В.Я. Данілов

А.В. Єршов

С.В. Кушніренко

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

(для студентів природничих факультетів)

2012

РОЗДІЛ 1.
ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1.1. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

Розглянемо множину $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, яка містить n елементів.

Означення 1.1. Будемо казати, що множина B є ***підмножиною*** A, якщо всі елементи множини B містяться в A.

Твердження 1.1. Число усіх підмножин множини з n елементів дорівнює 2^n.

Приклад 1.1.

Розглянемо множину $A=\{1;\, 2;\, 3\}$.

Випишемо усі підмножини множини A: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1;\, 2\}$, $\{2;\, 3\}$, $\{1;\, 3\}$, $\{1;\, 2;\, 3\}$ та $\varnothing$ (порожня множина, в якій немає жодного елемента).

Як ми бачимо, число усіх підмножин множини A, яка містить 3 елементи, дорівнює $2^3=8$.

Зауваження 1.1. При записі множини, наприклад $\{1;\, 2\}$, ми використовуємо *фігурні* дужки. Це означає, що порядок елементів всередині множини є несуттєвим. Тобто, $\{1;\, 2\}$ та $\{2;\, 1\}$ – це одна й та ж множина. Якщо потрібно позначити впорядкований набір елементів, то використовують *круглі* дужки.

Твердження 1.2. Число k-елементних підмножин множини з n елементів дорівнює

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}, \tag{1.1}$$

де факторіал числа n обчислюється як добуток усіх натуральних чисел від одиниці до n: $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$.

Приклад 1.2. Знайдемо число 2-елементних підмножин множини $A=\{1;\, 2;\, 3\}$.

<u>Розв’язання.</u> Оскільки у нас $n=3$ та $k=2$, то за формулою (1.1) маємо: $C_n^k=C_3^2=\dfrac{3!}{2!(3-2)!}=\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 1}=3$.

Переконаємося, що відповідь є вірною, виписавши усі 2-елементні підмножини A: $\{1;\, 2\}$, $\{2;\, 3\}$, $\{1;\, 3\}$. Дійсно, їх три.

Твердження 1.3. Число впорядкованих k-елементних підмножин множини з n елементів дорівнює

$$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}. \tag{1.2}$$

Приклад 1.3.

Знайдемо число впорядкованих 2-елементних підмножин множини $A = \{1;\ 2;\ 3\}$.

<u>Розв'язання.</u> На відміну від прикладу 1.2, тут важливим є порядок, в якому ми записуємо елементи.

Оскільки в нашому випадку $n = 3$ та $k = 2$, то число впорядкованих 2-елементних підмножин множини A дорівнює $A_n^k = A_3^2 = \dfrac{3!}{(3-2)!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1} = 6$.

Дійсно, ось повний їх перелік:

$(1;\ 2)$, $(2;\ 1)$, $(2;\ 3)$, $(3;\ 2)$, $(1;\ 3)$, $(3;\ 1)$.

Зауважимо, що тут ми використовували круглі дужки, адже порядок елементів є суттєвим. Наприклад, $(1;\ 2)$ та $(2;\ 1)$ вважаються різними варіантами.

Твердження 1.4. Число перестановок елементів n-елементної множини дорівнює $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Приклад 1.4.

Знайдемо число перестановок елементів множини $A = \{1;\ 2;\ 3\}$.

<u>Розв'язання.</u> $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Випишемо ці перестановки:

$(1;\ 2;\ 3)$, $(1;\ 3;\ 2)$, $(2;\ 1;\ 3)$, $(2;\ 3;\ 1)$, $(3;\ 1;\ 2)$, $(3;\ 2;\ 1)$.

Справді, їх шість.

<u>КОНТРОЛЬНЕ ЗАВДАННЯ 1.</u>

Зразок розв'язання завдання 1.

Для заданої множини $A = \{a, b, c, d\}$ знайти:

а) число усіх її підмножин;
б) число 3-елементних підмножин та виписати всі такі підмножини;
в) число впорядкованих 2-елементних підмножин та виписати їх;
г) число перестановок елементів множини A.

<u>Розв'язання.</u>

а) Оскільки число елементів множини A дорівнює 4, то число усіх підмножин множини A буде $2^4 = 16$.

б) Число 3-елементних підмножин множини з 4 елементів дорівнює

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} = 4.$$

Ось їх перелік:

$$\{a,\ b,\ c\},\ \ \{a,\ b,\ d\},\ \{a,\ c,\ d\},\ \{b,\ c,\ d\}.$$

в) Число впорядкованих 2-елементних підмножин множини з 4 елементів дорівнює $A_4^2 = \dfrac{4!}{(4-2)!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 12$.

Випишемо їх:

$$(a, b),\quad (b, a),$$
$$(a, c),\quad (c, a),$$
$$(a, d),\quad (d, a),$$
$$(b, c),\quad (c, b),$$
$$(b, d),\quad (d, b),$$
$$(c, d),\quad (d, c).$$

г) Число перестановок елементів множини A дорівнює $4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$.

Варіанти завдань для самостійного виконання 1.

Варіант 1. Для заданої множини $A = \{k, l, m, n\}$ знайти:

а) число усіх її підмножин;
б) число 2-елементних підмножин та виписати всі такі підмножини;
в) число впорядкованих 3-елементних підмножин та виписати їх;
г) число перестановок елементів множини A.

Варіант 2. Для заданої множини $A = \{x, y, z\}$ знайти:

а) число усіх її підмножин та виписати їх;
б) число 1-елементних підмножин та виписати всі такі підмножини;
в) число впорядкованих 2-елементних підмножин та виписати їх;
г) число перестановок елементів множини A та виписати їх.

Варіант 3. Для заданої множини $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$ знайти:

а) число усіх її підмножин;
б) число 3-елементних підмножин та виписати всі такі підмножини;
в) число впорядкованих 3-елементних підмножин та виписати їх;
г) число перестановок елементів множини A.

Варіант 4. Для заданої множини $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ знайти:

а) число усіх її підмножин;
б) число 1-елементних підмножин та виписати всі такі підмножини;
в) число впорядкованих 2-елементних підмножин та виписати їх;
г) число перестановок елементів множини A.

Варіант 5. Для заданої множини $A = \{i, j, k\}$ знайти:

а) число усіх її підмножин та виписати їх;
б) число 2-елементних підмножин та виписати всі такі підмножини;
в) число впорядкованих 2-елементних підмножин та виписати їх;
г) число перестановок елементів множини A та виписати їх.

Варіант 6. Для заданої множини $A = \{k, l, m, n\}$ знайти:

а) число усіх її підмножин;
б) число 3-елементних підмножин та виписати всі такі підмножини;
в) число впорядкованих 3-елементних підмножин та виписати їх;
г) число перестановок елементів множини A.

Варіант 7. Для заданої множини $A = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ знайти:

а) число усіх її підмножин;

б) число 1-елементних підмножин та виписати всі такі підмножини;

в) число впорядкованих 3-елементних підмножин та виписати їх;

г) число перестановок елементів множини A.

Варіант 8. Для заданої множини $A = \{e, f, g, h\}$ знайти:

а) число усіх її підмножин;

б) число 2-елементних підмножин та виписати всі такі підмножини;

в) число впорядкованих 3-елементних підмножин та виписати їх;

г) число перестановок елементів множини A.

Варіант 9. Для заданої множини $A = \{c_1, c_2, c_3\}$ знайти:

а) число усіх її підмножин та виписати їх;

б) число 1-елементних підмножин та виписати всі такі підмножини;

в) число впорядкованих 2-елементних підмножин та виписати їх;

г) число перестановок елементів множини A та виписати їх.

Варіант 10. Для заданої множини $A = \{x, y, z, h\}$ знайти:

а) число усіх її підмножин;

б) число 2-елементних підмножин та виписати всі такі підмножини;

в) число впорядкованих 3-елементних підмножин та виписати їх;

г) число перестановок елементів множини A.

КОНТРОЛЬНЕ ЗАВДАННЯ 2.

Зразок розв’язання завдання 2.

В групі навчаються 15 студентів.

а) Скількома способами з них можна вибрати 8 студентів для участі у концерті?

б) Скількома способами можна вибрати старосту групи та його заступника?

Розв’язання.

а) Оскільки порядок вибору студентів не має значення, то шукане число способів дорівнює числу 8-елементних підмножин множини з 15 елементів, тобто

$$C_{15}^{8} = \frac{15!}{8!(15-8)!}.$$

б) В даному випадку треба знайти число впорядкованих 2-елементних підмножин множини з 15 елементів. Тут порядок вибору студентів грає роль, бо староста та його заступник – це різні посади. Отже, шукане число способів дорівнює

$$A_{15}^{2} = \frac{15!}{(15-2)!}.$$

Варіанти завдань для самостійного виконання 2.

Варіант 1. В групі навчаються 11 студентів.

а) Скількома способами з них можна вибрати 5 студентів для участі у концерті?

б) Скількома способами можна вибрати старосту групи та його заступника?

Варіант 2. В групі навчаються 12 студентів.

а) Скількома способами з них можна вибрати 7 студентів для участі у концерті?

б) Скількома способами можна вибрати старосту групи та його заступника?

Варіант 3. В групі навчаються 13 студентів.

а) Скількома способами з них можна вибрати 4 студентів для участі у концерті?

б) Скількома способами можна вибрати старосту групи та його заступника?

Варіант 4. В групі навчаються 14 студентів.

а) Скількома способами з них можна вибрати 6 студентів для участі у концерті?

б) Скількома способами можна вибрати старосту групи та його заступника?

Варіант 5. В групі навчаються 25 студентів.

а) Скількома способами з них можна вибрати 10 студентів для участі у концерті?

б) Скількома способами можна вибрати старосту групи та його заступника?

Варіант 6. В групі навчаються 16 студентів.

а) Скількома способами з них можна вибрати 7 студентів для участі у концерті?

б) Скількома способами можна вибрати старосту групи та його заступника?

Варіант 7. В групі навчаються 17 студентів.

а) Скількома способами з них можна вибрати 9 студентів для участі у концерті?

б) Скількома способами можна вибрати старосту групи та його заступника?

Варіант 8. В групі навчаються 18 студентів.

а) Скількома способами з них можна вибрати 11 студентів для участі у концерті?

б) Скількома способами можна вибрати старосту групи та його заступника?

Варіант 9. В групі навчаються 19 студентів.

а) Скількома способами з них можна вибрати 5 студентів для участі у концерті?

б) Скількома способами можна вибрати старосту групи та його заступника?

Варіант 10. В групі навчаються 20 студентів.

а) Скількома способами з них можна вибрати 7 студентів для участі у концерті?

б) Скількома способами можна вибрати старосту групи та його заступника?

1.2. КЛАСИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

Означення 1.2. Нехай стохастичний експеримент має скінченне число рівноможливих елементарних подій (різних можливих наслідків). ***Ймовірністю*** $P(A)$ події A, пов'язаної з даним експериментом, називається число

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

де m – число елементарних подій, які сприяють події A; n – число усіх елементарних подій стохастичного експерименту.

КОНТРОЛЬНЕ ЗАВДАННЯ 3.

Зразок розв'язання завдання 3.

В урні знаходяться 10 білих, 5 чорних і 15 синіх куль. Дехто виймає навмання одну кулю. Яка ймовірність, що ця куля біла? Яка ймовірність, що ця куля не є білою?

<u>Розв'язання.</u> Кожна елементарна подія відповідає одній з куль, яку виймають з урни. Оскільки ймовірності для всіх куль однакові, то ми можемо скористатися класичним означенням ймовірності. Для цього знайдемо число усіх елементарних подій n.

Всього в урні $10+5+15=30$ куль. Тому $n=30$.

Серед цих куль 10 білих. Тому $m=10$.

За класичним означенням ймовірності, ймовірність події A (яка, полягає в тому, що куля, яку дістали з урни, є білою) дорівнює

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Ймовірність протилежної події $\overline{A}$ (куля, яку дістали не є білою) дорівнює

$$P(\overline{A}) = \frac{5+15}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

Зауважимо, що останній результат можна було б отримати наступним чином:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Варіанти завдань для самостійного виконання 3.

Варіант 1. В урні знаходяться 12 білих, 5 червоних і 7 зелених куль. Дехто виймає навмання одну кулю. Яка ймовірність, що ця куля біла? Яка ймовірність, що ця куля не є білою?

Варіант 2. В коробці знаходяться 9 синіх, 6 жовтих і 12 червоних олівців. Дитина вийняла навмання один олівець. Яка ймовірність, що цей олівець синій? Яка ймовірність, що цей олівець не є синім?

Варіант 3. У коробці лежать 8 червоних, 5 зелених і 7 жовтих яблук. Дівчина дістала з коробки навмання одне яблуко. Яка ймовірність, що це яблуко зелене? Яка ймовірність, що це яблуко не є зеленим?

Варіант 4. У кошику лежать 18 бутербродів. З них: 5 бутербродів з шинкою, 7 – з ковбасою і 6 – з сиром. Турист дістав з кошику навмання один бутерброд. Яка ймовірність, що цей бутерброд – з ковбасою? Яка ймовірність, що цей бутерброд – не з ковбасою?

Варіант 5. На Новий Рік студенти влаштували безпрограшну лотерею. На листочках були написані назви призів: 15 шоколадок, 4 флешки та 1 мобільний телефон. Петро першим тягнув навмання листочок з мішка. Яка ймовірність, що він виграв флешку? Яка ймовірність, що він виграв не флешку, а інший приз?

Варіант 6. В коробці лежать льодяники: 12 м’ятних, 8 апельсинових та 11 полуничних. Хлопчик навмання виймає з коробки один льодяник. Яка ймовірність, що цей льодяник м’ятний? Яка ймовірність, що цей льодяник не м’ятний?

Варіант 7. В урні знаходяться 10 жовтих, 12 синіх і 5 зелених куль. Дехто виймає навмання одну кулю. Яка ймовірність, що ця куля жовта? Яка ймовірність, що ця куля не є жовтою?

Варіант 8. В коробці знаходяться 5 зелених, 8 жовтих і 12 червоних олівців. Дитина вийняла навмання один олівець. Яка ймовірність, що цей олівець червоний? Яка ймовірність, що цей олівець не є червоним?

Варіант 9. У коробці лежать 6 червоних, 8 зелених і 11 жовтих яблук. Дівчина дістала з коробки навмання одне яблуко. Яка ймовірність, що це яблуко червоне? Яка ймовірність, що це яблуко не червоне?

