

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

**МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

*Кафедра загальної математики*

**«ЗАТВЕРДЖУЮ»**

Заступник декана  
з навчальної роботи

---

« 27 » вересня 2013 року

**РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

**ОСНОВИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ**

для студентів

галузі знань                    **0401 – природничі науки**

спеціальностей            **6.040102 – біологія**

**КИЇВ – 2013**

Робоча програма дисципліни «**Основи вищої математики**» для студентів *галузі знань* 0401 – **природничі науки**, спеціальності 6.040102 – **біологія**. – 24 с.

Розробники:

к. ф.-м. н., доцент **Плахотник Володимир Васильович**

к. ф.-м. н., доцент **Кушніренко Світлана Володимирівна**

Робоча програма дисципліни «**Основи вищої математики**» затверджена на засіданні кафедри загальної математики

Протокол № 2 від « 10 » вересня 2013 року

Завідувач кафедри \_\_\_\_\_ О.М. Станжицький  
(підпис)

« 10 » вересня 2013 року

Схвалено науково-методичною комісією механіко математичного ф-ту

Протокол від « 25 » вересня 2013 року № 1

Голова науково-методичної комісії \_\_\_\_\_ О.О. Курченко  
(підпис)

« 25 » вересня 2013 року

© В.В. Плахотник, 2013 рік

© С.В. Кушніренко, 2013 рік

## ВСТУП

Навчальна дисципліна «*Основи вищої математики*» є складовою освітньо-професійної програми підготовки фахівців за освітньо-кваліфікаційним рівнем «бакалавр» з *напрямку підготовки – 0401 – природничі науки*, спеціальності **6.040102 – біологія**.

Дана дисципліна входить у **цикл нормативних** для спеціальності «біологія». Викладається у III та IV семестрах в **обсязі – 216 год. (6 кредитів ECTS)** зокрема: *лекції – 49 год. (17 год. у III семестрі і 32 год. у IV семестрі), практичні заняття – 49 год. (17 год. у III семестрі і 32 год. у IV семестрі), самостійна робота – 118 год. (56 год. у III семестрі і 62 год. у IV семестрі)*. У курсі передбачено *4 змістових модулі та 4 модульні контрольні роботи*. Завершується дисципліна заліками в III та IV семестрах.

**Мета дисципліни** – ознайомлення з класичними та сучасними математичними методами, теоретичними положеннями та основними застосуваннями математичних методів для розв’язування задач, які виникають у курсі “Математичні методи в біології”, для формування наукового світогляду студентів.

**Завдання** – набуття студентами необхідних методичних та методологічних знань і практичних навичок для застосування існуючих математичних моделей та математичних методів при розв’язуванні прикладних та теоретичних задач, а також сприяння розвитку логічного та аналітичного мислення студентів – майбутніх біологів.

Курс складається з **чотирьох** змістових модулів.

*Перший* модуль охоплює такі розділи вищої математики як лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія та елементи лінійного програмування.

*Другий* модуль присвячений теорії границь для послідовності та функції однієї змінної.

*Третій* модуль – диференціальному численню функцій однієї та багатьох змінних.

*Четвертий* модуль – інтегральному численню функції однієї змінної та теорії звичайних диференціальних рівнянь.

**В результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен**

**знати:**

основні поняття вищої математики такі як матриці, визначники, вектори, границя та неперервність функції, похідна, диференціал, інтеграли, диференціальні рівняння.

**вміти:**

розв'язувати відповідні тематичні задачі та набути навичок самостійного використання літератури з математичних дисциплін.

**Місце дисципліни** в системі підготовки фахівців у сфері біології: нормативна навчальна дисципліна "Основи вищої математики" є базовою для професійної підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня "бакалавр" спеціальності 6.040102 – біологія.

**Зв'язок з іншими дисциплінами.** Навчальна дисципліна «Основи вищої математики» є основою для вивчення таких спеціальних дисциплін як "теорія ймовірностей та математична статистика", "біометрика", "математичні методи в біології".

### Контроль знань і розподіл балів, які отримують студенти

Навчальна дисципліна "Основи вищої математики" оцінюється за модульно-рейтинговою системою. Вона складається з чотирьох модулів: до першого входять 1-3 теми, до другого 4-7 теми, до третього 8-9 теми, до четвертого 10-11 теми.

Результати навчальної діяльності студентів оцінюються за 100 - бальною шкалою.

#### I семестр

##### Змістовий модуль 1

<b>Вид роботи</b>	<b>Бали</b>
Домашнє самостійне завдання 1. <i>Матриці. Визначники.</i>	15
<i>Методи розв'язування систем лінійних рівнянь.</i>	
Домашнє самостійне завдання 2. <i>Вектори.</i>	15
Домашнє самостійне завдання 3. <i>Елементи аналітичної геометрії.</i>	15
Усні відповіді та тестові завдання на практичних заняттях.	15
Модульна контрольна робота 1.	40
<b>Сума</b>	<b>100</b>

##### Змістовий модуль 2

<b>Вид роботи</b>	<b>Бали</b>
Домашнє самостійне завд. 4. <i>Елементи лінійного програмування.</i>	20
Домашнє самостійне завдання 5. <i>Границя і неперервність послідовності, функції однієї змінної.</i>	20
Усні відповіді та тестові завдання на практичних заняттях.	20
Модульна контрольна робота 2.	40
<b>Сума</b>	<b>100</b>

