достатньо») (E) ;
- **65 - 74** - «задовільно» (D);
- **75 - 84** - «добре»(C);
- **85 - 89** - «добре» («дуже добре») (B);
- **90 - 100** - «відмінно» (A).

Якщо за результатами модульно-рейтингового контролю студент отримав за два змістовні модулі менше 20 балів за роботу в семестрі, то він не допускається до іспиту і вважається таким, що не виконав усі види робіт, які передбачаються навчальним планом з дисципліни "Вища математика для економістів".

## НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ І ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

№ теми	НАЗВА ТЕМИ  І СЕМЕСТР	Кількість годин		
		Лекції	Семінари	Самостійна робота
<b>ЗМІСТОВНИЙ МОДУЛЬ І. „Методи і моделі лінійної, векторної алгебри та аналітичної геометрії”</b>				
1	Елементи лінійної алгебри	8	5	3
2	Елементи векторної алгебри	4	3	2
3	Елементи аналітичної геометрії	6	4	2
<b>ЗМІСТОВНИЙ МОДУЛЬ ІІ. « Методи і моделі математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної»</b>				
4	Функції однієї змінної	2	2	2
5	Послідовності	4	2	1
6	Границя та неперервність функції	4	4	1
7	Диференціальне числення функції однієї змінної	8	4	2
8	Застосування похідної до дослідження функцій	4	3	1
9	Застосування математичних моделей в економічних дослідженнях	5	3	1
<b>Всього годин за І семестр 90, з них:</b>		<b>45</b>	<b>30</b>	<b>15</b>

№ теми	НАЗВА ТЕМИ  II СЕМЕСТР	Кількість годин		
		Лекції	Семінари	Самостійна робота
<b>ЗМІСТОВНИЙ МОДУЛЬ III. « Диференціальне числення функцій багатьох змінних»</b>				
10	Диференціальне числення функцій багатьох змінних	6	6	4
11	Застосування функцій багатьох змінних в прикладних задачах	4	4	4
<b>ЗМІСТОВНИЙ МОДУЛЬ IV. «Методи і моделі інтегрального числення та теорії диференціальних рівнянь»</b>				
12	Інтегральне числення функції однієї змінної	10	10	10
13	Геометричні та фізичні застосування методів інтегрального числення	2	2	4
14	Економічні застосування методів інтегрального числення	4	4	4
15	Елементи теорії звичайних диференціальних рівнянь	10	10	10
16	Застосування диференціальних рівнянь в економічних моделях	6	6	6
<b>Всього годин за II семестр 109, з них:</b>		<b>42</b>	<b>42</b>	<b>42</b>
<b>Всього годин за рік 216, з них:</b>		<b>87</b>	<b>72</b>	<b>57</b>



# Теми лекцій, семінарських занять та завдання для самостійної роботи

## I СЕМЕСТР

### ЗМІСТОВНИЙ МОДУЛЬ 1. МЕТОДИ І МОДЕЛІ ЛІНІЙНОЇ І ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

#### ТЕМА №1. Елементи лінійної алгебри

**Лекції 1-2.** Матриці. Дії над матрицями. - 2 год.

Визначники. Ранг матриці. Знаходження оберненої матриці. - 2 год.

Означення матриці. Основні відомості про матриці, види матриць. Поняття добутку прямокутних матриць. Елементарні перетворення матриць. Визначник квадратної матриці та властивості визначників. Ранг матриці. Обернена матриця.

**Практичне заняття 1.** Матриці. Визначники. - 2 год.

Виконання операцій над матрицями, обчислення визначників, знаходження оберненої матриці.

**Лекції 3-4.** Методи розв'язування систем лінійних рівнянь. Модель Леонтєва багатогалузевої економіки та інші лінійні моделі. - 4 год.