Варіант 10. В урні знаходяться 5 білих, 19 червоних і 8 зелених куль. Дехто виймає навмання одну кулю. Яка ймовірність, що ця куля зелена? Яка ймовірність, що ця куля не є зеленою?

КОНТРОЛЬНЕ ЗАВДАННЯ 4.

Зразок розв’язання завдання 4.

В ставку плавають 25 риб. З них 10 щук та 15 карасів. Дехто виловив навмання 8 риб. Яка ймовірність, що серед них 5 щук?

Розв’язання.

Скористаємося класичним означенням ймовірності. Знайдемо загальне число способів, якими з 25 риб можна вибрати 8 риб.

Воно дорівнює числу 8-елементних підмножин множини з 25 елементів, тобто $C_{25}^{8}=\dfrac{25!}{8!(25-8)!}$.

Знайдемо тепер число способів, при яких серед вибраних риб буде 5 щук. З 10 наявних щук вибрати 5 щук можна C_{10}^{5} способами. З 15 карасів вибрати 3 карася можна C_{15}^{3} способами.

За правилом множення число способів, при яких серед вибраних 8 риб буде 5 щук і 3 карася, дорівнює $C_{10}^{5}\cdot C_{15}^{3}$.

Таким чином, за класичним означенням ймовірності шукана ймовірність дорівнює

$$P(A)=\frac{C_{10}^{5}\cdot C_{15}^{3}}{C_{25}^{8}}.$$

Варіанти завдань для самостійного виконання 4.

Варіант 1. В урні лежать 20 куль. 12 з них білі, а решта – чорні. Дехто вийняв з урни навмання 7 куль. Яка ймовірність, що серед них 5 білих?

Варіант 2. В партії з 50 телевізорів 10 бракованих. Магазин закупив 18 телевізорів з цих 50-ти. Яка ймовірність, що серед них 9 бракованих?

Варіант 3. У коробці лежать 15 зелених і 20 червоних олівців. З них вибрано навмання 10 олівців. Яка ймовірність, що серед них 7 зелених?

Варіант 4. Учасник лотереї вказав у лотерейному білеті 5 чисел з 36-ти. Під час розіграшу лотереї лототрон вибрав навмання з 36-ти куль, занумерованих числами від 1 до 36, 5 куль, які вважаються виграшними. Яка ймовірність, що учасник лотереї вгадав рівно 4 з виграшних номерів.

Варіант 5. В кошику лежать 12 червоних і 7 зелених яблук. Дехто навмання дістав з кошику 5 яблук. Яка ймовірність, що серед них 3 червоні?

Варіант 6. В урні лежать 15 куль. 8 з них сині, а решта – червоні. Дехто вийняв з урни навмання 6 куль. Яка ймовірність, що серед них 4 сині?

Варіант 7. В партії зі 100 мобільних телефонів 15 бракованих. Магазин закупив 40 телефонів з цих ста. Яка ймовірність, що серед закуплених телефонів 5 бракованих?

Варіант 8. У коробці лежать 10 жовтих і 15 синіх олівців. З них вибрано навмання 8 олівців. Яка ймовірність, що серед них 6 жовтих?

Варіант 9. Учасник лотереї вказав у лотерейному білеті 6 чисел з 45-ти. Під час розіграшу лотереї лототрон вибрав навмання з 45-ти куль, занумерованих числами від 1 до 45, 6 куль, які вважаються виграшними. Яка ймовірність, що учасник лотереї вгадав рівно 3 з виграшних номерів.

Варіант 10. В кошику лежать 15 зелених і 9 жовтих яблук. Дехто навмання дістав з кошику 6 яблук. Яка ймовірність, що серед них 5 зелених?

1.3. АКСІОМАТИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

Нехай $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$ – простір елементарних подій. Розглянемо випадок, коли ймовірності елементарних подій не є обов’язково однаковими.

Припустимо, що для кожної з елементарних подій задано її ймовірність. Позначимо ймовірність події ω_1 через p_1, ймовірність події ω_2 через p_2 і так далі.

Згідно з аксіоматичним означенням ймовірностей, для того, щоб знайти ймовірність події A, треба обчислити суму ймовірностей елементарних подій ω_i, з яких складається A.

<u>КОНТРОЛЬНЕ ЗАВДАННЯ 5.</u>

Зразок розв’язання завдання 5.

Двічі підкидають несиметричну монету, для якої ймовірність появи герба становить $0,4$. Знайти ймовірність того, що при двох підкиданнях принаймні один раз з’явиться решка.

<u>Розв’язання.</u> Зрозуміло, що ймовірність випадіння решки при одному підкиданні дорівнює $0,6$. При двох підкиданнях можливі чотири результати:

$\omega_1 = ГГ$, $\omega_2 = ГР$, $\omega_3 = РГ$, $\omega_4 = РР$.

Тобто, в нашому випадку простір елементарних подій $\Omega = \{ГГ, ГР, РГ, РР\}$.

Ймовірність результату ГГ дорівнює $0,4 \cdot 0,4 = 0,16$, ймовірності ГР та РГ є однаковими і дорівнюють $0,4 \cdot 0,6 = 0,24$, ймовірність РР становить $0,6 \cdot 0,6 = 0,36$.

Запишемо ці ймовірності у таблицю.

ГГ	ГР	РГ	РР
0,16	0,24	0,24	0,36

Зверніть увагу, що сума чисел у другому рядку дорівнює 1. Дійсно, ймовірність події Ω дорівнює 1.

Наша задача – знайти ймовірність того, що при двох підкиданнях принаймні один раз з’явиться решка. Позначимо цю подію через A. Знайдемо ймовірність $P(A)$. Для цього скористаємося аксіоматичним означенням ймовірності. Події A відповідають три елементарні події: $\omega_2 = ГР$, $\omega_3 = РГ$, $\omega_4 = РР$. (Елементарна подія $\omega_1 = ГГ$ нам не підходить, бо в цьому випадку немає жодної решки.) Таким чином, за аксіоматичним означенням ймовірності:

$$P(A) = P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 0,24 + 0,24 + 0,36 = 0,84.$$

Отже, ймовірність того, що при двох підкиданнях принаймні один раз з’явиться решка дорівнює 0,84.

Зауваження 1.2. Ймовірність події A можна знайти простіше, віднявши від одиниці ймовірність протилежної події (яка полягає в тому, що решка не з'явиться жодного разу). Результат буде той самий:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\omega_1) = 1 - 0{,}16 = 0{,}84 .$$

Варіанти завдань для самостійного виконання 5.

Варіант 1. Двічі підкидають несиметричну монету, для якої ймовірність появи герба становить $0{,}3$. Знайти ймовірність того, що при двох підкиданнях принаймні один раз з'явиться решка.

Варіант 2. Двічі підкидають несиметричну монету, для якої ймовірність появи герба становить $0{,}45$. Знайти ймовірність того, що при двох підкиданнях принаймні один раз з'явиться решка.

Варіант 3. Двічі підкидають несиметричну монету, для якої ймовірність появи герба становить $0{,}25$. Знайти ймовірність того, що при двох підкиданнях принаймні один раз з'явиться решка.

Варіант 4. Двічі підкидають несиметричну монету, для якої ймовірність появи герба становить $0{,}55$. Знайти ймовірність того, що при двох підкиданнях принаймні один раз з'явиться решка.

Варіант 5. Двічі підкидають несиметричну монету, для якої ймовірність появи герба становить $0{,}6$. Знайти ймовірність того, що при двох підкиданнях принаймні один раз з'явиться решка.

Варіант 6. Двічі підкидають несиметричну монету, для якої ймовірність появи герба становить $0{,}4$. Знайти ймовірність того, що при двох підкиданнях принаймні один раз з'явиться герб.

Варіант 7. Двічі підкидають несиметричну монету, для якої ймовірність появи герба становить $0{,}3$. Знайти ймовірність того, що при двох підкиданнях принаймні один раз з'явиться герб.

Варіант 8. Двічі підкидають несиметричну монету, для якої ймовірність появи герба становить $0{,}35$. Знайти ймовірність того, що при двох підкиданнях принаймні один раз з'явиться герб.

Варіант 9. Двічі підкидають несиметричну монету, для якої ймовірність появи герба становить $0{,}6$. Знайти ймовірність того, що при двох підкиданнях принаймні один раз з'явиться герб.

Варіант 10. Двічі підкидають несиметричну монету, для якої ймовірність появи герба становить $0{,}7$. Знайти ймовірність того, що при двох підкиданнях принаймні один раз з'явиться герб.

1.4. НЕЗАЛЕЖНІ ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

Означення 1.3. Випадкові події A та B називаються ***незалежними***, якщо

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \qquad (1.3)$$

Зауваження 1.3. Незалежність подій A та B означає, що те, чи відбулася подія B, чи не відбулась, не впливає на ймовірність появи події A, і навпаки.

Приклад 1.5. Двічі підкидають гральний кубик. Нехай подія A полягає в тому, що при першому підкиданні випала одиниця, а подія B – що при другому підкиданні випала одиниця. Тоді події A та B будуть незалежними. Дійсно, $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{6}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6^2}$ (бо події $A \cap B$ відповідає тільки варіант $(1;\, 1)$), а отже,

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(B).$$

Приклад 1.6. З урни, яка містить n білих і m чорних куль двічі виймають по одній з поверненням. Нехай подія A – при першому вийманні з'явилася біла куля, подія B – при другому вийманні з'явилася біла куля. Тоді події A та B будуть незалежними.

Дійсно, $P(A) = \frac{n}{n+m}$, $P(B) = \frac{n}{n+m}$, $P(A \cap B) = \frac{n \cdot n}{(n+m) \cdot (n+m)}$, а отже,

$$P(A \cap B) = \frac{n \cdot n}{(n+m) \cdot (n+m)} = P(A) \cdot P(B).$$

Приклад 1.7. Якщо в попередньому прикладі кулі виймати без повернення, то події A та B не будуть незалежними. Дійсно, в цьому випадку $P(A) = \frac{n}{n+m}$, а ймовірність події B буде залежати від того, яку саме кулю, білу чи чорну, витягнули при першому вийманні. Якщо білу, то $P(B) = \frac{n-1}{n+m-1}$, а якщо чорну, то $P(B) = \frac{n}{n+m-1}$.

<u>КОНТРОЛЬНЕ ЗАВДАННЯ 6.</u>

Зразок розв'язання завдання 6.

Ймовірність народження хлопчика дорівнює 51%. Скільки сім'я повинна планувати дітей, щоб ймовірність того, що серед них буде хоча б один хлопчик, була не меншою, ніж 90%?

<u>Розв'язання.</u> Позначимо через A_k подію, яка полягає в тому, що k-та дитина – хлопчик. Тоді $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ – подія, яка полягає в тому, що

серед n дітей буде хоча б один хлопчик. Нам треба визначити найменше n, при якому виконується нерівність $P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right) \ge 0{,}9$. Ми будемо вважати, що події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – незалежні. Позначимо через p ймовірність події A_1. Тоді $P\left(A_1\right) = P\left(A_2\right) = \ldots = P\left(A_n\right) = p = 0{,}51$.

Для того, щоб підрахувати ймовірність $P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right)$, скористаємося спочатку такою властивістю протилежної події. Якщо $\overline{B}$ – протилежна до B подія, то $\overline{\overline{B}} = B$ (тобто, протилежна до протилежної до B події є сама подія B).

Отже, $P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right) = P\left(\overline{\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}}\right)$.

Тепер до останнього виразу застосуємо формулу: $P\left(\overline{B}\right) = 1 - P\left(B\right)$. Маємо:

$$P\left(\overline{\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}}\right) = 1 - P\left(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}\right).$$

За, так званим, правилом Де Моргана:

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}.$$

Тому

$$1 - P\left(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}\right) = 1 - P\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}\right).$$

Якщо події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – незалежні, то незалежними будуть і події $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}$. А тоді ймовірність їх перетину розпадається в добуток ймовірностей:

$$1 - P\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}\right) = 1 - P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P\left(\overline{A_2}\right) \cdot \ldots \cdot P\left(\overline{A_n}\right) =$$
$$= 1 - \left(1 - P\left(A_1\right)\right) \cdot \left(1 - P\left(A_2\right)\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - P\left(A_n\right)\right) =$$
$$= 1 - (1-p) \cdot (1-p) \cdot \ldots \cdot (1-p) = 1 - (1-p)^n.$$

Отже, ми показали, що ймовірність того, що серед n дітей буде хоча б один хлопчик, дорівнює

$$P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right) = 1 - (1-p)^n,$$

де p – ймовірність народження хлопчика.

За умовою задачі, має виконуватися нерівність $1 - (1-p)^n \ge 0{,}9$, або, що те саме, $(1-p)^n \le 0{,}1$.

Для того, щоб виразити звідси n, візьмемо натуральний логарифм від обох частин рівності. Оскільки логарифмічна функція строго монотонно зростає, то нерівність при цьому збереже свою силу:

$$\ln(1-p)^n \le \ln 0{,}1.$$

За відомою властивістю логарифма, $\ln a^b = b \ln a$. Тому маємо

$$n \ln(1-p) \le \ln 0{,}1.$$

Поділимо обидві частини рівності на $\ln(1-p)$. Оскільки цей вираз менший за нуль, то нерівність зміниться на протилежну:

$$n \ge \frac{\ln 0,1}{\ln(1-p)}. \tag{1.4}$$

Таким чином, наша задача звелася до наступної: знайти найменше ціле n, для якого виконується нерівність (1.4). Підставимо $p = 0,51$ і зробимо відповідні обчислення:

$$n \ge \frac{\ln 0,1}{\ln(1-0,51)}, \text{ або, } n \ge \frac{\ln 0,1}{\ln 0,49}.$$

Підрахуємо наближено $\dfrac{\ln 0,1}{\ln 0,49} \approx \dfrac{-2,303}{-0,713} \approx 3,23$.

Найменше ціле n, для якого виконується нерівність $n \ge 3,23$, це число $n = 4$.

Отже, сім'я повинна планувати мати не менше 4 дітей, щоб ймовірність того, що серед них був хоча б один хлопчик, була не меншою, ніж 90%.

Варіанти завдань для самостійного виконання 6.

В наступних задачах припускається незалежність відповідних подій.