#### II семестр

##### Змістовий модуль 3

<b>Вид роботи</b>	<b>Бали</b>
Домашнє самостійне завдання 6. <i>Похідні та диференціали функції однієї змінної.</i>	20
Домашнє самостійне завдання 7. <i>Функції багатьох змінних.</i>	20
Усні відповіді та тестові завдання на практичних заняттях.	20
Модульна контрольна робота 3.	40
<b>Сума</b>	<b>100</b>

##### Змістовий модуль 4

<b>Вид роботи</b>	<b>Бали</b>
Домашнє самостійне завдання 8. <i>Невизначені, визначені і невластні інтеграли. Їх застосування.</i>	20
Домашнє самостійне завдання 9. <i>Диференціальні рівняння.</i>	20
Усні відповіді та тестові завдання на практичних заняттях.	20
Модульна контрольна робота 4.	40
<b>Сума</b>	<b>100</b>

За результатами кожного семестру студент отримує підсумкову оцінку, яка розраховується як середньозважене оцінок за кожен з двох модулів у семестрі та оцінки за залік (комплексний підсумковий модуль) за наступною формулою:

	<i>Змістовий модуль 1 (<math>ЗМ_1</math>)</i>	<i>Змістовий модуль 2 (<math>ЗМ_2</math>)</i>	<i>Комплексний підсумковий модуль (КПМ)</i>	<i>Разом (підсумкова оцінка)</i>
Вагові коефіцієнти (%)	30% $k_1=0,3$	30% $k_2=0,3$	40% $k_3=0,4$	100%
Максимальна оцінка в балах	100	100	100	100

Розрахунок підсумкової оцінки (зваженої):

$$ПО = ЗМ_1 \times k_1 + ЗМ_2 \times k_2 + КПМ \times k_3$$

#### Шкала відповідності

За 100 – бальною шкалою	За національною шкалою
90 – 100	зараховано
85 – 89	
75 – 84	
65 – 74	
60 – 64	
1 – 59	не зараховано

Якщо за результатами модульно-рейтингового контролю студент отримав більше ніж 75 балів за кожний змістовний модуль, то студент на заліку звільняється від виконання практичних задач, які автоматично зараховуються з оцінкою «*зараховано*» і кількістю балів  $(ЗМ_1 + ЗМ_2)/2$ .

Якщо за результатами модульно-рейтингового контролю студент отримав середнє арифметичне за два змістовні модулі, яке менше ніж 35 балів, то студент не допускається до заліку і вважається таким, що не виконав усі види робіт, які передбачаються навчальним планом за семестр з дисципліни "Основи вищої математики".

У випадку відсутності студента з поважних причин відпрацювання та перездачі МКР здійснюються у відповідності до «Положення про порядок оцінювання знань студентів при кредитно-модульній системі організації навчального процесу» від 1 жовтня 2010 року.

**ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**  
**Змістовий модуль 1**  
**ОСНОВИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ**

**ТЕМА 1. Елементи лінійної алгебри . (20 год.)<sup>1</sup>**

Матриці. Дії з матрицями: додавання матриць, множення матриці на число, множення матриць, їхні властивості. Визначник квадратної матриці. Властивості визначників та методи їх обчислення. Системи лінійних рівнянь, основні поняття і означення. Методи розв'язування систем лінійних рівнянь: формули Крамера, метод Гаусса-Жордана, метод оберненої матриці. Порівняльний аналіз методів розв'язування систем лінійних рівнянь.

**ТЕМА 2. Елементи векторної алгебри . (12 год.)**

Вектори, координатний запис вектора. Додавання векторів і множення вектора на число. Скалярний добуток векторів та його властивості. Векторний добуток векторів та його властивості. Мішаний добуток векторів та його властивості.

**ТЕМА 3. Елементи аналітичної геометрії. (13 год.)**

Канонічне рівняння прямої в просторі, канонічне рівняння площини. Основні задачі на складання рівняння прямої і площини. Особливості рівняння прямої на площині. Геометричні образи системи лінійних нерівностей з двома невідомими.

**Змістовий модуль 2**  
**ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ,**  
**ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ, ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ**

**ТЕМА 4. Елементи лінійного програмування. (16 год.)**

Основна задача лінійного програмування. Геометричний спосіб розв'язування задачі лінійного програмування на площині. Алгоритм симплекс-методу у випадку додатніх коефіцієнтів цільової функції.

**ТЕМА 5. Границя послідовності. (10 год.)**

Числові множини на числовій прямій. Числові послідовності. Обмежені послідовності. Монотонні послідовності. Границя числової послідовності. Нескінченно малі послідовності та їх властивості. Число  $e$ .

---

<sup>1</sup> Зазначається загальна кількість годин з урахуванням лекцій, практичних (семінарських, лабораторних) і самостійної роботи.

## **ТЕМА 6. Границя і неперервність функції однієї змінної (16 год.)**

Елементарні функції. Границя функції однієї змінної. Односторонні границі. Теорема про зв'язок між односторонніми границями і границею функції. Границя функції на нескінченності. Теореми про границі функції. Неперервність числових функцій. Неперервність елементарних функцій. Властивості функцій, неперервних на замкненому проміжку. Класифікація точок розриву.