Системи лінійних рівнянь, основні поняття і означення. Правило Крамера. Матричний метод (метод оберненої матриці). Метод Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь. Системи  $m$  лінійних рівнянь з  $n$  невідомими. Теорема Кронекера – Капеллі. Фундаментальна система розв'язків.

**Практичне заняття 2.** Методи розв'язування систем лінійних рівнянь - 2 год.

Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса.

Розв'язування систем лінійних матричним методом.

Розв'язування систем лінійних з використанням формул Крамера.

Знаходження фундаментальної системи розв'язків системи лінійних рівнянь.

**Завдання для самостійної роботи за темою № 1.** – 3 год.

1. Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції. - 1 год.

2. Властивості визначників, обчислення визначників з використанням їх властивостей. - 1 год.

3. Однорідні системи лінійних рівнянь.- 1 год.

Література [1-6, 8, 9, 14].

## ТЕМА № 2. Елементи векторної алгебри

**Лекції 5-6.** Вектори - 4 год.

Скалярні та векторні величини. Поняття вектора. Лінійні операції над векторами. Скалярний добуток двох векторів, його економічний зміст.

Поняття  $n$ -вимірного вектора. Лінійний простір. Розмірність та базис лінійного простору. Теорема про розклад вектора за базисом.

Лінійна залежність, лінійна незалежність системи векторів. Простір товарів.

Задачі про ціну та бюджет. Бюджетні обмеження. Бюджетні множини.

**Практичні заняття 3-4.** Модель Леонт'єва багатогалузевої економіки. - 1 год.

Вектори на площині та в просторі - 3 год.

Додавання, віднімання векторів і множення вектора на число, їх властивості.

Проекція вектора на вісь. Координати вектора.

Колінеарні та компланарні вектори. Умова колінеарності двох векторів. Умова компланарності трьох векторів. Довжина вектора. Кут між векторами. Розклад вектора за базисом.

**Завдання для самостійної роботи за темою № 2.** – 2 год.

1. Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції. - 1 год.

2. Властивості векторного та мішаного добутку векторів. - 1 год.

Література [1-6, 8, 11, 13, 14].

## ТЕМА № 3. Елементи аналітичної геометрії

**Лекція 7.** Елементи аналітичної геометрії на площині. - 2 год.

Прямокутна і полярна системи координат. Рівняння прямої на площині. Відстань від точки до прямої. Кут між прямими.

**Лекція 8.** Криві другого порядку. – 2 год.

Коло, еліпс, гіпербола, парабола. Основні властивості кривих другого порядку.

**Лекція 9.** Елементи аналітичної геометрії в просторі. – 2 год.

Рівняння площини в просторі. Рівняння прямої в просторі. Взаємне розташування прямої і площини в просторі.

**Практичні заняття 5-6.** Елементи аналітичної геометрії. - 4 год.

Пряма як лінія першого порядку на площині. Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності двох прямих на площині. Лінії другого

порядку на площині та їх властивості. Площина в просторі. Пряма в просторі. Взаємне розміщення двох площин, двох прямих, прямої та площини в просторі.

**Завдання для самостійної роботи за темою № 3.** – 2 год.

1. *Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції.* - 1 год.

2. *Полярна система координат. Рівняння кривих другого порядку в полярній системі координат.* - 1 год.

*Література* [1-6, 8, 9, 11, 13].

**Модульна контрольна робота № 1.** – 1 год.

## **ЗМІСТОВНИЙ МОДУЛЬ 2.**

### **МЕТОДИ І МОДЕЛІ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ**

#### **ТЕМА № 4. Функції однієї змінної**

**Лекція 10.** Функції однієї змінної. – 2 год.

Найпростіші елементарні функції, їх властивості та графіки. Основні властивості та способи задання функцій. Класифікація функцій. Неявне та параметричне задання функцій..

**Практичне заняття 7.** Основні елементарні функції, їх властивості та графіки. – 2 год.

**Завдання для самостійної роботи за темою № 4.** – 2 год.

1. *Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції.* – 1 год.