Варіант 1. З колоди, що містить 52 карти, навмання виймаються карти з поверненням. Скільки разів треба виймати карти з колоди, щоб ймовірність того, що хоча б один раз з'явиться туз, була не меншою, ніж 95%?

Варіант 2. Радіолокаційна станція за один оберт антени виявляє об'єкт з ймовірністю 60%. Скільки обертів антени треба здійснити, щоб ймовірність виявлення об'єкту (хоча б на одному з обертів), була не меншою, ніж 85%?

Варіант 3. Ймовірність влучити в «десятку» при одному пострілі дорівнює 30%. Скільки пострілів треба здійснити, щоб ймовірність влучення в «десятку» хоча б один раз, була не меншою, ніж 70%,

Варіант 4. Ймовірність браку при виготовленні однієї мікросхеми дорівнює 20%. Скільки мікросхем треба виготовити, щоб ймовірність того, що серед них є хоча б одна бракована, була не меншою, ніж 75%.

Варіант 5. Ймовірність того, що автомобіль, який проїхав на червоне світло, потрапить у дорожньо-транспортну пригоду, становить 2%. Скільки разів треба проїхати на червоне світло, щоб потрапити у ДТП хоча б один раз з ймовірністю, не меншою, ніж 50%?

Варіант 6. Ймовірність виграти у лотерею, становить 5%. Скільки разів треба зіграти в лотерею, щоб виграти хоча б один раз з ймовірністю, не меншою, ніж 70%?

Варіант 7. Ймовірність зустріти знайому людину під час поїздки у метро дорівнює 7%. Скільки разів треба проїхати у метро, щоб зустріти хоча б один раз знайому людину з ймовірністю, не меншою, ніж 80%?

Варіант 8. Баскетболіст влучає у кошик з триочкової дистанції з ймовірністю 25%. Скільки разів йому треба здійснити триочковий кидок, щоб влучити хоча б один раз з ймовірністю, не меншою, ніж 55%?

Варіант 9. Ймовірність «страйку» в результаті одного кидка при грі в боулінг дорівнює 15%. Скільки разів треба здійснити кидок, щоб отримати хоча б один «страйк» з ймовірністю, не меншою, ніж 85%?

Варіант 10. В урні міститься 20 куль, серед яких одна мічена. Скільки разів треба здійснити виймання кулі з поверненням, щоб вийняти мічену кулю хоча б один раз з ймовірністю, не меншою, ніж 75%?

1.5. ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Розглянемо простір елементарних подій Ω, випадкові події $A, B, \ldots$ (підмножини Ω), для кожної з яких можна визначити ймовірності $P(A), P(B), \ldots$.

Означення 1.4. ***Випадковою величиною*** називають числову функцію $\xi(\omega)$, яка визначена на просторі елементарних подій Ω, і така, що для кожного дійсного x існує ймовірність $P\{\xi(\omega) < x\}$.

Зауваження 1.4. Найчастіше замість $\xi(\omega)$ пишуть просто ξ для скорочення запису.

Зауваження 1.5. Випадкові величини позначають або грецькими літерами: ξ (ксі), ζ (дзета), η (ета) і так далі, або ж великими латинськими: X, Y, Z і так далі.

Означення 1.5. Випадкову величину ξ називають **дискретною**, якщо вона набуває скінченне ($X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$) або злічене ($X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$) число різних значень.

Найчастіше дискретну випадкову величину описують не за допомогою явної залежності від аргумента ω (в багатьох ситуаціях це або важко, або неможливо), а вказуючи ймовірності, з якими випадкова величина приймає ті чи інші свої значення.

Означення 1.6. ***Законом розподілу*** дискретної випадкової величини ξ називають сукупність усіх можливих її значень x_k разом з ймовірностями $p_k = P\{\xi = x_k\}$ для кожного $k \geq 1$.

Закон розподілу зручно подавати у вигляді таблиці:

ξ	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
P	p_1	p_1	$\ldots$	p_n	$\ldots$

Сума ймовірностей у другому рядку має завжди дорівнювати 1.

Приклад 1.8. Один раз підкидають гральний кубик. Нехай ξ – число шісток, що з'явилися на верхній грані. Знайти закон розподілу ξ .

Розв'язання. При одному підкиданні шістка може з'явитися один раз або не з'явитися взагалі. Відповідно, випадкова величина ξ може прийняти значення 1 (якщо випала шістка), або 0 (якщо випала не шістка). Якщо не випала шістка, то можливі 5 різних результатів: 1, 2, 3, 4, 5. Всього ж варіантів 6. Тому за класичним означенням ймовірностей, закон розподілу випадкової величини ξ:

$$p_1 = P\{\xi = 0\} = \frac{5}{6},\ \ p_2 = P\{\xi = 1\} = \frac{1}{6}.$$

Або, в табличному вигляді:

ξ	0	1
P	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Приклад 1.9. Двічі підкидають гральний кубик. Нехай ζ – число шісток, що з'явилися. Знайти закон розподілу ζ.

Розв'язання. При двох підкиданнях шістка може з'явитися нуль разів, або один раз, або два рази.

Ймовірність того, що не буде жодної шістки можна знайти за класичним означенням ймовірностей. Всього існує 36 можливих результатів при двох підкиданнях кубиків. Якщо при першому підкиданні випала не шістка, то для цього можливі 5 різних результатів: 1, 2, 3, 4, 5. Так само, при другому підкиданні є 5 можливих результатів. За правилом множення, всього маємо $5 \cdot 5 = 25$ результатів без жодної шістки. Таким чином, $p_1 = P\{\zeta = 0\} = \frac{25}{36}$.

Розглянемо випадок, коли при двох підкиданнях випала рівно одна шістка. Це могло статися при першому підкиданні (тоді маємо 5 можливих результатів: (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)), або при другому підкиданні (також 5 можливих результатів: (1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6)).

Для появи двох шісток маємо лише одну можливу елементарну подію: (6, 6).

Зібравши цю інформацію у таблицю, отримаємо закон розподілу випадкової величини ζ:

ζ	0	1	2
P	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

КОНТРОЛЬНЕ ЗАВДАННЯ 7.

Зразок розв'язання завдання 7.

З колоди в 36 карт вийняли навмання 3 карти. Нехай ξ – число тузів серед цих карт. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ.

Розв’язання. Дискретна випадкова величина ξ може прийняти одне з чотирьох різних значень: 0, 1, 2 або 3. Знайдемо ймовірність кожного з цих значень.

Загальне число способів вибрати з колоди 3 карти дорівнює C_{36}^3. (Карти ми вважаємо різними, порядок вибору карт з колоди не має значення.)

Число способів вибрати з колоди 3 карти так, щоб серед них не було тузів, дорівнює C_{32}^3 (якщо з колоди прибрати тузи, то залишаться 32 карти).

Таким чином, ймовірність того, що ξ дорівнює 0, становить $\dfrac{C_{32}^3}{C_{36}^3}$.

Число способів вибрати з колоди 3 карти так, щоб серед них був рівно один туз, дорівнює $C_4^1 \cdot C_{32}^2$. Дійсно, вибрати один туз з чотирьох можна C_4^1 способами, а з не-тузів, яких 32, вибрати ще 2 карти можна C_{32}^2 способами. Відповідна ймовірність: $\dfrac{C_4^1 \cdot C_{32}^2}{C_{36}^3}$.

Аналогічно, ймовірність, що серед вибраних карт є рівно 2 тузи дорівнює $\dfrac{C_4^2 \cdot C_{32}^1}{C_{36}^3}$, а ймовірність дістати 3 тузи становить $\dfrac{C_4^3}{C_{36}^3}$.

Отже, $$P\{\xi = 0\} = \frac{C_{32}^3}{C_{36}^3} = \frac{\dfrac{32!}{3!\cdot(32-3)!}}{\dfrac{36!}{3!\cdot(36-3)!}} = \frac{4960}{7140} \approx 0,69468,$$

$$P\{\xi = 1\} = \frac{C_4^1 \cdot C_{32}^2}{C_{36}^3} = \frac{4 \cdot 496}{7140} \approx 0,27787,$$

$$P\{\xi = 2\} = \frac{C_4^2 \cdot C_{32}^1}{C_{36}^3} = \frac{6 \cdot 32}{7140} \approx 0,02689,$$

$$P\{\xi = 3\} = \frac{C_4^3}{C_{36}^3} = \frac{4}{7140} \approx 0,00056.$$

В табличному вигляді закон розподілу випадкової величини ξ можемо записати наступним чином:

ξ	0	1	2	3
P	$\dfrac{C_{32}^3}{C_{36}^3}$	$\dfrac{C_4^1 \cdot C_{32}^2}{C_{36}^3}$	$\dfrac{C_4^2 \cdot C_{32}^1}{C_{36}^3}$	$\dfrac{C_4^3}{C_{36}^3}$

Або, наближено:

ξ	0	1	2	3
P	0,69468	0,27787	0,02689	0,00056

Варіанти завдань для самостійного виконання 7.

Варіант 1. З колоди в 36 карт вийняли навмання 4 карти. Нехай ξ – число королів серед цих карт. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ і записати його в табличній формі.

Варіант 2. З колоди в 52 карти вийняли навмання 3 карти. Нехай ζ – число дев'яток серед цих карт. Знайти закон розподілу випадкової величини ζ і записати його в табличній формі.

Варіант 3. З колоди в 36 карт вийняли навмання 4 карти. Нехай ξ – число шісток серед цих карт. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ і записати його в табличній формі.

Варіант 4. З колоди в 52 карти вийняли навмання 4 карти. Нехай η – число десяток серед цих карт. Знайти закон розподілу випадкової величини η і записати його в табличній формі.

Варіант 5. З колоди в 36 карт вийняли навмання 4 карти. Нехай ξ – число валетів серед цих карт. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ і записати його в табличній формі.

Варіант 6. З колоди в 52 карти вийняли навмання 3 карти. Нехай ζ – число дам серед цих карт. Знайти закон розподілу випадкової величини ζ і записати його в табличній формі.

Варіант 7. З колоди в 36 карт вийняли навмання 4 карти. Нехай ξ – число вісімок серед цих карт. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ і записати його в табличній формі.

Варіант 8. З колоди в 52 карти вийняли навмання 4 карти. Нехай η – число сімок серед цих карт. Знайти закон розподілу випадкової величини η і записати його в табличній формі.

Варіант 9. З колоди в 36 карт вийняли навмання 4 карти. Нехай ξ – число десяток серед цих карт. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ і записати його в табличній формі.

Варіант 10. З колоди в 52 карти вийняли навмання 3 карти. Нехай ζ – число шісток серед цих карт. Знайти закон розподілу випадкової величини ζ і записати його в табличній формі.

1.6. МАТЕМАТИЧНЕ СПОДІВАННЯ ТА ДИСПЕРСІЯ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Математичне сподівання та дисперсія є найважливішими числовими характеристиками розподілу випадкових величин.

Означення 1.7. Нехай ξ – дискретна випадкова величина, яка набуває значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з ймовірностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Тоді її ***математичним сподіванням*** $E\xi$ називають число (сталу)

$$E\xi = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k . \qquad (1.5)$$

Зауваження 1.6. У випадку, коли ξ приймає зліченне число значень $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ з ймовірностями, відповідно, $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$, математичне сподівання обчислюється за аналогічною формулою:

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k , \qquad (1.6)$$

але в цьому випадку не завжди математичне сподівання існує.

Математичне сподівання – це середнє значення випадкової величини.

Означення 1.8. ***Дисперсією*** $D\xi$ випадкової величини ξ називають число, яке визначається рівністю

$$D\xi = E\left(\xi - E\xi\right)^2 . \qquad (1.7)$$

Дисперсія характеризує розсіювання (або, розкид) значень навколо середнього значення. Чим більша дисперсія, тим більше значення випадкової величини відхиляються від математичного сподівання.

Зауваження 1.7. Якщо розкрити дужки в правій частині рівності (1.7), то можна отримати іншу формулу для обчислення дисперсії:

$$D\xi = E\xi^2 - \left(E\xi\right)^2 , \qquad (1.8)$$

яка у певних випадках є більш зручною при застосуванні.

Для того, щоб обчислити $E\xi^2$ (тобто, так званий, другий момент випадкової величини ξ) у формулі (1.8), можна скористатися формулою:

$$E\xi^2 = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \ldots + x_n^2 p_n = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k . \qquad (1.9)$$

Приклад 1.10. Один раз підкидають гральний кубик. Нехай ξ – число очок, що з'явилися. Знайти математичне сподівання та дисперсію ξ.

<u>Розв'язання.</u> Закон розподілу дискретної випадкової величини ξ буде наступним:

ξ	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Математичне сподівання:

$$E\xi = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 + x_5 p_5 + x_6 p_6 =$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\left(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6\right) =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 21 = \frac{7}{2} = 3,5 .$$

Таким чином, при одному підкиданні кубика випадає в середньому 3,5 очок. Зверніть увагу, що при одному підкиданні не може випасти 3,5 очок.

Математичне сподівання – це не обов'язково те значення, яке найчастіше з'являється при проведенні експерименту. Математичне сподівання – це середнє значення.

Для того, щоб обчислити дисперсію, скористаємося формулою (1.8). Для цього знайдемо спочатку другий момент випадкової величини ξ. За формулою (1.9) маємо:

$$E\xi^2 = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 + x_4^2 p_4 + x_5^2 p_5 + x_6^2 p_6 =$$
$$= 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} =$$
$$= \frac{1}{6}\left(1+4+9+16+25+36\right) = \frac{91}{6}.$$

Тепер, згідно з формулою (1.8), дисперсія ξ:

$$D\xi = E\xi^2 - \left(E\xi\right)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{182-147}{12} = \frac{35}{12} \approx 2,9167.$$

КОНТРОЛЬНЕ ЗАВДАННЯ 8.

Зразок розв'язання завдання 8.

Двічі підкидають несиметричну монету, для якої ймовірність появи герба становить $0,4$. Нехай ξ – число гербів при двох підкиданнях. Знайти закон розподілу, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ.

Розв'язання. Розв'язуючи приклад в контрольному завданні 5, ми знайшли ймовірності для усіх можливих елементарних подій:

ГГ	ГР	РГ	РР
0,16	0,24	0,24	0,36

При двох підкиданнях монети герб може не з'явитися жодного разу, з'явитися один раз, або ж з'явитися два рази. Тому множиною можливих значень випадкової величини ξ буде $X = \{0,1,2\}$.