### **Змістовий модуль 3**

#### **ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ**

## **ТЕМА 7. Диференціальне числення функції однієї змінної. (35 год.)**

Означення похідної і диференціалу. Геометричний зміст похідної, рівняння дотичної до графіка функції. Біологічний зміст похідної, похідна як швидкість зміни функції. Наближене обчислення за допомогою диференціала. Похідні найпростіших елементарних функцій, таблиця похідних. Похідна складної функції. Похідні суми, добутку і частки. Властивості диференційованих функцій. Теорема Ферма про максимальне і мінімальне значення диференційованої функції, теорема Ролля. Теореми Лагранжа і Коші про прирости функції. Правила Лопітала для відшукування границі функції. Похідні і диференціали вищих порядків. Формули Тейлора і Маклорена, їх використання для знаходження границь і наближених значень функції. Дослідження функцій на монотонність, на опуклість. Наближене обчислення значень функції, знаходження асимптот та знаходження границь. Схематична побудова графіка функції на основі її дослідження.

## **ТЕМА 8. Диференціальне числення функцій багатьох змінних. (27 год.)**

Область визначення функції двох змінних, її особливості. Границя функції багатьох змінних, методи відшукування границі функції двох змінних. Неперервність функції багатьох змінних, властивості функцій, неперервних в замкненій обмеженій зв'язній області. Означення частинних похідних і диференційованість функції двох змінних. Диференційованість елементарних функцій. Інваріантна формула диференціалу першого порядку. Використання диференціалу для наближених оцінок. Похідна за напрямком, градієнт функції. Необхідна умова екстремуму функції багатьох змінних. Достатня умова екстремуму функції двох змінних. Найбільше і найменше значення функції в замкненій обмеженій зв'язній області. Метод найменших квадратів для пошуку лінійної залежності, що найкраще описує результати біологічного експерименту.



## Змістовий модуль 4

### ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІСІ ЗМІННОЇ

#### І ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

#### **ТЕМА 9. Інтегральне числення функції однієї змінної. (32 год.)**

Поняття первісної і невизначеного інтеграла. Задачі з біології, що зводяться до відшукування невизначеного інтеграла. Властивості невизначеного інтеграла. Таблиця невизначених інтегралів найпростіших елементарних функцій. Зведення невизначеного інтеграла до табличного внесенням під знак диференціала. Інтегрування частинами, рекурентні формули. Заміна змінної у невизначеному інтегралі. Інтегрування найпростіших раціональних та ірраціональних функцій. Суми Дарбу і визначений інтеграл. Властивості визначеного інтеграла. Теорема про середнє значення. Визначений інтеграл, як функція верхньої межі. Формула Ньютона-Лейбніца. Методи обчислення визначеного інтеграла. Теорема про застосування визначеного інтеграла. Використання визначеного інтеграла для обчислення площі, об'єму, роботи, біомаси, довжини дуги кривої. Невласні інтеграли I-го роду. Невласні інтеграли II-го роду.

#### **ТЕМА 10. Елементи теорії звичайних диференціальних рівнянь. (29 год.)**

Задача Коші для звичайного диференціального рівняння, її біологічний зміст. Теорема про існування і єдиність розв'язку задачі Коші. Поняття про якісну теорію диференціальних рівнянь. Диференціальні рівняння з відокремленими і відокремлюваними змінними і рівняння, що зводяться до них. Лінійні рівняння першого порядку і рівняння, що зводяться до них. Рівняння у повних диференціалах і рівняння, що зводяться до них. Задачі з біології, що зводяться до диференціальних рівнянь першого порядку. Диференціальні рівняння, що допускають пониження порядку. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку, структура їх загального розв'язку. Лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Зведення системи лінійних диференціальних рівнянь до одного диференціального рівняння.

Поняття стійкості за Ляпуновим і асимптотичної стійкості розв'язків диференціального рівняння першого порядку. Дослідження на стійкість стаціонарних розв'язків автономної системи диференціальних рівнянь. Класифікація особливих точок. Дослідження особливих точок диференціального рівняння першого порядку за допомогою матриці першого наближення. Застосування теорії стійкості в біологічних задачах.

## СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

### ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ І ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ у III семестрі

№	Назва теми	Кількість годин		
		лекції	практичні	самостійна робота
<b><i>Змістовий модуль 1</i></b> <b>ОСНОВИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ</b>				
1.	Елементи лінійної алгебри	4	4	12
2.	Елементи векторної алгебри	2	2	8
3.	Елементи аналітичної геометрії	3	2	8
	Модульна контрольна робота		1	
<b><i>Змістовий модуль 2</i></b> <b>ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ, ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ, ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ</b>				
4.	Елементи лінійного програмування	2	2	12
5.	Границя послідовності	2	2	6
6.	Границя функції однієї змінної. Неперервність функції однієї змінної	3	3	10
	Модульна контрольна робота		1	
	Підсумкова модульна контрольна робота	1		
	<b>ВСЬОГО</b>	<b>17</b>	<b>17</b>	<b>56</b>

Загальний обсяг **90 год.** у III семестрі, в тому числі:

Лекцій – **17 год.**

Практичних – **17 год.**

Самостійна робота - **56 год.**

## СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

### ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ЛЕКЦІЙ І ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ у IV семестрі

№	Назва теми	Кількість годин		
		лекції	практичні	самостійна робота
<b><i>Змістовий модуль 3</i></b> <b>ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ</b>				
7.	Диференціальне числення функції однієї змінної	10	9	16
8.	Диференціальне числення функцій багатьох змінних	6	6	15
	Модульна контрольна робота		1	
<b><i>Змістовий модуль 4</i></b> <b>ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ І ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ</b>				
9.	Інтегральне числення функції однієї змінної	8	8	16
10.	Елементи теорії звичайних диференціальних рівнянь	7	7	15
	Модульна контрольна робота		1	
	Підсумкова модульна контрольна робота	1		
	<b>ВСЬОГО</b>	<b>32</b>	<b>32</b>	<b>62</b>

Загальний обсяг 126 год. у IV семестрі, в тому числі:

Лекцій – 32 год.