2. *Властивості та графіки деяких елементарних функцій.* – 1 год.

*Література* [1-6, 8, 9, 12- 14].

#### **ТЕМА № 5. Послідовності**

**Лекція 11.** Числові послідовності - 2 год.

Числові послідовності. Основні поняття. Обмежені послідовності. Монотонні послідовності. Границя числової послідовності. Геометричний зміст границі послідовності. Економічний зміст границі послідовності. Павутинна модель ринку. Збіжні та розбіжні послідовності, їх властивості.

**Лекція 12.** Основні теореми про границі числових послідовностей - 2 год.

Теорема про єдиність границі. Теорема про арифметичні дії з границями. Нескінченно малі послідовності та їх властивості. Граничний перехід в нерівностях. Теорема про три послідовності. Теорема про вкладені відрізки. Число  $e$  та його застосування в аналізі вибору інвестиційних рішень. Задача про неперервне нарахування відсотків.

**Практичне заняття 8.** Зміст, тема та назва практичного заняття відповідає змісту 11-12 лекцій. - 2 год.

**Завдання для самостійної роботи за темою № 5.** – 1 год.

3. Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції. – 0,5 год.

4. Властивості послідовності  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  – 0,5 год.

Література [1-6, 8, 9, 11- 14].

## ТЕМА № 6. Границя та неперервність функції

**Лекція 13.** Границя функції - 2 год.

Означення границі функції за Коші та за Гейне. Теорема про еквівалентність цих означень. Односторонні границі. Теорема про зв'язок між односторонніми границями і границею функції. Границя функції на нескінченності. Теореми про границі функції. Важливі границі. Нескінченно малі та нескінченно великі функції та їх властивості. Невизначені вирази.

**Лекція 14.** Неперервність функції. – 2 год.

Означення неперервності функції в точці. Класифікація точок розриву. Властивості функцій неперервних на відріжку: теореми Вейерштраса та Больцано-Коші.

**Практичні заняття 9-10.** Обчислення границі функції. Важливі границі, їх використання. Дослідження функції на неперервність.

**Завдання для самостійної роботи за темою № 6.** – 1 год.

1. Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції. – 0,5 год.

2. Порівняння нескінченно малих функцій. – 0,5 год.

Література [1-6, 9, 12 - 14].

## ТЕМА № 7. Диференціальне числення функції однієї змінної

**Лекція 15-16.** Диференціальне числення функції однієї змінної - 4 год.

Означення похідної. Геометричний, фізичний та економічний зміст похідної. Задачі, що приводять до поняття похідної. Задача про дотичну. Задача про миттєву швидкість. Задачі про продуктивність праці; про маргінальну вартість, доход та прибуток. Односторонні похідні. Диференційованість функції. Теорема про зв'язок між поняттями диференційованості та неперервності. Диференціал функції, його геометричний зміст та застосування.

**Практичне заняття 11.** Похідні та диференціали - 2 год.

Правила диференціювання функцій. Похідні функцій заданих неявно та параметрично. Правила обчислення диференціалів. Наближенні обчислення за допомогою диференціала. Похідні та диференціали старших порядків. Формула Лейбніца.

**Лекція 17.** Основні теореми диференціального числення. - 2 год.

Теорема Ферма. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа. Теорема Коші. Правило Лопітала.

**Практичне заняття 12.** Застосування основних теорем диференціального числення. – 2 год.

**Лекція 18.** Розклад функції в ряд. – 2 год.

Формула Тейлора. Формула Маклорена. Розклад за формулою Маклорена функцій:  $y = e^x$ ,  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = (1+x)^\alpha$ ,  $y = \ln(1+x)$ .

**Завдання для самостійної роботи за темою № 7.** – 2 год.

1. Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції. - 1 год.
2. Правила Лопітала. - 1 год.

*Література* [1-6, 9, 12, 13, 16].