Герб не з'явиться жодного разу, якщо при обох підкиданнях з'явиться решка. Ймовірність цього, згідно з таблицею, дорівнює 0,36.

Герб з'явиться рівно один раз у випадках ГР та РГ. Ймовірність цього дорівнює $0,24+0,24=0,48$.

І, нарешті, герб з'явиться два рази з ймовірністю 0,16.

Запишемо закон розподілу числа гербів при двох підкиданнях (тобто, закон розподілу випадкової величини ξ) у вигляді таблиці.

ξ	0	1	2
P	0,36	0,48	0,16

Таблиця і справді задає закон розподілу, бо сума чисел у другому рядку дорівнює одиниці.

Знайдемо математичне сподівання випадкової величини ξ. За формулою (1.5),

$$E\xi = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = 0 \cdot 0,36 + 1 \cdot 0,48 + 2 \cdot 0,16 = 0 + 0,48 + 0,32 = 0,8.$$

Отже, при двох підкиданнях в середньому герб з'явиться 0,8 разів. Тобто, менше одного разу. І це природно, бо ймовірність випадіння герба дорівнює 0,4, що менше, ніж 0,5. Якби ймовірність випадіння герба була 0,5, то в середньому при двох підкиданнях герб з'являвся би 1 раз.

Для обчислення дисперсії скористаємося формулою (1.8).

Але спочатку за формулою (1.9) знайдемо другий момент:

$$E\xi^2 = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 = 0^2 \cdot 0,36 + 1^2 \cdot 0,48 + 2^2 \cdot 0,16 =$$
$$= 0 + 0,48 + 0,64 = 1,12.$$

Підставляючи у формулу (1.8):

$$D\xi = E\xi^2 - \left(E\xi\right)^2 = 1,12 - \left(0,8\right)^2 = 0,48.$$

Варіанти завдань для самостійного виконання 8.

Варіант 1. Двічі підкидають несиметричну монету, для якої ймовірність появи герба становить $0,3$. Нехай ξ – число гербів при двох підкиданнях. Знайти закон розподілу, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ.

Варіант 2. Двічі підкидають несиметричну монету, для якої ймовірність появи герба становить $0,45$. Нехай ζ – число решок при двох підкиданнях. Знайти закон розподілу, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ζ.

Варіант 3. Двічі підкидають несиметричну монету, для якої ймовірність появи герба становить $0,25$. Нехай ξ – число гербів при двох підкиданнях. Знайти закон розподілу, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ.

Варіант 4. Двічі підкидають несиметричну монету, для якої ймовірність появи герба становить $0,55$. Нехай ζ – число решок при двох підкиданнях. Знайти закон розподілу, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ζ.

Варіант 5. Двічі підкидають несиметричну монету, для якої ймовірність появи герба становить $0,6$. Нехай ξ – число гербів при двох підкиданнях. Знайти закон розподілу, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ.

Варіант 6. Двічі підкидають несиметричну монету, для якої ймовірність появи герба становить $0,4$. Нехай ζ – число решок при двох підкиданнях. Знайти закон розподілу, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ζ.

Варіант 7. Двічі підкидають несиметричну монету, для якої ймовірність появи герба становить $0,3$. Нехай ξ – число гербів при двох підкиданнях. Знайти закон розподілу, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ.

Варіант 8. Двічі підкидають несиметричну монету, для якої ймовірність появи герба становить $0,35$. Нехай ζ – число решок при двох підкиданнях. Знайти закон розподілу, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ζ.

Варіант 9. Двічі підкидають несиметричну монету, для якої ймовірність появи герба становить $0,6$. Нехай ξ – число гербів при двох підкиданнях. Знайти закон розподілу, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ.

Варіант 10. Двічі підкидають несиметричну монету, для якої ймовірність появи герба становить $0,7$. Нехай ζ – число решок при двох підкиданнях. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ζ.

1.7. БІНОМІАЛЬНИЙ РОЗПОДІЛ

Означення 1.9. Випадкова величина ξ, яка набуває значень $0, 1, 2, \ldots, n$, має ***біноміальний розподіл*** із параметрами n та p, де $0 < p < 1$, якщо

$$P\{\xi = k\} = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

для всіх $0 \le k \le n$.

Таку випадкову величину ξ можна інтерпретувати як число появ успіху при n незалежних випробуваннях з ймовірністю успіху p при кожному випробуванні.

Твердження 1.5. Математичне сподівання та дисперсія біноміально розподіленої випадкової величини ξ з параметрами n та p дорівнюють, відповідно:

$$E\xi = np, \tag{1.10}$$

$$D\xi = np(1-p). \tag{1.11}$$

Приклад 1.11. Баскетболіст виконує 10 штрафних кидків. Ймовірність влучання при одному кидку дорівнює 0,8. Нехай ξ – число влучань при 10 кидках. Знайти закон розподілу ξ, математичне сподівання, дисперсію ξ та найбільш ймовірне число влучань.

Розв'язання. Будемо вважати, що при одному кидку відбувся успіх (У), якщо баскетболіст влучив. Інакше – невдача (Н).

Якщо при 10 кидках відбулося, скажімо, 8 влучань, то можливими наслідками є, наприклад, УУУУУУУУНН, УУУУУУУННУ, НУУНУУУУУУ і так далі. Ймовірність кожного з таких результатів буде $(0,8)^8 \cdot (1-0,8)^2$. Всього таких послідовностей з восьми літер У та двох літер Н буде C_{10}^{8}. Дійсно, з десяти позицій треба вибрати 8 позицій, де будуть стояти літери У. На решті позицій будуть стояти літери Н. Таким чином, ймовірність того, що при 10 кидках буде 8 влучань, дорівнює $C_{10}^{8}\cdot(0,8)^{8}\cdot(1-0,8)^{2}$.

Узагальнюючи, ймовірність того, що при 10 кидках буде k влучань, дорівнює $C_{10}^{k}\cdot(0,8)^{k}\cdot(1-0,8)^{10-k}$.

Таким чином, випадкова величина ξ має біноміальний розподіл з параметрами $n=10$ та $p=0,8$:

$$P\{\xi=k\}=C_{10}^{k}\cdot 0,8^{k}\cdot(1-0,8)^{10-k},$$

де $0\le k\le 10$.

Зробивши відповідні розрахунки для кожного $0\le k\le 10$, отримаємо закон розподілу ймовірностей для ξ:

ξ	0	1	2	3	4
P	0,0000001	0,0000041	0,0000737	0,0007864	0,0055050

5	6	7	8	9	10
0,0264241	0,0880804	0,2013266	0,3019899	0,2684355	0,1073742

За формулами (1.10) та (1.11),

$$E\xi=np=10\cdot 0,8=8,$$
$$D\xi=np(1-p)=10\cdot 0,8\cdot 0,2=1,6.$$

Згідно з таблицею, найбільш ймовірне число влучань дорівнює 8, що в даному випадку співпадає з математичним сподіванням.

<u>КОНТРОЛЬНЕ ЗАВДАННЯ 9.</u>

Зразок розв'язання завдання 9.

Ймовірність того, що в сім'ї народиться хлопчик становить 0,55. Нехай ξ – число хлопчиків в сім'ї, яка має 5 дітей. Знайти закон розподілу ξ, математичне сподівання, дисперсію ξ та найбільш ймовірне число хлопчиків в сім'ї.

<u>Розв'язання.</u> Будемо вважати, наприклад, що народження хлопчика є успіхом (У), а народження дівчинки – невдачею (Н). Тоді випадкова величина ξ має біноміальний розподіл з параметрами $n=5$ та $p=0,55$:

$$P\{\xi=k\}=C_{5}^{k}\cdot(0,55)^{k}\cdot(1-0,55)^{5-k},$$

де $0\le k\le 5$.

Підрахуємо ці ймовірності для кожного $0\le k\le 5$ і запишемо закон розподілу у табличному вигляді:

ξ	0	1	2	3	4	5
P	0,018	0,113	0,276	0,337	0,206	0,050

За формулою (1.10):

$$E\xi = np = 5 \cdot 0,55 = 2,75,$$

що означає, що в середньому в сім'ї , в якій 5 дітей, буде 2,75 хлопчиків.

За формулою (1.11) знайдемо дисперсію:

$$D\xi = np(1-p) = 5 \cdot 0,55 \cdot 0,45 = 1,2375.$$

Згідно з таблицею, найбільш ймовірне число хлопчиків в сім'ї дорівнює 3. Зверніть увагу, що в цьому прикладі математичне сподівання не співпадає з найбільш ймовірним значенням випадкової величини.

Варіанти завдань для самостійного виконання 9.

Варіант 1. Ймовірність того, що в сім'ї народиться хлопчик становить 0,52. Нехай ξ – число хлопчиків в сім'ї, яка має 4 дітей. Знайти закон розподілу ξ, математичне сподівання, дисперсію ξ та найбільш ймовірне число хлопчиків в сім'ї.

Варіант 2. Ймовірність того, що в сім'ї народиться дівчинка становить 0,47. Нехай ξ – число дівчинок в сім'ї, яка має 4 дітей. Знайти закон розподілу ξ, математичне сподівання, дисперсію ξ та найбільш ймовірне число дівчинок в сім'ї.

Варіант 3. Ймовірність того, що в сім'ї народиться хлопчик становить 0,51. Нехай ξ – число хлопчиків в сім'ї, яка має 4 дітей. Знайти закон розподілу ξ, математичне сподівання, дисперсію ξ та найбільш ймовірне число хлопчиків в сім'ї.

Варіант 4. Ймовірність того, що в сім'ї народиться дівчинка становить 0,46. Нехай ξ – число дівчинок в сім'ї, яка має 4 дітей. Знайти закон розподілу ξ, математичне сподівання, дисперсію ξ та найбільш ймовірне число дівчинок в сім'ї.

Варіант 5. Ймовірність того, що в сім'ї народиться хлопчик становить 0,54. Нехай ξ – число хлопчиків в сім'ї, яка має 4 дітей. Знайти закон розподілу ξ, математичне сподівання, дисперсію ξ та найбільш ймовірне число хлопчиків в сім'ї.

Варіант 6. Ймовірність того, що в сім'ї народиться дівчинка становить 0,48. Нехай ξ – число дівчинок в сім'ї, яка має 4 дітей. Знайти закон розподілу ξ, математичне сподівання, дисперсію ξ та найбільш ймовірне число дівчинок в сім'ї.

Варіант 7. Ймовірність того, що в сім'ї народиться хлопчик становить 0,58. Нехай ξ – число хлопчиків в сім'ї, яка має 4 дітей. Знайти закон розподілу ξ, математичне сподівання, дисперсію ξ та найбільш ймовірне число хлопчиків в сім'ї.

Варіант 8. Ймовірність того, що в сім'ї народиться дівчинка становить 0,44. Нехай ξ – число дівчинок в сім'ї, яка має 4 дітей. Знайти закон розподілу ξ, математичне сподівання, дисперсію ξ та найбільш ймовірне число дівчинок в сім'ї.

Варіант 9. Ймовірність того, що в сім'ї народиться хлопчик становить 0,53. Нехай ξ – число хлопчиків в сім'ї, яка має 4 дітей. Знайти закон розподілу ξ, математичне сподівання, дисперсію ξ та найбільш ймовірне число хлопчиків в сім'ї.

Варіант 10. Ймовірність того, що в сім'ї народиться дівчинка становить 0,49. Нехай ξ – число дівчинок в сім'ї, яка має 4 дітей. Знайти закон розподілу ξ, математичне сподівання, дисперсію ξ та найбільш ймовірне число дівчинок в сім'ї.

1.8. ГЕОМЕТРИЧНИЙ РОЗПОДІЛ

Означення 1.10. Випадкова величина ξ, яка набуває значень $0,1,2,\ldots,n,\ldots$, має ***геометричний розподіл*** із параметром p, де $0<p<1$, якщо

$$P\{\xi=n\}=(1-p)^{n-1}\cdot p \tag{1.12}$$

для всіх $k\geq 1$.

Таку випадкову величину ξ можна інтерпретувати як число випробувань до першої появи успіху в схемі з незалежними випробуваннями з ймовірністю успіху p при кожному випробуванні.

Твердження 1.6. Математичне сподівання та дисперсія геометрично розподіленої випадкової величини ξ з параметром p дорівнюють, відповідно:

$$E\xi=\frac{1}{p}, \tag{1.13}$$

$$D\xi=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}. \tag{1.14}$$

<u>КОНТРОЛЬНЕ ЗАВДАННЯ 10.</u>

Зразок розв'язання завдання 10.

Гральний кубик підкидають доти, доки не випаде шістка. Нехай ξ – число підкидань до першої появи шістки. Знайти закон розподілу ξ, математичне сподівання ξ, дисперсію ξ, стандартне відхилення ξ та ймовірність $P\{\xi>10\}$.

<u>Розв'язання.</u> Підкидаючи кубик, ми проводимо незалежні випробування, при кожному з яких може з'явитися шістка (з ймовірністю $\frac{1}{6}$), або якесь інше число (з ймовірністю $\frac{5}{6}$).

Таким чином, якщо вважати появу шістки успіхом, то випадкова величина ξ має геометричний розподіл з параметром $p=\frac{1}{6}$.

Закон розподілу ξ, за формулою (1.12), буде мати вигляд:

$$P\{\xi=n\}=\left(1-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}.$$

Дійсно, те, що $\xi=n$, означає, що було здійснено n підкидань до першої появи шістки. При першому була невдача (ймовірність цього дорівнює $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$), при другому – також невдача (ймовірність цього дорівнює $\frac{5}{6}$), і так далі; при $(n-1)$-му підкиданні – теж невдача (ймовірність цього дорівнює $\frac{5}{6}$), а при n-му підкиданні – успіх (з ймовірністю $\frac{1}{6}$). Оскільки результати при різних підкиданнях – незалежні, то маємо добуток ймовірностей:

$$P\{\xi=n\}=\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{1}{6}=\left(1-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}.$$

За формулою (1.13) математичне сподівання ξ буде дорівнювати:

$$E\xi=\frac{1}{p}=\frac{1}{1/6}=6.$$

Дійсно, в середньому треба шість разів підкинути кубик до першої появи шістки.