Практичних – 32 год.

Самостійна робота - 62 год.

## **ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1**

### **ОСНОВИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ**

#### **ТЕМА 1. Елементи лінійної алгебри . (20 год.)**

**Лекція 1.** Матриці та їх визначники. - 2 год.

Матриці. Дії з матрицями: додавання матриць, множення матриці на число, множення матриць, їхні властивості. Визначник квадратної матриці. Властивості визначників та методи їх обчислення.

**Практичне заняття 1.** Дії з матрицями. Обчислення визначників – 2 год.

Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції. - 2 год.

**Завдання для самостійної роботи № 1.** *Матриці. Визначники.* - 4 год.

*Література [1-7].*

**Лекція 2.** Методи розв'язування систем лінійних рівнянь. - 2 год.

Системи лінійних рівнянь, основні поняття і означення. Методи розв'язування систем лінійних рівнянь: формули Крамера, метод Гаусса-Жордана, метод оберненої матриці. Порівняльний аналіз методів розв'язування систем лінійних рівнянь.

**Практичне заняття 2.** Методи розв'язування систем лінійних рівнянь. - 2 год.

Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції. - 2 год.

**Завдання для самостійної роботи № 2.** *Методи розв'язування систем лінійних рівнянь.* - 4 год.

*Література [1-7].*

#### **ТЕМА 2. Елементи векторної алгебри . (12 год.)**

**Лекція 3.** Вектори і дії з ними. - 2 год.

Вектори, координатний запис вектора. Додавання векторів і множення вектора на число. Скалярний добуток векторів та його властивості. Векторний добуток векторів та його властивості. Мішаний добуток векторів та його властивості.

**Практичне заняття 3.** Дії з векторами. - 2 год.

Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції. - 2 год.

**Завдання для самостійної роботи № 3.** *Дії з векторами* - 6 год.

*Література [1-7].*

#### **ТЕМА 3. Елементи аналітичної геометрії. (13 год.)**

**Лекція 4.** Рівняння прямої та площини. – 3 год.

Канонічне рівняння прямої в просторі. Види рівнянь площини. Основні задачі на складання рівняння прямої і площини. Особливості рівняння прямої на площині. Геометричні образи системи лінійних нерівностей з двома невідомими.

**Практичне заняття 4.** Знаходження рівняння прямої та площини.  
Використання дій з векторами. – 2 год.

Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції. - 2 год.

**Завдання для самостійної роботи № 4.** Знаходження рівняння прямої і площини - 6 год.

Література [1-7].

### **Контрольні запитання та завдання**

1. Що називається матрицею? Які види матриць ви знаєте?
2. Які дії над матрицями можна виконувати?
3. Які властивості дій над матрицями?
4. Яке означення визначника  $n$ -го порядку?
5. Які властивості визначників ви знаєте?
6. Сформулюйте теорему про розклад визначника  $n$ -го порядку за елементами будь-якого рядка або стовпця.
7. Які перетворення називають елементарними перетвореннями матриці?
8. Як знаходиться обернена матриця?
9. Що називається розв'язком системи лінійних рівнянь?
10. Що називається матричним записом системи лінійних рівнянь?
11. Які методи розв'язування систем лінійних рівнянь ви знаєте?
12. Які лінійні операції над векторами ви знаєте і які властивості вони мають?
13. Які вектори називаються колінеарними?
14. Що значить пронормувати даний вектор?
15. Які властивості має скалярний добуток векторів?
16. Які властивості має векторний добуток векторів?
17. Які властивості має мішаний добуток векторів?
18. Які ви знаєте види рівняння площини в просторі?
19. Які ви знаєте види рівняння прямої в просторі?
20. Яке взаємне розміщення прямих і площин у просторі?
21. Як знаходиться кут між двома площинами?
22. Як знаходиться кут між двома прямими?
23. Як знаходиться кут між прямою і площиною?
24. Які умови паралельності та перпендикулярності прямої та площини?

### **ТИПОВЕ ЗАВДАННЯ МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ №1**

- 1) Розв'язати систему рівнянь 
$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}.$$
- 2) Знайти  $X$ , якщо  $AX = A - 2E$ , де  $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$

- 3) Знайти рівняння і побудувати площину, яка проходить через точку  $M(1; 3; -4)$ , перпендикулярна до площини  $2x + 3y - z - 5 = 0$  і паралельна до прямої  $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-4}{-2}$ .
- 4) Знайти об'єм та довжину висоти  $SM$  піраміди  $ABCD$ , якщо  $A(1;0;1)$ ,  $B(-1;2;1)$ ,  $C(0;0;2)$ ,  $D(3;-1;0)$ .

## Змістовий модуль 2

### ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ, ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ, ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

#### ТЕМА 4. Елементи лінійного програмування. (16 год.)

**Лекція 5.** Основна задача лінійного програмування. - 2 год.

Геометричний спосіб розв'язування задачі лінійного програмування на площині. Алгоритм симплекс-методу у випадку додатніх коефіцієнтів цільової функції.

**Практичне заняття 5.** Методи розв'язування основної задачі лінійного програмування. – 2 год.

Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції. - 2 год.