## ТЕМА № 8. Застосування похідної до дослідження функцій

**Лекція 19.** Монотонність, обмеженість, екстремуми функції однієї змінної. - 2 год.

Ознака монотонності функції. Точки локального екстремуму. Необхідні умови локального екстремуму. Достатні умови локального екстремуму.

**Лекція 20.** Асимптоти та точки перегину. Дослідження та побудова графіка функції. - 2 год.

Напрямки опуклості графіка функції та точки перетину. Необхідні та достатні умови точок перегину. Асимптоти графіка функції.  
Схема дослідження графіка функції.

**Практичне заняття 13.** Дослідження і побудова графіків функцій. – 3 год.

**Завдання для самостійної роботи за темою № 8.** – 1 год.

1. Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції. – 0,5 год.

2. Побудова графіка періодичної функції. – 0,5 год.

Література [1-7, 8, 9, 12, 13].

## **ТЕМА № 9. Застосування математичних моделей в економічних дослідженнях**

**Лекція 21.** Еластичність функції - 2 год.

Еластичність функції та її геометричний зміст. Властивості еластичності. Приклади застосування еластичності економічному аналізу. Еластичність доходу за ціною. Перехресна еластичність попиту по ціні. Еластичність заміщення попиту по ціні. Фактори, що виражають еластичність попиту. Зв'язок ціни та граничних витрат монополіста. Еластичність та податкова політика.

**Лекція 22.** Оптимізаційні економічні задачі - 3 год.

Теорія одноресурсної фірми.

Оптимізація оподаткування підприємства.

Максимізація прибутку фірми.

Закон спадної ефективності виробництва.

**Практичні заняття 14-15** відповідають змісту лекцій 21-22. – 3 год.

**Завдання для самостійної роботи за темою № 9.** – 1 год.

1. Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції. – 0,5 год.

2. Застосування похідної в економічних задачах. – 0,5 год.

Література [1-7, 8, 9, 11, 12, 13- 16].

**Модульна контрольна робота № 2.** – 1 год.

## II СЕМЕСТР

### ЗМІСТОВНИЙ МОДУЛЬ 3.

#### ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

#### ТЕМА № 10. Диференціальне числення функцій багатьох змінних

**Лекція 1.** Основні поняття функції багатьох змінних. Границя та неперервність функції багатьох змінних. - 2 год.

Означення функції двох (багатьох) змінних. Область визначення функції двох змінних. Означення частинних приростів функції, повного приросту функції. Лінії рівня функції. Границя функції двох (багатьох) змінних. Неперервність функції двох (багатьох) змінних. Означення частинних похідних функції двох (багатьох) змінних.

**Практичні заняття 1 - 21.** Зміст практичних занять у другому семестрі повністю відповідають змісту лекційного матеріалу.

**Лекція 2.** Поняття диференційованості функції двох (багатьох) змінних. - 2 год.

Теорема про необхідні умови диференційованості функції двох змінних. Теорема про зв'язок між неперервністю та диференційованістю функції. Теорема про достатні умови диференційованості функції двох змінних. Диференціал функції багатьох змінних. Похідні та диференціали старших порядків. Похідна функції за напрямком даного вектора. Градієнт функції та його геометричний зміст. Диференціальні властивості функції корисності.

**Лекція 3.** Екстремуми функцій багатьох змінних - 2 год.

Локальний екстремум функції двох змінних. Необхідні умови локального екстремуму. Достатні умови локального екстремуму. Умовні екстремуми функції двох змінних. Зведення до задачі про безумовний екстремум. Метод невизначених множників Лагранжа. Необхідні умови умовного екстремуму. Достатні умови умовного екстремуму.

**Завдання для самостійної роботи за темою № 10.** – 4 год.

1. Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції. - 1 год.
2. Використання повного диференціалу функції двох змінних при наближених обчисленнях. - 1 год.
3. Правила знаходження похідної складної функції двох змінних та функції, заданої неявно. - 1 год.
4. Градієнт функції та його властивості. - 1 год.