Дисперсія ξ, за формулою (1.14):

$$D\xi=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}=\frac{1}{(1/6)^2}-\frac{1}{1/6}=36-6=30.$$

Стандартне відхилення випадкової величини ξ дорівнює квадратному кореню з дисперсії ξ:

$$\sigma_\xi=\sqrt{D\xi}=\sqrt{30}\approx 5{,}477.$$

Знайдемо тепер ймовірність того, що значення випадкової величини ξ перевищить число 10. Це можливо, коли ξ дорівнює 11, або 12, або 13, і так далі. Маємо:

$$P\{\xi>10\}=P\{\xi=11\}+P\{\xi=12\}+P\{\xi=13\}+\ldots=\sum_{n=11}^{+\infty}P\{\xi=n\}=$$

$$= \sum_{n=11}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{n=11}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.$$

Послідовність чисел $\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ при $n \geq 11$ утворює геометричну прогресію. Сума членів нескінченно спадної геометричної прогресії обчислюється за формулою

$$S = \frac{b_1}{1-q},$$

де b_1 – перший член прогресії, а q – знаменник прогресії.

У нас перший член прогресії буде $\left(\frac{5}{6}\right)^{11-1} = \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$, а знаменник дорівнює $\frac{5}{6}$. Дійсно, кожний наступний елемент прогресії дорівнює попередньому, домноженому на $\frac{5}{6}$.

Тому

$$P\{\xi > 10\} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{n=11}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{(5/6)^{10}}{1-5/6} = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0{,}162.$$

Таким чином, ймовірність того, що вперше шістка з’явиться не раніше 11-го підкидання, дорівнює приблизно 16,2%.

Варіанти завдань для самостійного виконання 10.

Варіант 1. В урні містяться 9 білих і одна чорна куля. Дехто виймає по одній кулі з поверненням доти, доки не з’явиться чорна куля. Нехай ξ – число виймань до першої появи чорної кулі (включаючи останню спробу). Знайти закон розподілу ξ, математичне сподівання ξ, дисперсію ξ, стандартне відхилення ξ та ймовірність $P\{\xi > 4\}$.

Варіант 2. Ймовірність того, що лампочка перегорить впродовж кожної окремої доби, дорівнює $0{,}8\%$. Нехай ξ – число діб, яке пройде до того, як лампочка перегорить (включаючи останню добу). Знайти закон розподілу ξ, математичне сподівання ξ, дисперсію ξ, стандартне відхилення ξ та ймовірність $P\{\xi > 50\}$.

Варіант 3. Ймовірність того, що під час буріння свердловини буде знайдена нафта, дорівнює 3%. Нехай ξ – число свердловин, яке треба пробурити до першої появи нафти (включаючи останню, успішну, спробу).

Знайти закон розподілу ξ, математичне сподівання ξ, дисперсію ξ, стандартне відхилення ξ та ймовірність $P\{\xi > 20\}$.

Варіант 4. Ймовірність зустріти знайомого під час поїздки у метро дорівнює 2%. Нехай ξ – число поїздок до першої зустрічі зі знайомим (включаючи останню поїздку). Знайти закон розподілу ξ, математичне сподівання ξ, дисперсію ξ, стандартне відхилення ξ та ймовірність $P\{\xi > 25\}$.

Варіант 5. У лабораторії розводять мишей для проведення дослідів Ймовірність народження миші-альбіноса дорівнює 2,5%. Нехай ξ – число мишей, які народилися до першої появи миші-альбіноса (включаючи самого альбіноса). Знайти закон розподілу ξ, математичне сподівання ξ, дисперсію ξ, стандартне відхилення ξ та ймовірність $P\{\xi > 20\}$.

Варіант 6. Ймовірність виграти туристичну подорож при купівлі акційного товару дорівнює 2%. Нехай ξ – число придбаних одиниць товару до першого виграшу (включаючи останній куплений товар). Знайти закон розподілу ξ, математичне сподівання ξ, дисперсію ξ, стандартне відхилення ξ та ймовірність $P\{\xi > 30\}$.

Варіант 7. Ймовірність того, що свердло зламається при свердлінні отвору дорівнює 12%. Нехай ξ – число отворів, зроблених до того, як зламалося свердло (включаючи останній отвір). Знайти закон розподілу ξ, математичне сподівання ξ, дисперсію ξ, стандартне відхилення ξ та ймовірність $P\{\xi > 10\}$.

Варіант 8. Ймовірність виграти джек-пот при грі на гральному автоматі дорівнює 0,4%. Нехай ξ – число спроб до першого виграшу джек-поту (включаючи останню спробу). Знайти закон розподілу ξ, математичне сподівання ξ, дисперсію ξ, стандартне відхилення ξ та ймовірність $P\{\xi > 100\}$.

Варіант 9. Ймовірність того, що при пострілі з пістолету відбудеться осічка, дорівнює 3%. Нехай ξ – число здійснених пострілів до першої осічки (включаючи останній постріл). Знайти закон розподілу ξ, математичне сподівання ξ, дисперсію ξ, стандартне відхилення ξ та ймовірність $P\{\xi > 16\}$.

Варіант 10. В колоді 36 карт. Дехто виймає з колоди по одній карті з поверненням. Нехай ξ – число виймань до першої появи туза (включаючи останнє виймання). Знайти закон розподілу ξ, математичне сподівання ξ, дисперсію ξ, стандартне відхилення ξ та ймовірність $P\{\xi > 20\}$.

1.9. НЕПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Означення 1.11. ***Функцією розподілу*** випадкової величини ξ називають функцію, що задається наступним співвідношенням:

$$F(x) = P(\xi < x). \qquad (1.15)$$

Означення 1.12. Якщо існує невід'ємна інтегровна функція $f(x)$ така, що для довільного дійсного x функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини ξ можна подати у вигляді

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy, \qquad (1.16)$$

то випадкову величину ξ називають ***неперервною***, а підінтегральну функцію $f(x)$ – ***щільністю*** її розподілу.

Твердження 1.7. Щільність розподілу неперервної випадкової величини ξ має наступні властивості:

1. $f(x) \ge 0$ для довільного x;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$;
3. $P(a \le \xi \le b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$; $\qquad (1.17)$
4. Похідна від функції розподілу дорівнює щільності розподілу: $F'(x) = f(x)$ у всіх точках неперервності функції $f(x)$.

Зауваження 1.8. Будь-яка функція $f(x)$, що задовольняє властивостям 1. та 2. з твердження 1.7, є щільністю розподілу для деякої випадкової величини.

Зауваження 1.9. Аналогічно до властивості 3 з твердження 1.7, можна рахувати ймовірності й інших подій, пов'язаних зі значеннями випадкової величини ξ, наприклад:

$$P(\xi \ge 0) = \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx, \qquad (1.18)$$

$$P(\xi > a) = \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx, \qquad (1.19)$$

$$P(\xi \le a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx, \qquad (1.20)$$

і так далі.

Зокрема, $P(\xi = a) = \int_{a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Це означає, що кожне окреме своє значення неперервно розподілена випадкова величина приймає з ймовірністю 0.

Приклад 1.12. На відрізок $[0;1]$ навмання кидають точку. Знайти функцію розподілу та щільність розподілу віддалі цієї точки від лівого кінця відрізка.

Розв'язання. Простір елементарних подій становлять точки відрізка, тобто $\Omega=[0;1]$. Позначимо через ξ віддаль точки від лівого кінця відрізка. Величина ξ набуває значень від 0 до 1. Події $A_x=\{\xi<x\}$ зображуються точками інтервалу $(0;x)\subset\Omega$. Якщо $x\le 0$, то $A_x=\varnothing$. Якщо ж $x>1$, то $A_x=\Omega$. Для $0<x\le 1$ за формулою (1.15) маємо, що функція розподілу випадкової величини ξ дорівнює $F(x)=P(\xi<x)=P(A_x)=x$. Об'єднавши всі три випадки, отримаємо:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Щільність розподілу випадкової величини ξ знаходимо через похідну:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1, & 0<x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Зауваження 1.10. Щільність розподілу випадкової величини, так само, як і функція розподілу, повністю визначає розподіл випадкової величини.

Наведемо приклади деяких стандартних щільностей, які використовуються найчастіше.

1. Рівномірний розподіл.

З рівномірним розподілом ми мали справу при розв'язанні прикладу 1.12, коли на відрізок $[0;1]$ навмання кидалася точка. Якщо замість відрізку $[0;1]$ ми розглянемо довільний відрізок $[a;b]$, то отримаємо наступну щільність розподілу:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a;b],\\ 0, & x\notin[a;b].\end{cases}$$

2. Показниковий (експоненційний) розподіл.

Щільність показникового розподілу з параметром λ задається функцією

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

3. Нормальний (Гауссів) розподіл.

а) Щільність нормального розподілу з параметрами a та σ дорівнює

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Той факт, що випадкова величина ξ має нормальний розподіл з параметрами a та σ, позначають символічно так: $\xi \sim N\left(a;\sigma^2\right)$.

б) Якщо $a=0$ та $\sigma=1$, то такий розподіл зі щільністю

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

називають стандартним нормальним розподілом.

У цьому випадку використовують позначення: $\xi \sim N(0;1)$.

4. χ^2-розподіл.

Розподілом χ_n^2 (читається: «хі квадрат») із n ступенями вільності називають розподіл випадкової величини $\chi_n^2=\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2$, де ξ_k – незалежні однаково розподілені випадкові величини зі стандартним нормальним розподілом $N(0;1)$.

Щільність випадкової величини χ_n^2 має наступний вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{n/2}\cdot\Gamma(n/2)}x^{n/2-1}e^{-x/2}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

де $\Gamma(x)=\int\limits_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$.

1.10. МАТЕМАТИЧНЕ СПОДІВАННЯ ТА ДИСПЕРСІЯ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Означення 1.13. ***Математичним сподіванням*** неперервної випадкової величини ξ, що має щільність $f(x)$, називають число $E\xi$, яке обчислюється за наступною формулою:

$$E\xi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)\,dx, \qquad (1.21)$$

при умові, що невласний інтеграл в правій частині рівності існує і скінченний.

Означення 1.14. ***Дисперсією*** неперервної випадкової величини ξ називають число $D\xi$, яке визначається рівністю:

$$D\xi=E\left(\xi-E\xi\right)^2. \qquad (1.22)$$

Зауваження 1.11. Формула (1.22) для обчислення дисперсії є такою ж самою, як і для дискретних випадкових величин, але якщо розписати математичне сподівання через інтеграл, то отримаємо:

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - E\xi\right)^2 \cdot f(x)\,dx. \qquad (1.23)$$

Зауваження 1.12. Якщо розкрити дужки в (1.22) і скористатися властивостями математичного сподівання, то можна отримати еквівалентну формула для обчислення дисперсії:

$$D\xi = E\xi^2 - \left(E\xi\right)^2. \qquad (1.24)$$

Для того, щоб підрахувати $E\xi^2$, тобто другий момент випадкової величини ξ, можна скористатися наступною формулою:

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx. \qquad (1.25)$$

Для перелічених в попередньому пункті стандартних розподілів математичне сподівання та дисперсію знаходять за наступними формулами.

1. Рівномірний розподіл.

Якщо випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на відрізку $\left[a;b\right]$, тобто її щільність задається функцією

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in \left[a;b\right], \\ 0, & x \notin \left[a;b\right], \end{cases}$$

то математичне сподівання

$$E\xi = \frac{a+b}{2}.$$

Таким чином, середнє значення випадкової величини, рівномірно розподіленої на відрізку $\left[a;b\right]$, знаходиться посередині відрізка $\left[a;b\right]$.

Дисперсія рівномірно розподіленої на відрізку $\left[a;b\right]$ випадкової величини:

$$D\xi = \frac{\left(b-a\right)^2}{12}.$$

2. Показниковий (експоненційний) розподіл.

Якщо випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром λ, то її щільність:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases} \qquad (1.26)$$

математичне сподівання:

$$E\xi = \frac{1}{\lambda}; \qquad (1.27)$$

дисперсія:

$$D\xi = \frac{1}{\lambda^2}. \qquad (1.28)$$

3. Нормальний (Гауссів) розподіл.

а) Якщо випадкова величина ξ має нормальний розподіл з параметрами a та σ, то її щільність:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}};$$

математичне сподівання: $E\xi = a$;
дисперсія: $D\xi = \sigma^2$.

б) Для стандартного нормального розподілу маємо щільність:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}};$$

математичне сподівання: $E\xi = 0$;
дисперсію: $D\xi = 1$.

4. Розподіл χ^2.

Для розподілу хі-квадрат:

$$E\chi_n^2 = n.$$

<u>КОНТРОЛЬНЕ ЗАВДАННЯ 11.</u>

Зразок розв'язання завдання 11.

У випадку аварії страхові виплати (в доларах) по договору страхування автомобіля мають показниковий розподіл з параметром $\lambda = 0,002$.

1) Записати щільність, функцію розподілу величини страхових виплат.

2) Знайти математичне сподівання, дисперсію, стандартне відхилення величини виплат.

3) Знайти ймовірність того, що виплати після аварії перевищать \$5000.

4) Знайти ймовірність того, що величина виплат буде лежати в межах від \$400 до \$3000.

<u>Розв'язання.</u> 1) Нехай ξ – величина страхових виплат після аварії. Тоді випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром $\lambda = 0,002$. За формулою (1.26), щільність розподілу ξ задається наступним чином:

$$f(x)=\begin{cases}0,002e^{-0,002x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Функцію розподілу знайдемо за формулою (1.16):

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy=\int_{0}^{x} 0,002e^{-0,002y}\,dy=\left|\begin{array}{l} u=-0,002y\\ du=-0,002\,dy\\ y=0\Rightarrow u=0\\ y=x\Rightarrow u=-0,002x\end{array}\right|=$$

$$=-\int_{0}^{-0,002x} e^{u}\,du=\int_{-0,002x}^{0} e^{u}\,du=e^{u}\Big|_{u=-0,002x}^{u=0}=e^{0}-e^{-0,002x}=1-e^{-0,002x}$$

при $x\ge 0$.

2) Математичне сподівання для показниково розподіленої випадкової величини обчислюється за формулою (1.27):

$$E\xi=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{0,002}=500.$$

Таким чином, в середньому у випадку аварії виплачується 500 доларів.