**Завдання для самостійної роботи № 5.** Методи розв'язування основної задачі лінійного програмування. – 10 год.

Література [1-4, 6,7].

#### ТЕМА 5. Границя послідовності. (10 год.)

**Лекція 6.** Числові множини на числовій прямій. – 2 год.

Числові послідовності. Границя числової послідовності. Нескінченно малі послідовності та їхні властивості. Число  $e$ .

**Практичне заняття 6.** Методи знаходження границі числової послідовності. – 2 год.

Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції. - 2 год.

**Завдання для самостійної роботи № 6.** Знаходження границі послідовності. – 4 год.

Література [1-4, 6,7].

#### ТЕМА 6. Границя і неперервність функції однієї змінної (16 год.)

**Лекція 7.** Числові функції. - 2 год.

Елементарні функції. Границя числової функції. Неперервність числових функцій. Неперервність елементарних функцій. Властивості функцій, неперервних на замкненому проміжку. Класифікація точок розриву.

**Практичне заняття 7.** Дослідження функції на неперервність. – 2 год.

Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції. - 2 год.  
Література [1-4, 6,7].

**Лекція 8.** Визначні границі. - 1 год.

Шість визначних границь та їх використання для знаходження границі елементарної функції.

**Практичне заняття 8.** Методи знаходження границі функції за допомогою визначних границь. -1 год.

Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції. - 1 год.

**Завдання для самостійної роботи № 7.** Методи знаходження границі функції. Дослідження функції на неперервність. - 7 год.

Література [1-4, 6,7].

### **Контрольні запитання та завдання**

1. У чому полягає основна задача лінійного програмування?
2. Коли можна користуватися геометричним способом її розв'язування?
3. Який алгоритм симплекс-методу?
4. Що таке числова послідовність? Наведіть приклади.
5. Дайте означення границі числової послідовності. Наведіть приклади.
6. Які властивості мають нескінченно малі послідовності?
7. Яка послідовність збігається до числа  $e$ ?
8. Побудуйте графіки основних елементарних функцій.
9. Дайте означення границі функції. Наведіть приклади.
10. Сформулюйте основні твердження, які використовуються при знаходженні границь.
11. Яка функція називається нескінченно малою, нескінченно великою?
12. Що таке неперервна функція?
13. Які неперервні функції ви знаєте?
14. Які властивості мають функції, неперервні на замкнутому проміжку?
15. Яка класифікація точок розриву функції?
16. Які визначні границі ви знаєте? Як вони використовуються для знаходження границь?

### **ТИПОВЕ ЗАВДАННЯ МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ №2**

1. Знайти найменше і найбільше значення функції  $L = (a + b)x + (c + b)y$ , якщо

$$\begin{cases} (b - a)x - 2y - b + 3a \leq 0 \\ (c - b)x + y + 2b - 3c \leq 0 \\ (c - a)x - y - c + 2a \geq 0 \end{cases}$$

2. Обчислити границі:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{b-c} - n + 3}{bn^{a-b} - cn^2}, \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - an} - \sqrt{n^2 - c}), \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+a}{x-b} \right)^{cx-b}.$$

3. Дослідити функцію на неперервність в заданих точках та побудувати схематичний графік:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{при } x < -1, \\ \frac{1}{2x-4} & \text{при } x \in [-1, 2], \\ x^2 - 7 & \text{при } x > 2. \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = -1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 3. \end{matrix}$$

### Змістовий модуль 3

#### ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

#### ТЕМА 7. Диференціальне числення функції однієї змінної. (35 год.)

**Лекція 1.** Похідна і диференціал. – 2 год.

Означення похідної і диференціала. Геометричний зміст похідної, рівняння дотичної до графіка функції. Біологічний зміст похідної, похідна як швидкість зміни функції. Наближене обчислення за допомогою диференціала.

**Практичне заняття 1.** Відшукування похідної за означенням, рівняння дотичної. – 2 год.

Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції. - 1 год.

**Завдання для самостійної роботи № 1.** Наближене обчислення за допомогою диференціала. – 2 год.

Література [1-4, 6,7].

**Лекція 2.** Методи відшукування похідної. – 2 год.

Похідні найпростіших елементарних функцій, таблиця похідних. Похідна складної функції. Похідні суми, добутку і частки.

**Практичне заняття 2.** Відшукування похідної за таблицею похідних, формулами похідної добутку, частки, складної функції. – 2 год.

Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції. - 1 год.

**Завдання для самостійної роботи № 2.** Похідна степенєво-показникової функції. – 2 год.

Література [1-4, 6,7].

**Лекція 3.** Властивості диференційованих функцій. – 2 год.

Теорема Ферма про максимальне і мінімальне значення диференційованої функції, теорема Ролля. Теореми Лагранжа і Коші про прирости функції. Правила Лопіталя для відшукування границі функції.

**Практичне заняття 3.** Відшукування границь за правилами Лопіталя. – 2 год.

Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції. - 1 год.

**Завдання для самостійної роботи № 3.** Відшукування границь за правилами Лопіталя. – 2 год.

Література [1-4, 6,7].



**Лекція 4.** Формули Тейлора і Маклорена. – 2 год.

Похідні і диференціали вищих порядків. Формули Тейлора і Маклорена, їх використання для знаходження границь і наближених значень функції.

**Практичне заняття 4.** Побудова формули Маклорена та її використання. – 2 год.

Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції - 1 год.