Література [1-6, 8, 9, 11, 12, 17].

## **ТЕМА № 11. Застосування функцій багатьох змінних в прикладних задачах**

**Лекції 4-5.** Метод найменших квадратів. Задачі оптимізації. - 4 год.

Метод найменших квадратів. Еластичність функції багатьох змінних та її властивості. Виробничі функції та їх властивості. Гранична корисність та гранична норма заміщення. Функції попиту споживача. Теорія багаторесурсної фірми. Оптимальний розподіл ресурсів. Приклади задач оптимізації з обмеженнями.

**Завдання для самостійної роботи за темою № 11.** – 4 год.

1. *Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції.* - 2 год.

2. *Знаходження максимуму прибутку фірми.* - 2 год.

*Література* [1-6, 8, 9, 11, 13, 14].

**Модульна контрольна робота №3.** – 1 год.

## **ЗМІСТОВНИЙ МОДУЛЬ 4. МЕТОДИ І МОДЕЛІ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ТА ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ**

### **ТЕМА № 12. Інтегральне числення функції однієї змінної**

**Лекції 6-7.** Невизначений інтеграл. Методи інтегрування - 4 год.

Означення первісної. Основні властивості первісної. Проблемні задачі. Невизначений інтеграл та його властивості. Таблиця інтегралів. Метод безпосереднього інтегрування. Метод заміни змінної (метод підстановки). Метод інтегрування частинами. Інтегрування виразів з допомогою тригонометричних підстановок.

**Лекція 8.** Інтегрування дробово-раціональних функцій - 2 год.

Основні поняття про дробово-раціональні функції. Інтегрування простих дробів. Алгоритм виділення цілої частини. Розклад правильного раціонального дробу в суму найпростіших. Метод невизначених коефіцієнтів.

**Лекції 9-10.** Визначений інтеграл. Невласні інтеграли. – 4 год.

Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла. Означення визначеного інтеграла. Геометричний та економічний зміст визначеного інтеграла. Класи інтегрованих функцій. Властивості визначеного інтеграла. Теорема про середнє значення. Визначений інтеграл, як функція верхньої межі. Обчислення визначеного інтегралу. Формула Ньютона-Лейбніца. Метод заміни змінної або підстановки у визначеному інтегралі. Метод інтегрування частинами у визначеному інтегралі. Невласні інтеграли I-го роду. Невласні інтеграли II-го роду.



**Завдання для самостійної роботи за темою № 12.** – 10 год.

1. Самостійна робота по вивченню матеріалів лекцій. - 4 год.
2. Інтегрування дробово-раціональних функцій. - 2 год.
3. Інтегрування ірраціональних виразів. - 2 год.
4. Самостійне виконання домашнього завдання. - 2 год.

*Література* [1-6, 8, 9,11-14].

### **ТЕМА № 13. Геометричні, фізичні та економічні застосування методів інтегрального числення**

**Лекція 11.** Застосування визначеного інтеграла. - 2 год.

Обчислення площ плоских фігур. Обчислення довжини дуги кривої. Обчислення об'ємів тіл обертання. Обчислення роботи змінної сили. Обчислення пройденого шляху. Економічні застосування визначеного інтеграла. Обчислення середніх значень економічних функцій. Застосування у фінансових задачах та задачах реалізації товарів.

**Завдання для самостійної роботи за темою № 13.** – 4 год.

1. Самостійна робота по вивченню матеріалів лекцій. - 2 год.
2. Самостійне виконання домашнього завдання. - 2 год.

*Література* [9,11-14].

### **ТЕМА № 14. Інтегральне числення функції двох змінних**

**Лекції 12-13.** Подвійні інтеграли. – 4 год.

Означення подвійного інтеграла, його геометричний зміст. Властивості подвійних інтегралів. Обчислення подвійного інтеграла для прямокутної області. Обчислення подвійних інтегралів для правильних областей. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Подвійний інтеграл у полярних координатах. Застосування подвійних інтегралів.