Дисперсію обчислимо за формулою (1.28):

$$D\xi=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{(0,002)^2}=\left(500\right)^2=250\,000.$$

Стандартне відхилення – це квадратний корінь з дисперсії:

$$\sigma_{\xi}=\sqrt{D\xi}=\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}}=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{0,002}=500.$$

3) Знайдемо ймовірність того, що виплати після аварії перевищать \$5000. За формулою (1.19), зробивши заміну змінної у невласному інтегралі, отримаємо:

$$P\left(\xi>5000\right)=\int_{5000}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{5000}^{+\infty} 0,002e^{-0,002x}\,dx=\left|\begin{array}{l} u=-0,002x\\ du=-0,002\,dx\\ x=5000\Rightarrow u=-10\\ x=+\infty\Rightarrow u=-\infty\end{array}\right|=$$

$$=-\int_{-10}^{-\infty} e^{u}\,du=\int_{-\infty}^{-10} e^{u}\,du=\lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{-10} e^{u}\,du=\lim_{A\to-\infty}\left(e^{u}\Big|_{u=A}^{u=-10}\right)=\lim_{A\to-\infty}\left(e^{-10}-e^{A}\right)=$$

$$=e^{-10}-0=e^{-10}\approx 0,00005.$$

Як ми бачимо, ймовірність того, що виплати після аварії перевищать \$5000, є надзвичайно малою.

4) Знайдемо ймовірність того, що величина виплат буде лежати в межах від \$400 до \$3000.

За формулою (1.17), зробивши заміну змінної у визначеному інтегралі, отримаємо:

$$P(400 \le \xi \le 3000) = \int_{400}^{3000} f(x)\,dx = \int_{400}^{3000} 0,002e^{-0,002x}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = -0,002x \\ du = -0,002\,dx \\ x = 4000 \Rightarrow u = -0,8 \\ x = 3000 \Rightarrow u = -6 \end{array} \right| = -\int_{-0,8}^{-6} e^{u}\,du = \int_{-6}^{-0,8} e^{u}\,du = e^{u}\Big|_{u=-6}^{u=-0,8} = e^{-0,8} - e^{-6} \approx$$

$$\approx 0,449 - 0,002 = 0,447\,.$$

Отже, ймовірність того, що у випадку аварії величина страхових компенсацій буде лежати в межах від \$400 до \$3000, дорівнює приблизно 44,7%.

Варіанти завдань для самостійного виконання 11.

Варіант 1. У випадку пожежі страхові виплати (в тисячах доларів) по договору страхування будівлі мають показниковий розподіл з параметром $\lambda = 0,05$.

1) Записати щільність, функцію розподілу величини страхових виплат.
2) Знайти математичне сподівання, дисперсію, стандартне відхилення величини виплат.
3) Знайти ймовірність того, що виплати після пожежі перевищать \$10000.
4) Знайти ймовірність того, що величина виплат буде лежати в межах від \$20 000 до \$80 000.

Варіант 2. У випадку хвороби страхові виплати (в гривнях) по договору медичного страхування мають показниковий розподіл з параметром $\lambda = 0,0008$.

1) Записати щільність, функцію розподілу величини страхових виплат.
2) Знайти математичне сподівання, дисперсію, стандартне відхилення величини виплат.
3) Знайти ймовірність того, що виплати після хвороби перевищать суму в 3000 грн.
4) Знайти ймовірність того, що величина виплат буде лежати в межах від 500 грн. до 2000 грн.

Задача 3. У випадку аварії страхові виплати (в гривнях) по договору страхування автомобіля мають показниковий розподіл з параметром $\lambda = 0,000025$.

1) Записати щільність, функцію розподілу величини страхових виплат.
2) Знайти математичне сподівання, дисперсію, стандартне відхилення величини виплат.
3) Знайти ймовірність того, що виплати після аварії перевищать суму в 80 000 грн.
4) Знайти ймовірність того, що величина виплат буде лежати в межах від 10 000 грн. до 70 000 грн.

Варіант 4. У випадку нещасного випадку страхові виплати (в гривнях) по договору страхування людини мають показниковий розподіл з параметром $\lambda = 0{,}000125$.

1) Записати щільність, функцію розподілу величини страхових виплат.
2) Знайти математичне сподівання, дисперсію, стандартне відхилення величини виплат.
3) Знайти ймовірність того, що виплати після настання нещасного випадку перевищать суму в 5000 грн.
4) Знайти ймовірність того, що величина виплат буде лежати в межах від 1000 грн. до 20 000 грн.

Варіант 5. У випадку крадіжки страхові виплати (в євро) по договору страхування квартири мають показниковий розподіл з параметром $\lambda = 0{,}001$.

1) Записати щільність, функцію розподілу величини страхових виплат.
2) Знайти математичне сподівання, дисперсію, стандартне відхилення величини виплат.
3) Знайти ймовірність того, що виплати після крадіжки перевищать суму в 2000 євро.
4) Знайти ймовірність того, що величина виплат буде лежати в межах від 500 євро до 4000 євро.

Варіант 6. У випадку пожежі страхові виплати (в тисячах євро) по договору страхування будівлі мають показниковий розподіл з параметром $\lambda = 0{,}025$.

1) Записати щільність, функцію розподілу величини страхових виплат.
2) Знайти математичне сподівання, дисперсію, стандартне відхилення величини виплат.
3) Знайти ймовірність того, що виплати після пожежі перевищать 20 000 євро.
4) Знайти ймовірність того, що величина виплат буде лежати в межах від 30 000 євро до 90 000 євро.

Варіант 7. У випадку хвороби страхові виплати (в доларах) по договору медичного страхування мають показниковий розподіл з параметром $\lambda = 0{,}0004$.

1) Записати щільність, функцію розподілу величини страхових виплат.
2) Знайти математичне сподівання, дисперсію, стандартне відхилення величини виплат.
3) Знайти ймовірність того, що виплати після хвороби перевищать суму в 2000 доларів.
4) Знайти ймовірність того, що величина виплат буде лежати в межах від \$500 до \$1500.

Задача 8. У випадку аварії страхові виплати (в євро) по договору страхування автомобіля мають показниковий розподіл з параметром $\lambda = 0{,}00016$.

1) Записати щільність, функцію розподілу величини страхових виплат.

2) Знайти математичне сподівання, дисперсію, стандартне відхилення величини виплат.
3) Знайти ймовірність того, що виплати після аварії перевищать суму в 10 000 євро.
4) Знайти ймовірність того, що величина виплат буде лежати в межах від 2 000 євро до 15 000 євро.
Варіант 9. У випадку нещасного випадку страхові виплати (в доларах) по договору страхування людини мають показниковий розподіл з параметром $\lambda = 0,000625$.
1) Записати щільність, функцію розподілу величини страхових виплат.
2) Знайти математичне сподівання, дисперсію, стандартне відхилення величини виплат.
3) Знайти ймовірність того, що виплати після настання нещасного випадку перевищать суму в $3000.
4) Знайти ймовірність того, що величина виплат буде лежати в межах від $1000 до $8000.
Варіант 10. У випадку крадіжки страхові виплати (в гривнях) по договору страхування квартири мають показниковий розподіл з параметром $\lambda = 0,00002$.
1) Записати щільність, функцію розподілу величини страхових виплат.
2) Знайти математичне сподівання, дисперсію, стандартне відхилення величини виплат.
3) Знайти ймовірність того, що виплати після крадіжки перевищать суму в 90 000 гривень.
4) Знайти ймовірність того, що величина виплат буде лежати в межах від 30 000 грн. до 80 000 грн.

1.11. КОЕФІЦІЄНТ КОРЕЛЯЦІЇ

Розглянемо важливу числову характеристику, пов'язану з двома випадковими величинами ξ та η, за допомогою якої визначають ступінь лінійної залежності випадкових величин ($\eta \approx a\xi + b$, де a і b – сталі).

Означення 1.15. Нехай ξ та η – випадкові величини, які мають дисперсії $D\xi$ і $D\eta$ відповідно. ***Коефіцієнтом кореляції*** між випадковими величинами ξ і η називають число

$$r_{\xi\eta} = \frac{E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}}. \qquad (1.29)$$

Властивості коефіцієнта кореляції:

1. Для будь-яких ξ та η коефіцієнт кореляції $\left|r_{\xi\eta}\right| \le 1$.

2. $\left|r_{\xi\eta}\right| = 1$ тоді і лише тоді, коли існують такі сталі $a \neq 0$ і b, що $\eta = a\xi + b$. Тобто, в цьому випадку між ξ та η існує лінійна залежність, причому при $r_{\xi\eta} = 1$ маємо пряму залежність ($a > 0$), а при $r_{\xi\eta} = -1$ маємо обернену залежність ($a < 0$).

3. Якщо ξ і η – незалежні випадкові величини, то $r_{\xi\eta} = 0$.

РОЗДІЛ 2.
ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

2.1. ДИСКРЕТНИЙ СТАТИСТИЧНИЙ РОЗПОДІЛ ВИБІРКИ ТА ЙОГО ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Для задоволення інформаційних потреб у різних сферах людської діяльності часто проводять спланований, систематичний і науково організований збір певних даних про різноманітні суспільні, економічні, наукові явища, процеси і величини. Такі дослідження називаються ***статистичними спостереженнями***. Статистичне спостереження, яке охоплює всі елементи певної множини, називається ***суцільним***, а коли досліджується лише їх частина, то – ***вибірковим***.

Під терміном ***генеральна сукупність*** будемо розуміти множину однорідних елементів, яким властиві деякі, як правило, ***кількісні*** ознаки, які виражаються числами – заробітна плата, обсяг реалізованої продукції, зріст, вага, маса та ін. Кількість елементів генеральної сукупності називають ***об'ємом генеральної сукупності***.

На практиці, з метою економії засобів та часу, дослідження генеральної сукупності проводять не повністю, а застосовують підбір характерних „ключів" або точок, просторових або часових обмежень, які називають ***вибіркою*** із генеральної сукупності. Іншими словами, ***вибірка*** – це довільна непорожня підмножина елементів, відібраних для безпосереднього вивчення із генеральної сукупності. Кількість елементів вибірки називають ***об'ємом вибірки***.

Зауваження 2.1. Часто поняття генеральної сукупності трактується як сукупність усіх можливих спостережень, що можуть з'явитись при певному комплексі умов, які відповідають досліджуваній реальній ситуації чи конкретному стохастичному експерименту, де спостерігається випадкова величина ξ із функцією розподілу $F(x)$. Набір n незалежних спостережень, в результаті яких випадкова величина ξ набуває значень $x_1, x_2, ..., x_n$ називають вибіркою об'єму n із генеральної сукупності випадкової величини ξ із функцією розподілу $F(x)$.

При реалізації вибірки певна кількісна ознака X набуває конкретних числових значень ($X = x_i$), які називають ***варіантами.*** Кожна варіанта вибірки може бути спостереженою n_i разів ($n_i \geq 1$), число n_i називають ***частотою варіанти*** x_i. При цьому $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$, де k – кількість варіант, що різняться числовим значенням, n – об'єм вибірки.

Зростаючий числовий ряд варіант називають ***варіаційним.*** Дію впорядкування за величиною елементів вибірки називають ***ранжуванням*** статистичних даних.

Відносною частотою варіанти x_i називають відношення частоти n_i варіанти x_i до об'єму вибірки n і позначають $W_i = {n_i}/{n}$. Очевидно, що для кожної вибірки виконується рівність $\sum_{i=1}^{k} W_i = 1$.

Дискретним статистичним розподілом вибірки називають перелік варіант варіаційного ряду і відповідних їм частот або відносних частот.

Даний розподіл зручно подати у табличній формі:

$X = x_i$	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k
W_i	W_1	W_2	…	W_k

Функція аргументу x, що визначає відносну частоту події $\{X < x\}$, тобто $\hat{F}_n(x) = W\{X < x\} = \frac{n_x}{n}$, де n – об'єм вибірки, n_x – кількість варіант статистичного розподілу вибірки, значення яких менше за x, називається ***емпіричною функцією розподілу***, або функцією розподілу вибірки.

Дискретний статистичний розподіл вибірки можна зобразити графічно у вигляді ламаної лінії, відрізки якої послідовно сполучають точки з координатами (x_i; n_i), або (x_i; W_i). У першому випадку ламану лінію називають ***полігоном частот***, у другому, коли вздовж осі Oy відкладають відносні частоти, – ***полігоном відносних частот***.

Приклад 2.1. В результаті спостережень за ранковою температурою повітря на певній території протягом перших двох декад грудня було одержано ряд значень температур: 7^0C; 3^0C; 3^0C; -1^0C; -1^0C; -2^0C; -5^0C; -3^0C; 2^0C; 0^0C; -2^0C; 0^0C; 2^0C; 3^0C; 0^0C; 2^0C; 0^0C; -2^0C; -3^0C; -2^0C.

1. Знайти дискретний статистичний розподіл вибірки.
2. Побудувати емпіричну функцію розподілу і зобразити її графічно.
3. Зобразити полігони частот і відносних частот.

<u>Розв'язання.</u> 1. Ранжуємо вибірку та випишемо відповідний варіаційний ряд: -5^0C; -3^0C; -3^0C; -2^0C; -2^0C; -2^0C; -2^0C; -1^0C; -1^0C; 0^0C; 0^0C; 0^0C; 0^0C; 2^0C; 2^0C; 2^0C; 3^0C; 3^0C; 3^0C; 7^0C.

Бачимо, що температура -5^0C спостерігалась 1 раз, тобто частота варіанти $x_1 = -5$ буде $n_1 = 1$, для варіанти $x_2 = -3$ частота $n_2 = 2$ і так далі.

Отримаємо таку таблицю частот:

$X = x_i$ (^0C)	–5	–3	–2	–1	0	2	3	7
n_i	1	2	4	2	4	3	3	1

Переконаємося, що сума частот усіх варіант дорівнює об'єму вибірки: $\sum_{i=1}^{9} n_i = 1+2+4+2+4+3+3+1 = 20.$

Знайдемо відносну частоту для кожної варіанти і отримаємо дискретний статистичний розподіл вибірки у вигляді таблиці:

$X = x_i\ (^0C)$	–5	–3	–2	–1	0	2	3	7
W_i	0,05	0,1	0,2	0,1	0,2	0,15	0,15	0,05

Переконаємось, що сума відносних частот усіх варіант дорівнює одиниці: $\sum_{i=1}^{9} W_i = 0,05+0,1+0,2+0,1+0,2+0,15+0,15+0,05 = 1$.