**Завдання для самостійної роботи № 4.** *Наближене обчислення за допомогою формули Маклорена.* – 2 год.

*Література* [1-4, 6,7].

**Лекція 5.** Застосування похідних для дослідження функцій. – 2 год.

Дослідження функцій на монотонність, на опуклість. Наближене обчислення значень функції, знаходження асимптот та знаходження границь. Схематична побудова графіка функції на основі її дослідження.

**Практичне заняття 5.** Побудова графіків. – 2 год.

Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції. - 1 год.

**Завдання для самостійної роботи № 5 .** *Побудова графіків.* – 2 год.

*Література* [1-4, 6,7]

## **ТЕМА 8. Диференціальне числення функцій багатьох змінних. (27 год.)**

**Лекція 6.** Основні поняття і особливості теорії функцій багатьох змінних. – 2 год.

Область визначення функції двох змінних, її особливості. Границя функції багатьох змінних, методи відшукування границі функції двох змінних. Неперервність функції багатьох змінних, властивості функцій, неперервних в замкненій обмеженій зв'язній області.

**Практичне заняття 6.** Побудова і дослідження області визначення. Відшукування границь. – 2 год.

Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції. - 2 год.

**Завдання для самостійної роботи № 6.** *Відшукування границь.* – 3 год.

*Література* [1-4, 6,7].

**Лекція 7.** Частинні похідні і диференціали. – 2 год.

Означення частинних похідних і диференційованість функції двох змінних. Диференційованість елементарних функцій. Інваріантна формула диференціалу першого порядку. Використання диференціалу для наближених оцінок. Похідна за напрямком, градієнт функції.

**Практичне заняття 7.** Відшукування частинних похідних, диференціала, градієнта. – 2 год.

Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції. - 2 год.

**Завдання для самостійної роботи № 7.** *Наближене обчислення за допомогою диференціала.* – 2 год.

*Література* [1-4, 6,7].

**Лекція 8.** Дослідження функцій багатьох змінних на екстремум. – 2 год.

Необхідна умова екстремуму функції багатьох змінних. Достатня умова екстремуму функції двох змінних. Найбільше і найменше значення функції в замкненій обмеженій зв'язній області. Метод найменших квадратів для пошуку лінійної залежності, що найкраще описує результати біологічного експерименту

**Практичне заняття 8.** Дослідження функції двох змінних на екстремум. – 2 год.

Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції. - 2 год.

**Завдання для самостійної роботи № 8.** Відшукування найменшого та найбільшого значення функції. Метод найменших квадратів. – 4 год.

Література [1-4, 6,7].

### **Контрольні запитання та завдання**

1. Яке означення похідної функції однієї змінної?
2. Як обчислюється похідна суми, добутку, частки, складної функції?
3. Як можна обчислити похідну степенево-показникової функції?
4. Як обчислюється похідна функції заданої неявно?
5. Що таке односторонні похідні?
6. Який біологічний зміст похідної?
7. Який геометричний зміст похідної?
8. Як використовується диференціал в наближених обчисленнях?
9. Які властивості мають диференційовані функції?
10. Як знаходять границі за правилами Лопітала?
11. Як визначаються похідні і диференціали вищих порядків?
12. Запишіть формули Тейлора і Маклорена.
13. Як формули Тейлора і Маклорена використовуються для знаходження границь і наближених значень функції?
14. Як дослідити функцію на монотонність, на опуклість?
15. Які бувають асимптоти і як вони знаходяться?
16. Які основні етапи дослідження і побудови графіка функції?
17. Що називають функцією багатьох змінних?
18. Як знайти область визначення функції двох змінних?
19. Як визначається границя функції багатьох змінних?
20. Які основні методи відшукування границі функції двох змінних?
21. Які властивості функцій, неперервних в замкненій обмеженій зв'язній області?
22. Дайте означення частинних похідних функції двох змінних.
23. Які функції двох змінних називають диференційованими?
24. Що таке інваріантність форми диференціалу першого порядку?
25. Як використовується диференціал функції двох змінних для наближених обчислень?
26. Як визначається похідна за напрямком для функції двох змінних?
27. Як визначається градієнт функції і які його властивості?

28. Як записати рівняння дотичної площини до поверхні?
29. Як записати рівняння нормалі до поверхні?
30. Які необхідні умови екстремуму функції багатьох змінних?
31. Яка достатня умова екстремуму функції двох змінних?
32. Як знаходити найбільше і найменше значення функції в замкненій обмеженій зв'язній області?
33. Запишіть нормальну систему методу найменших квадратів для пошуку лінійної залежності.

### ТИПОВЕ ЗАВДАННЯ МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ №3

1) Знайти похідні від функцій:

$$\text{а) } y = 2^{bx} \cdot \operatorname{tg} \frac{ax-3}{2}, \quad \text{б) } y = \frac{\sqrt{1+ax} \cdot (5-bx)^c}{\sqrt{(cx+1)^3 (x-a)^4} e^{-bx}}, \quad \text{в) } ae^{cy} + x^c y^a - bx = c.$$

2) Обчислити границю за правилом Лопіталя: а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{-bx}}{\sin cx}$ .

3) Обчислити наближено за допомогою повного диференціала  $(1,06)^{1,98}$ .

4) Дослідити на екстремум функцію :  $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$ .