**Завдання для самостійної роботи за темою № 14.** – 4 год.

1. Самостійна робота по вивченню матеріалів лекцій. - 2 год.
2. Самостійне виконання домашнього завдання. - 2 год.

*Література* [6, 9, 11-14, 17].

### **ТЕМА № 15. Елементи теорії звичайних диференціальних рівнянь**

**Лекції 14-15.** Диференціальні рівняння першого порядку. Основні поняття. Методи інтегрування диференціальних рівнянь першого порядку. - 4 год.

Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь. Основні поняття та означення теорії диференціальних рівнянь. Загальний та частинний розв'язок диференціального рівняння. Диференціальні рівняння першого порядку. Задача Коші. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремленими змінними та

метод їх розв'язування. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку та метод їх розв'язування. Рівняння в повних диференціалах. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Методи розв'язування лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Рівняння Бернуллі.

**Лекції 16-17.** Диференціальні рівняння другого порядку, які допускають пониження порядку. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку. - 4 год.

Диференціальні рівняння другого порядку, задача Коші, геометрична інтерпретація. Класи диференціальних рівнянь другого порядку, які допускають пониження порядку, відповідні заміни, що приводять до пониження порядку. Лінійні однорідні та неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку. Метод варіації довільних сталих, метод невизначених коефіцієнтів.

**Лекція 18.** Лінійні системи диференціальних рівнянь. - 2 год.

Лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь. Лінійні системи диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами. Поняття стійкості розв'язку. Критерій стійкості за першим наближенням. Типи особливих точок, фазова площина.

**Завдання для самостійної роботи за темою № 15.** – 10 год.

1. Самостійна робота по вивченню матеріалів лекцій. - 4 год.
2. Метод невизначених коефіцієнтів при розв'язуванні лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами. - 2 год.
3. Самостійне виконання домашніх завдань. - 4 год.

Література [1-6, 8, 9,11, 12, 14].

## **ТЕМА № 16. Застосування диференціальних рівнянь в економічних моделях**

**Лекції 19-21.** Застосування диференціальних рівнянь в економіці - 4 год.

Моделі економічного росту. Модель природного росту при сталому темпі приросту виробництва, модель росту в умовах конкуренції. Задачі про національний дохід, про нагромадження капіталу, про рух фондів, про рекламу. Модель демографічного процесу. Балансові динамічні моделі. Модель Кейнса.

**Завдання для самостійної роботи за темою № 16.** – 6 год.

1. Самостійна робота по вивченню матеріалів лекцій. - 1 год.
2. Графічний аналіз динамічних моделей. Логістичні криві. - 2 год.
3. Неокласична модель зростання. - 2 год.
4. Самостійне виконання домашнього завдання. - 1 год.

Література [1-7, 8, 9,11, 12, 13- 16].

**Модульна контрольна робота №4.** – 1 год.

## Теоретичні питання до іспиту

### Диференціальне числення функцій багатьох змінних

1. Означення функції двох змінних, її область визначення.
2. Лінії рівня функції двох змінних.
3. Границя функції двох змінних.
4. Неперервність функції двох змінних.
5. Диференційовність функції двох змінних.
6. Диференціал функції двох змінних.
7. Наближені обчислення за допомогою повного диференціалу.
8. Похідні та диференціали вищих порядків.
9. Похідна функції двох змінних за напрямом даного вектора.
10. Градієнт функції двох змінних.
11. Необхідні умови локального екстремуму функції двох змінних.
12. Достатні умови локального екстремуму функції двох змінних.
13. Метод найменших квадратів у випадку лінійної залежності.