2. За означенням емпіричної функції розподілу $\hat{F}_n(x)$ знаходимо:

$$\hat{F}_{20}(x) = W(X < x) = \begin{cases} 0; & x \le -5, \\ 0,05; & -5 < x \le -3, \\ 0,15; & -3 < x \le -2, \\ 0,35; & -2 < x \le -1, \\ 0,45; & -1 < x \le 0, \\ 0,65; & 0 < x \le 2, \\ 0,8; & 2 < x \le 3, \\ 0,95; & 3 < x \le 7, \\ 1; & x > 7. \end{cases}$$

Помітимо, що при $x \le -5$ $\hat{F}_{20}(x)$=0, оскільки немає жодного вибіркового значення, яке менше –5, а на $(k+1)$-му проміжку $\hat{F}_{20}(x) = \sum_{i=1}^{k} W_i$. Графічне зображення $\hat{F}_{20}(x)$:

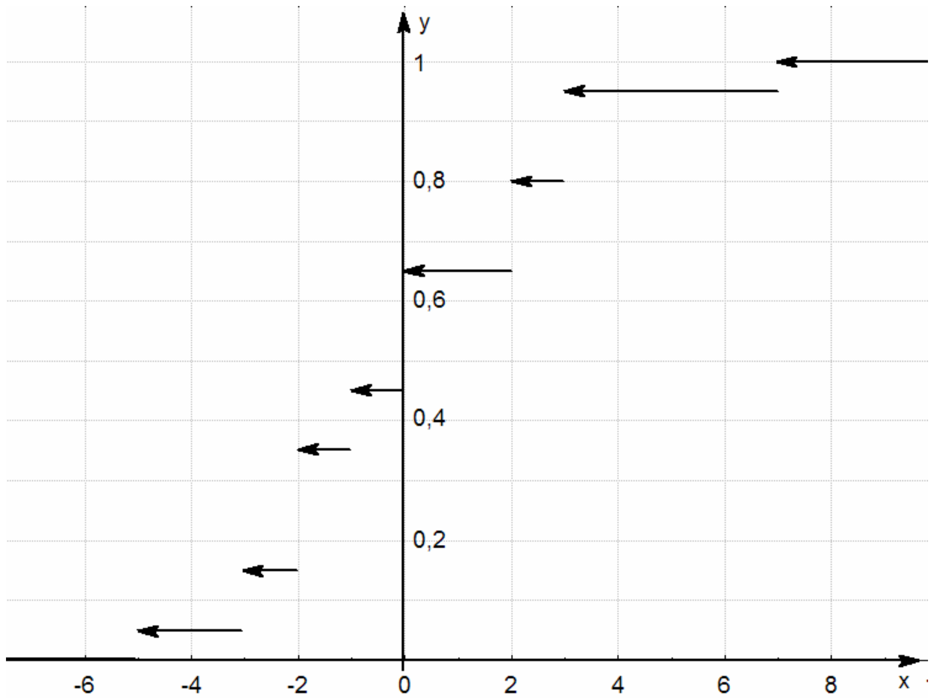


Рис. 2.1

Полігони частот та відносних частот зображено, відповідно, на рис. 2.2 та рис. 2.3.

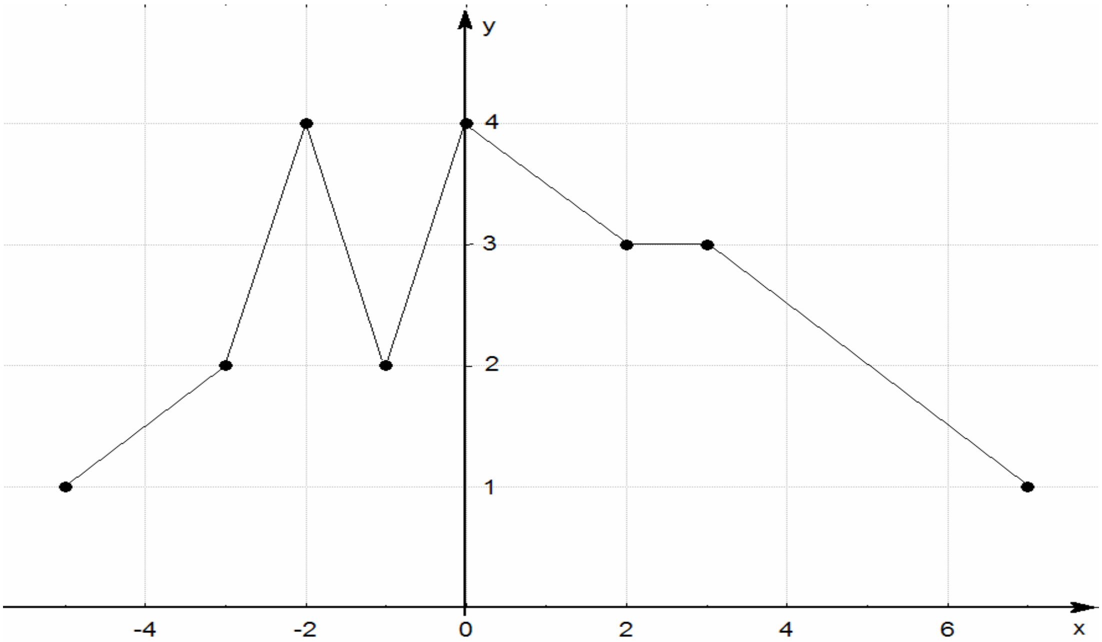


Рис. 2.2

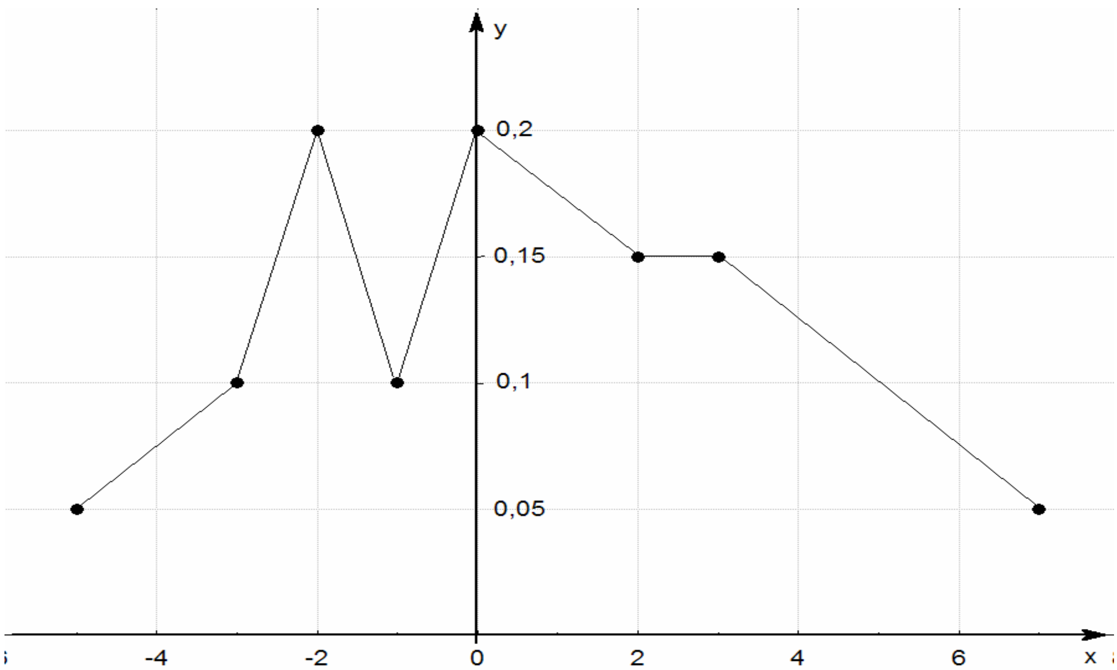


Рис. 2.3

При аналізі варіаційних рядів вивчають наступні групи показників:

- характеристики центру розподілу;
- характеристики розміру варіації;
- характеристики форми розподілу.

До статистичних характеристик центру розподілу відносяться такі вибіркові характеристики: ***середнє, мода, медіана***.

Вибіркове середнє ($\overline{x}_B$) дискретного статистичного розподілу вибірки визначається формулою

$$\overline{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n},$$

де x_i – варіанта варіаційного ряду вибірки; n_i – частота цієї варіанти; n – об'єм вибірки ($n = \sum_{i=1}^{k} n_i$).

Очевидно, що формулу для знаходження вибіркового середнього можна переписати у вигляді $\overline{x}_B = \sum_{i=1}^{k} x_i W_i$, де W_i – відносна частота варіанти x_i. Остання формула нагадує формулу для математичного сподівання дискретної випадкової величини, що приймає значення x_i з ймовірностями W_i. Тому властивості вибіркового середнього аналогічні властивостям математичного сподівання випадкової величини. Наприклад, якщо всі варіанти збільшити (зменшити) в k разів, то вибіркове середнє збільшиться (зменшиться) в k разів. Якщо всі варіанти збільшити (зменшити) на число c, то вибіркове середнє збільшиться (зменшиться) на число c.

Якщо всі варіанти з'являються у вибірці лише по одному разу, тобто $n_i = 1$, то вибіркове середнє є звичайним (незваженим) середнім арифметичним варіант і обчислюється за формулою

$$\overline{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Вибіркова мода (Mo^*). ***Модою*** дискретного статистичного розподілу вибірки називають варіанту, що має найбільшу частоту (відносну частоту) появи. На графіку вибіркова мода відповідає максимальній ординаті полігону частот або відносних частот.

Мод може бути кілька. Коли дискретний статистичний розподіл має одну моду, то він називається ***одномодальним***, коли має дві моди – ***двомодальним*** і т. д.; якщо мод більше однієї, то кажуть, що розподіл вибірки ***полімодальний***.

Вибіркова медіана (Me^*). ***Медіаною*** дискретного статистичного розподілу вибірки називають варіанту, яка поділяє варіаційний ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант. Якщо варіаційний ряд складено за парною кількістю спостережень, то медіаною є півсума двох середніх варіант.

До статистичних показників розміру варіації відносяться такі числові характеристики вибірки: ***відхилення варіант, вибіркова дисперсія, середнє квадратичне відхилення вибірки та розмах вибірки***.

Відхилення варіант. Різницю $x_i - \overline{x}_B$ називають ***відхиленням варіант***. Оскільки

$$\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{x}_B\right)n_i = \sum_{i=1}^{k} x_i n_i - \sum_{i=1}^{k} \overline{x}_B n_i = n \cdot \overline{x}_B - n \cdot \overline{x}_B = 0,$$

то сума відхилень усіх варіант варіаційного ряду вибірки завжди дорівнює нулю.

Вибіркова дисперсія (D_B). Мірою розсіювання варіант вибірки відносно $\overline{x}_B$ є вибіркова дисперсія. ***Дисперсія вибірки*** – це середнє арифметичне квадратів відхилень варіант відносно $\overline{x}_B$, яке обчислюється за формулою

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{x}_B\right)^2 n_i}{n}.$$

На практиці дисперсію вибірки обчислюють за спрощеною формулою

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i}{n} - \left(\overline{x}_B\right)^2.$$

Середнє квадратичне відхилення вибірки (σ_B). При обчисленні D_B відхилення підноситься до квадрату, а отже, змінюється одиниця виміру ознаки *X*, тому на основі дисперсії вводиться ***вибіркове середнє квадратичне відхилення*** (або, ***стандартне відхилення***)

$$\sigma_B = \sqrt{D_B},$$

яке також вимірює розсіювання варіант вибірки відносно $\overline{x}_B$, але в тих самих одиницях, в яких вимірюється ознака *X*.

Розмах (*R*). Для грубого оцінювання розсіювання варіант відносно $\overline{x}_B$ застосовується величина, яка дорівнює різниці між найбільшою $x_{\max}$ і найменшою $x_{\min}$ варіантами варіаційного ряду. Ця величина називається ***розмахом вибірки***

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

Приклад 2.2. За заданим у прикладі 2.1 статистичним розподілом вибірки обчислити розмах вибірки *R*, вибіркове середнє $\overline{x}_B$, вибіркову дисперсію D_B та середнє квадратичне відхилення вибірки σ_B, знайти вибіркові моду Mo^* та медіану Me^*.

Розв'язання. Знайдемо розмах вибірки:

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 7 - (-5) = 12.$$

Обчислимо вибіркове середнє:

$$\overline{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i n_i}{n} = \frac{(-5)\cdot 1 + (-3)\cdot 2 + (-2)\cdot 4 + (-1)\cdot 2 + 0\cdot 4 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3 + 7\cdot 1}{20} = 0,05.$$

Для знаходження D_B обчислимо спочатку

$$\frac{\sum_{i=1}^{8} x_i^2 n_i}{n} = \frac{(-5)^2\cdot 1 + (-3)^2\cdot 2 + (-2)^2\cdot 4 + (-1)^2\cdot 2 + 0 + 2^2\cdot 3 + 3^2\cdot 3 + 7^2\cdot 1}{20} = 7,45.$$

Тоді $D_B = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i^2 n_i}{n} - \left(\overline{x}_B\right)^2 = 7,45 - (0,05)^2 = 7,4475$. Отже, $D_B \approx 7,45$ і $\sigma_B = \sqrt{D_B} \approx 2,73$.

Даний статистичний розподіл вибірки буде двомодальним, оскільки $Mo_1^* = -2$, $Mo_2^* = 0$.

Варіаційний ряд складено за парною кількістю спостережень, тому $Me^* = \frac{0+0}{2} = 0$ (півсума x_{10} та x_{11} – двох середніх варіант варіаційного ряду).

Аналіз закономірностей розподілу передбачає оцінювання ступеня однорідності сукупності, ***асиметрії*** та ***ексцесу*** розподілу.

В однорідних сукупностях розподіли одновершинні (одномодальні). Багатовершинність свідчить про неоднорідний склад сукупності, про різнотиповість окремих складових. У такому разі слід перегрупувати дані, виокремити однорідні групи.

Серед одновершинних розподілів є симетричні та асиметричні (скошені), гостро- та плосковершинні. У симетричному розподілі рівновіддалені від центру значення ознаки мають однакові частоти, в асиметричному – вершина розподілу зміщена. Напрям асиметрії протилежний напряму зміщення вершини. Якщо вершина зміщена ліворуч, маємо правосторонню асиметрію, і навпаки.