## Змістовий модуль 4

### ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

#### І ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

#### ТЕМА 9. Інтегральне числення функції однієї змінної. (32 год.)

**Лекція 9.** Первісна і невизначений інтеграл. – 2 год.

Поняття первісної і невизначеного інтеграла. Задачі з біології, що зводяться до відшукування невизначеного інтеграла. Властивості невизначеного інтеграла. Таблиця невизначених інтегралів найпростіших елементарних функцій.

**Практичне заняття 9.** Знаходження невизначених інтегралів. – 2 год.

Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції. - 2 год.

**Завдання для самостійної роботи № 9.** Знаходження невизначених інтегралів. – 2 год.

Література [1-4, 6,7].

**Лекція 10.** Методи знаходження невизначених інтегралів. – 2 год.

Зведення невизначеного інтеграла до табличного внесенням під знак диференціала. Інтегрування частинами, рекурентні формули. Заміна змінної у невизначеному інтегралі. Інтегрування найпростіших раціональних та ірраціональних функцій.

**Практичне заняття 10.** Знаходження невизначених інтегралів. – 2 год.

Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції. - 2 год.

**Завдання для самостійної роботи № 10.** Знаходження невизначених інтегралів. – 2 год.

*Література* [1-4, 6, 7].

**Лекція 11.** Інтегральні суми і визначений інтеграл. – 2 год.

Суми Дарбу і визначений інтеграл. Властивості визначеного інтеграла. Теорема про середнє значення. Визначений інтеграл, як функція верхньої межі. Формула Ньютона-Лейбніца. Методи обчислення визначеного інтеграла.

**Практичне заняття 11.** Обчислення визначених інтегралів. – 2 год.

Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції. - 2 год.

**Завдання для самостійної роботи № 11.** Обчислення визначених інтегралів. – 2 год.

*Література* [1-4, 6,7].

**Лекція 12.** Застосування визначених інтегралів. – 2 год.

Теорема про застосування визначеного інтеграла. Невласні інтеграли I та II роду. Використання визначеного інтеграла для обчислення площі, об'єму, роботи, біомаси, довжини дуги кривої.

**Практичне заняття 12.** Застосування визначених інтегралів. – 2 год.

Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції. - 2 год.

**Завдання для самостійної роботи № 12.** Застосування визначених інтегралів. – 2 год.

*Література* [1-4, 6,7].

## **ТЕМА 10. Елементи теорії звичайних диференціальних рівнянь. (29 год.)**

**Лекція 13.** Основні поняття теорії диференціальних рівнянь. – 1 год.

Задача Коші для звичайного диференціального рівняння, її біологічний зміст. Теорема про існування і єдиність розв'язку задачі Коші. Поняття про якісну теорію диференціальних рівнянь.

**Практичне заняття 13.** Розв'язування найпростіших диференціальних рівнянь. – 1 год.

Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції. - 1 год.

**Завдання для самостійної роботи № 13.** Приклади диференціальних рівнянь. – 2 год.

*Література* [1-4, 6-8].

**Лекція 14.** Методи розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку. – 2 год.

Диференціальні рівняння з відокремленими і відокремлюваними змінними і рівняння, що зводяться до них. Лінійні рівняння першого порядку і рівняння, що зводяться до них. Рівняння у повних диференціалах і рівняння, що зводяться до них. Задачі з біології, що зводяться до диференціальних рівнянь першого порядку.

**Практичне заняття 14.** Розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку. – 2 год.

Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції. - 1 год.

**Завдання для самостійної роботи № 14.** *Розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку. – 3 год.*

*Література [1-4, 6-8].*

**Лекція 15.** Диференціальні рівняння вищих порядків і системи диференціальних рівнянь першого порядку. – 2 год.

Диференціальні рівняння, що допускають пониження порядку. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку, структура їх загального розв'язку. Лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Зведення системи лінійних диференціальних рівнянь до одного диференціального рівняння.

**Практичне заняття 15.** Розв'язування диференціальних рівнянь другого порядку. – 2 год.

Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції. - 2 год.

**Завдання для самостійної роботи № 15.** *Розв'язування диференціальних рівнянь другого порядку. – 2 год.*

*Література [1-4, 6-8].*

**Лекція 16.** Стійкість розв'язків за Ляпуновим і особливі точки диференціальних рівнянь першого порядку. – 2 год.

Поняття стійкості за Ляпуновим і асимптотичної стійкості розв'язків диференціального рівняння першого порядку. Дослідження на стійкість стаціонарних розв'язків автономної системи диференціальних рівнянь. Класифікація особливих точок. Дослідження особливих точок диференціального рівняння першого порядку за допомогою матриці першого наближення. Застосування теорії стійкості в біологічних задачах.

**Практичне заняття 16.** Дослідження стаціонарних розв'язків на стійкість і дослідження особливих точок. – 2 год.

Самостійна робота по вивченню матеріалів лекції. - 2 год.

**Завдання для самостійної роботи № 16.** *Дослідження стаціонарних розв'язків на стійкість і дослідження особливих точок. – 2 год.*

*Література [1-4, 6-8].*

### **Контрольні запитання та завдання**

1. Яке означення первісної і невизначеного інтеграла?
2. Наведіть задачі з біології, що зводяться до відшукування невизначеного інтеграла.
3. Які властивості невизначеного інтеграла?
4. Запишіть невизначені інтеграли від найпростіших елементарних функцій.
5. Які методи знаходження невизначених інтегралів вам відомі?
6. Запишіть формулу заміни змінної у невизначеному інтегралі.
7. Як інтегруються найпростіші раціональні функції?