### Інтегральне числення функції однієї змінної

14. Означення первісної. Невизначений інтеграл та його властивості.
15. Метод безпосереднього інтегрування.
16. Метод заміни змінної у невизначеному інтегралі.
17. Метод інтегрування частинами у невизначеному інтегралі.
18. Інтегрування дробово-раціональних функцій.
19. Розклад правильного раціонального дроби в суму простих дробів.
20. Означення визначеного інтеграла, його геометричний зміст.
21. Властивості визначеного інтеграла.
22. Визначений інтеграл, як функція верхньої межі.
23. Формула Ньютона-Лейбніца.
24. Метод заміни змінної у визначеному інтегралі.
25. Метод інтегрування частинами у визначеному інтегралі.
26. Наближене обчислення визначених інтегралів.
27. Невласні інтеграли I-го роду.
28. Невласні інтеграли II-го роду.
29. Обчислення площ плоских фігур.
30. Обчислення довжини дуги плоскої кривої.
31. Обчислення об'ємів тіл обертання.
32. Економічні застосування визначеного інтеграла.

### Інтегральне числення функції двох змінних

33. Означення подвійного інтеграла, його геометричний зміст.

34. Властивості подвійних інтегралів.
35. Обчислення подвійного інтеграла для прямокутної області.
36. Обчислення подвійних інтегралів для правильних областей.
37. Заміна змінних у подвійному інтегралі.
38. Подвійний інтеграл у полярних координатах.

#### Елементи теорії звичайних диференціальних рівнянь

39. Означення диференціального рівняння, поняття про загальний та частинний розв'язок.
40. Диференціальні рівняння першого порядку. Задача Коші. Теорема Коші.
41. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремленими змінними.
42. Демографічна задача. Балансові динамічні моделі
43. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку.
44. Диференціальні рівняння у повних диференціалах.
45. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Метод Лагранжа.
46. Рівняння Бернуллі. Метод Бернуллі.
47. Диференціальні рівняння другого порядку, задача Коші.
48. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами.
49. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку, метод варіації довільних сталих.
50. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами, метод невизначених коефіцієнтів.

## ДЖЕРЕЛА ІНФОРМАЦІЇ

### а) основна література:

1. Вища математика: Підручник: У 2 кн. – 2-ге вид., - За ред. Кулініча Г.Л. К.: Либідь, 2003.
2. Вища математика: Основні означення, приклади і задачі. За ред. Кулініча Г.Л. К.: Либідь, 1992.
3. Шипачев В.С. Высшая математика. - М.: Высшая школа, 1990г.
4. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів. – К.: ЦУЛ, 2002.
5. Грисенко М.В. Математика для економістів: Підручник .- К.: ВПЦ «Київський університет», 2008.- 599с.
6. Грисенко М.В. Математика для економістів. Методи і моделі, приклади і задачі: Навч. посібник.- К.: Либідь, 2007.- 720с.
7. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. М.: ДЕЛО, 2000.
8. Кремер Н. Высшая математика для экономистов. М.: ЮНИТИ, 1998.

### б) додаткова література:

9. Ашманов С.А. Математические модели и методы в экономике. М., 1980.
10. Бугірь М.К. Математика для економістів. Тернопіль, 1998.
11. Барковський А.В., Барковська Н.В. Математика для економістів: Вища математика. К.: НАУ, 1997.
12. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы анализа экономики. М.: ДИС, 1997.
13. Керекеша П.В. Лекції і вправи з вищої математики.-О. "Астроприт". 2003
14. Малыхин В.И. Математика в экономике. М.:ИНФРА-М, 1999.
15. Міхайленко В.М., Федоренко Н.Д. Математичний аналіз для економістів. К. Європейський університет. 2002.
16. Пономаренко О.І., Перестюк М.О., Бурим В.М. Основи математичної економіки. – К.:ІНФОРМТЕХНІКА, 1995.
17. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В., Шандра И.Г. Математика в экономике. М.: Финансы и статистика, 1999.