8. Як інтегруються найпростіші ірраціональні функції?
9. Які властивості визначеного інтеграла ви знаєте?
10. Сформулюйте теорему про середнє значення визначеного інтеграла.
11. Які властивості має визначений інтеграл, як функція верхньої межі?
12. Запишіть формулу Ньютона-Лейбніца.
13. Які основні методи обчислення визначеного інтеграла?
14. В чому відмінність між невластими інтегралами I та II роду?
15. Наведіть приклади застосування визначених інтегралів.
16. Що називають звичайним диференціальним рівнянням?
17. В чому полягає задача Коші для звичайного диференціального рівняння?
18. Який біологічний зміст задачі Коші?
19. Сформулюйте теорему про існування і єдиність розв'язку задачі Коші.
20. Як розв'язуються диференціальні рівняння з відокремленими змінними?
21. Як розв'язуються рівняння з відокремлюваними змінними?
22. Які методи розв'язування лінійних диф. рівнянь першого порядку?
23. Як знаходиться розв'язок рівняння у повних диференціалах?
24. Наведіть приклади задач з біології, що зводяться до диференціальних рівнянь першого порядку.
25. Які диференціальні рівняння допускають пониження порядку?
26. Яка структура загального розв'язку лінійного диференціального рівняння другого порядку?
27. Як розв'язати лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами?
28. У чому полягає метод невизначених коефіцієнтів для знаходження частинного розв'язку лінійного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами?
29. Чи можна звести систему лінійних диференціальних рівнянь до одного диференціального рівняння?
30. Що називають особливими точками диференціальних рівнянь першого порядку? Як їх класифікують?
31. В чому полягає метод дослідження особливих точок диференціального рівняння першого порядку за допомогою матриці першого наближення?
32. Наведіть приклади застосування теорії стійкості в біологічних задачах.

#### ТИПОВЕ ЗАВДАННЯ МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ №4

1) Знайти невизначені та визначений інтеграли

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \int \left( \frac{1}{\sqrt{x-1}} + 4e^{3x} - \sin(1-5x) \right) dx, & \text{b) } & \int \frac{x^4 dx}{x^{10} + 8}, & \text{c) } & \int \frac{x^6 dx}{\sqrt[5]{(x^7 - 8)^2}}, \\
 \text{d) } & \int (2x+5)\cos x dx, & \text{e) } & \int_0^1 (2x^3 + 1)^4 x^2 dx.
 \end{aligned}$$

2) Розв'язати рівняння у повних диференціалах  $(y^3 + \cos x)dx + (3xy^2 + e^y)dy = 0$ .

3) Знайти розв'язок задачі Коші : а)  $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$ ;  $y(0) = -1$ ,

$$\text{b) } y'' - 3y' - 10y = 2e^{5x}; \quad y(0) = 2; \quad y'(0) = 5.$$

### ТИПОВІ ЗАВДАННЯ НА ЗАЛІК

1. Знайти невизначені інтеграли

a)  $\int (\sqrt{-ax+b} + \cos(b-cx)) dx$ ;    b)  $\int (x^a \ln x + cxe^{-bx^2}) dx$ .

2. Обчислити визначені інтеграли    a)  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos^b x dx$ ;    b)  $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 2ax + c}$ .

3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:  $y = x^2 + 2$ ,  $y = x + 4$ .

4. Розв'язати рівняння у повних диференціалах:  $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}\right) dx - \frac{2y}{x^3} dy = 0$ .

5. Знайти розв'язок задачі Коші: a)  $xy' - y = x^2 \cos x$ ;  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

6. Знайти і зобразити область визначення функції  $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2)$ .

7. Знайти границю:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sqrt{x^2 + (y-2)^2} + 1 - 1}{x^2 + (y-2)^2}$ .

8. Побудувати лінії рівня функції:  $z = x^2 + 4x + y^2 - 2y$ .

9. Знайти частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$  і  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  та повний диференціал  $dz$  функції

$$z = e^{x^2+3y} + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{x-y}.$$

10. Перевірити, чи виконується для даної функції вказане співвідношення:

$$z = e^x \ln(e^x + e^y), \quad \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z + e^x.$$

11. Знайти  $\operatorname{grad} u$  для функції  $u = y^2 z - 2xy^2 + z^2$  в точці  $M_0(3,1,1)$  та  $\frac{\partial u}{\partial l}$  за

напрямком вектора  $\vec{l}$ , що утворює з координатними осями кути  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ,  $\beta = \frac{\pi}{4}$ .

12. Дослідити на екстремум функцію  $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$ .

13. Методом найменших квадратів знайти параметри  $a$  та  $b$  функції  $y = ax + b$ .

$x$	1	2	3	4	5	6
$y$	1,2	1,4	2,8	2,5	2,5	4,3

**РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА:*****Основна:***

1. Вища математика: Основні означення, приклади і задачі. За ред. Кулініча Г.Л. К.: Либідь, 1992.
2. Вища математика: Підручник: У 2 кн. – 2-ге вид., - За ред. Кулініча Г.Л. К.: Либідь, 2003.
3. Шипачев В.С. Курс высшей математики. - М., 1988.
4. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. – М., Наука, Т.1-2, 1968.
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М., Наука, 1980.

***Додаткова:***

6. Гильдерман Ю.И. Лекции по высшей математике для биологов. Н., 1974.
7. С. Гроссман, Дж. Тернер, Математика для биологов. – М., ВШ, 1983.
8. Дж. Марри, Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. – Мир, 1983.