У вибірці з генеральної сукупності з симетричним розподілом характеристики центру – вибіркові середнє, мода, медіана – мають приблизно однакові значення, в асиметричному розподілі між ними існують певні розбіжності. Для правосторонньої асиметрії $\overline{x}_B > Me^* > Mo^*$, а в разі лівосторонньої – навпаки: $\overline{x}_B < Me^* < Mo^*$. Чим більша асиметрія, тим більше відхилення $\overline{x}_B - Mo^*$.

Найпростішою мірою асиметрії є ***відносне відхилення*** $A = \frac{\overline{x}_B - Mo^*}{\sigma_B}$, яке характеризує напрям і міру скошеності розподілу; при правосторонній асиметрії: $A > 0$, при лівосторонній: $A < 0$.

Іншою властивістю одновершинних розподілів є ступінь зосередженості елементів сукупності навколо центру розподілу. Цю властивість називають ***ексцесом*** розподілу.

Асиметрія та ексцес – дві пов'язані з варіацією властивості форми розподілу. Комплексне їх оцінювання виконується на базі центральних моментів розподілу.

Вибірковий центральний момент розподілу – це середнє арифметичне *k*-го степеня відхилення індивідуальних значень ознаки від вибіркового середнього:

$$\mu_к^* = \frac{\sum_i \left(x_i - \overline{x}_B\right)^k n_i}{n}.$$

Очевидно, що центральний момент 2-го порядку є дисперсією, яка характеризує варіацію. Центральні моменти 3-го і 4-го порядків характеризують, відповідно, асиметрію та ексцес. У симетричному розподілі $\mu_3 = 0$, а, отже, $A = 0$. Чим більша скошеність варіаційного ряду, тим більше значення μ_3. Для того, щоб характеристика скошеності не залежала від масштабу вимірювання ознаки, для порівняння ступеня асиметрії різних розподілів використовується стандартизований момент:

$$A_S^* = \frac{\mu_3^*}{\sigma_B^3},$$

який, на відміну від коефіцієнта скошеності A, залежить від крайніх значень ознаки. При правосторонній асиметрії вибірковий коефіцієнт $A_S^* > 0$, при лівосторонній – $A_S^* < 0$. Звідси правостороння асиметрія називається ***додатною***, а лівостороння – ***від'ємною***. Кажуть, що при $A_S^* < 0,25$ асиметрія низька, якщо A_S^* не перевищує 0,5 – середня, при $A_S^* > 0,5$ – висока.

Для вимірювання ексцесу використовується стандартизований центральний момент четвертого порядку:

$$E_S^* = \frac{\mu_4^*}{\sigma_B^4} - 3.$$

У симетричному, близькому до нормального розподілу E_S^* близький до нуля.

Для ***гостровершинного розподілу***: $E_S^* > 0$, для ***плосковершинного***: $E_S^* < 0$.

Приклад 2.3. За заданим в прикладі 2.1 статистичним розподілом вибірки обчислити вибіркові показники асиметрії та ексцесу.

Розв'язання. Скористаємось результатами, що були отримані в прикладі 2.2. Використаємо знайдені раніше вибіркове середнє $\overline{x}_B = 0,05$ та середнє квадратичне відхилення вибірки $\sigma_B \approx 2,73$. Обчислимо спочатку вибірковий центральний момент третього порядку

$$\mu_3^* = \frac{\sum_{i=1}^{8}\left(x_i - \overline{x}_B\right)^3 n_i}{n} =$$

$$= \frac{\left(-5-0,05\right)^3\cdot 1 + \left(-3-0,05\right)^3\cdot 2 + \left(-2-0,05\right)^3\cdot 4 + \left(-1-0,05\right)^3\cdot 2}{20} +$$

$$+ \frac{\left(0-0,05\right)^3\cdot 4 + \left(2-0,05\right)^3\cdot 3 + \left(3-0,05\right)^3\cdot 3 + \left(7-0,05\right)^3\cdot 1}{20} \approx 8,41.$$

$$A_S^* = \frac{\mu_3^*}{\sigma_B^3} = \frac{8,41}{\left(2,73\right)^3} \approx 0,41.$$

Отже, статистичний розподіл вибірки має середню правосторонню асиметрію. Для знаходження вибіркового коефіцієнта ексцесу знайдемо вибірковий центральний момент четвертого порядку

$$\mu_4^* = \frac{\sum_{i=1}^{8}\left(x_i - \overline{x}_B\right)^4 n_i}{n} =$$

$$= \frac{\left(-5-0,05\right)^4\cdot 1 + \left(-3-0,05\right)^4\cdot 2 + \left(-2-0,05\right)^4\cdot 4 + \left(-1-0,05\right)^4\cdot 2}{20} +$$

$$+ \frac{\left(0-0,05\right)^4\cdot 4 + \left(2-0,05\right)^4\cdot 3 + \left(3-0,05\right)^4\cdot 3 + \left(7-0,05\right)^4\cdot 1}{20} \approx 175,01.$$

$$E_S^* = \frac{\mu_4^*}{\sigma_B^4} - 3 = \frac{175,01}{\left(2,73\right)^4} - 3 \approx 0,15.$$

<u>КОНТРОЛЬНЕ ЗАВДАННЯ 13.</u>

Для заданої вибірки знайти дискретний статистичний розподіл вибірки, емпіричну функцію розподілу і зобразити її графічно, зобразити полігони частот і відносних частот, обчислити розмах вибірки *R,* вибіркове середнє $\overline{x}_B$, вибіркову дисперсію D_B та середнє квадратичне відхилення вибірки σ_B, знайти вибіркові моду Mo^* і медіану Me^* та обчислити вибіркові коефіцієнти асиметрії та ексцесу.

Зразок розв'язання контрольного завдання 13 див. у прикладах 2.1 – 2.3.

Варіанти завдань для самостійного виконання 13.

Варіант 1. В результаті спостережень за ранковою температурою повітря в місті Луцьк протягом першої половини лютого було одержано такі значення температур: -17^0C; -13^0C; -13^0C; -10^0C; -13^0C; -17^0C; -19^0C; -17^0C; -10^0C; -7^0C; -10^0C; -10^0C; -7^0C; -11^0C.

Варіант 2. В результаті спостережень за ранковою температурою повітря в місті Миколаїв протягом перших двох тижнів березня було одержано такі значення температур: -9^0C; -8^0C; -5^0C; -1^0C; -1^0C; -5^0C; -1^0C; 0^0C; 5^0C; 2^0C; -1^0C; 2^0C; 0^0C; 2^0C.

Варіант 3. В результаті спостережень за ранковою температурою повітря в місті Полтава протягом першої половини квітня було одержано такі значення температур: 7^0C; 3^0C; 9^0C; 10^0C; 7^0C; 10^0C; 9^0C; 7^0C; 5^0C; 7^0C; 9^0C; 10^0C; 9^0C; 7^0C; 3^0C.

Варіант 4. В результаті спостережень за ранковою температурою повітря в місті Севастополь протягом перших двох тижнів травня було одержано такі значення температур: 9^0C; 8^0C; 10^0C; 11^0C; 11^0C; 9^0C; 11^0C; 15^0C; 15^0C; 12^0C; 11^0C; 7^0C; 10^0C; 12^0C.

Варіант 5. В результаті спостережень за ранковою температурою повітря в місті Суми протягом першої половини червня було одержано такі значення температур: 7^0C; 10^0C; 12^0C; 10^0C; 10^0C; 12^0C; 9^0C; 11^0C; 15^0C; 12^0C; 9^0C; 15^0C; 11^0C; 12^0C; 11^0C.

Варіант 6. В результаті спостережень за ранковою температурою повітря в місті Керч протягом перших двох тижнів серпня було одержано такі значення температур: 19^0C; 18^0C; 21^0C; 21^0C; 18^0C; 22^0C; 19^0C; 21^0C; 25^0C; 22^0C; 19^0C; 17^0C; 15^0C; 19^0C.

Варіант 7. В результаті спостережень за ранковою температурою повітря в місті Херсон протягом першої половини вересня було одержано такі значення температур: 17^0C; 15^0C; 12^0C; 10^0C; 15^0C; 12^0C; 9^0C; 11^0C; 15^0C; 12^0C; 9^0C; 10^0C; 9^0C; 12^0C; 11^0C.

Варіант 8. В результаті спостережень за ранковою температурою повітря в місті Львів протягом перших двох тижнів жовтня було одержано такі значення температур: 7^0C; 13^0C; 10^0C; 10^0C; 7^0C; 10^0C; 9^0C; 7^0C; 5^0C; 7^0C; 9^0C; 10^0C; 7^0C; 3^0C.

Варіант 9. В результаті спостережень за ранковою температурою повітря в місті Феодосія протягом першої половини листопада було одержано такі значення температур: 7^0C; 5^0C; 2^0C; 0^0C; 5^0C; 2^0C; 5^0C; 7^0C; 5^0C; 2^0C; 0^0C; -1^0C; 0^0C; -2^0C; -1^0C.

Варіант 10. В результаті спостережень за ранковою температурою повітря в місті Харків протягом перших двох тижнів січня було одержано такі значення температур: -7^0C; -13^0C; -13^0C; -10^0C; -12^0C; -12^0C; -9^0C; -7^0C; -5^0C; -7^0C; -9^0C; -10^0C; -11^0C; -13^0C.

2.2. ВИБІРКОВА ЛІНІЙНА РЕГРЕСІЯ

Якщо ми маємо вибірку пар значень (x_i, y_i), $i = 1,2,...,n$ генеральної сукупності (X, Y):

$Y = y_i$	y_1	y_2	y_3	y_4	...	y_n
$X = x_i$	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_n

Таку таблицю називають ***парним статистичним розподілом вибірки***. Тут кожна пара значень ознак X і Y з'являється лише один раз.

Об'єм вибірки у цьому випадку дорівнює кількості пар, тобто n.

Числові характеристики ознаки X:

вибіркове середнє

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n};$$

вибіркова дисперсія

$$D_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - (\overline{x})^2;$$

вибіркове середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}.$$

Числові характеристики ознаки Y:

вибіркове середнє

$$\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n};$$

вибіркова дисперсія

$$D_y = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{n} - (\overline{y})^2;$$

вибіркове середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_y = \sqrt{D_y};$$

емпіричний кореляційний момент

$$K_{xy}^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n} - \overline{x} \cdot \overline{y};$$

вибірковий коефіцієнт кореляції обчислюється за формулою

$$r_{\text{В}} = \frac{K_{xy}^*}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Попереднє уявлення про двовимірну генеральну сукупність можна отримати, якщо зображувати елементи вибірки (x_i, y_i) точками на площині з вибраною прямокутною системою координат. Таке зображення вибірки називається ***діаграмою розсіювання***.

У випадку повної кореляції всі точки (x_i, y_i), $i = \overline{1, n}$, будуть розміщені на одній прямій. Якщо $r_B = 1$, то між вибірковими даними існує прямий лінійний зв'язок: із збільшенням значень однієї вибірки відповідні значення другої вибірки мають тенденцію до збільшення. Якщо $r_B = -1$, то між вибірковими даними є обернений лінійний зв'язок: із збільшенням значень однієї вибірки відповідні значення другої вибірки мають тенденцію до зменшення. Якщо $r_B = 0$, то кажуть, що дві вибірки є некорельованими, при цьому точки (x_i, y_i) розміщені на площині хаотично.

Якщо $0 < r_B < 1$, то можна знайти таку пряму, від якої точки (x_i, y_i) відхиляються найменше у тому сенсі, що сума квадратів вертикальних відстаней від точок (x_i, y_i) до цієї прямої буде мінімальною. Вказана пряма називається ***прямою вибіркової лінійної регресії*** y на x. Вона визначається рівнянням $y = ax + b$, де $a = r_B \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$, $b = \overline{y} - a\overline{x}$.

Кутовий коефіцієнт даної прямої a називається ***вибірковим коефіцієнтом регресії*** y на x, він показує на скільки одиниць в середньому змінюється змінна y при збільшенні x на одну одиницю.

Зауваження 2.2. Невідомі параметри a і b в рівнянні вибіркової лінійної регресії можуть бути знайдені як розв'язки нормальної системи методу найменших квадратів:

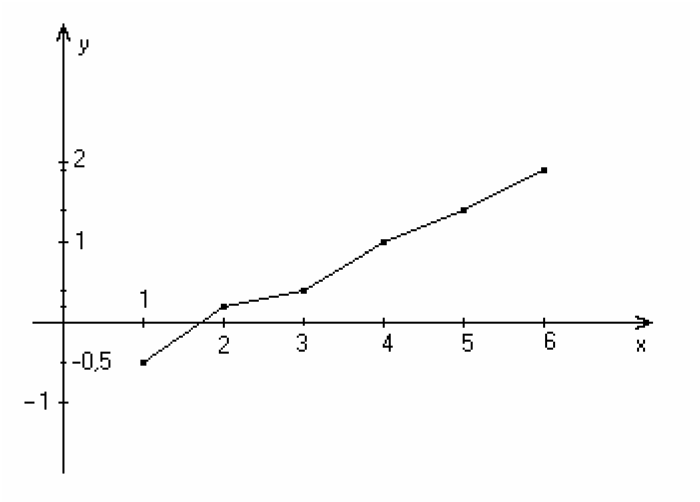
$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

Приклад 2.4. В результаті спостережень отримали вибірку пар значень

X	1	2	3	4	5	6
Y	–0,5	0,2	0,4	1	1,4	1,9

Методом найменших квадратів знайти параметри a і b лінійної залежності $y = ax + b$ між X та Y.

Розв’язання. Побудуємо точки з координатами (x_i, y_i) на координатній площині :



Припускаючи, що між x і y існує лінійна залежність $y=ax+b$, коефіцієнти a і b знаходимо з системи

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i = a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n, \end{cases}$$

де $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1+2+3+4+5+6 = 21$,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1+4+9+16+25+36 = 91,$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = -0,5+0,2+0,4+1+1,4+1,9 = 4,4,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 1\cdot(-0,5)+2\cdot 0,2+3\cdot 0,4+4\cdot 1+5\cdot 1,4+6\cdot 1,9 = 23,5.$$

Складаємо нормальну систему методу найменших квадратів:

$$\begin{cases} 91a + 21b = 23,5 \\ 21a + 6b = 4,4 \end{cases}$$

Розв'язуємо систему за правилом Крамера :

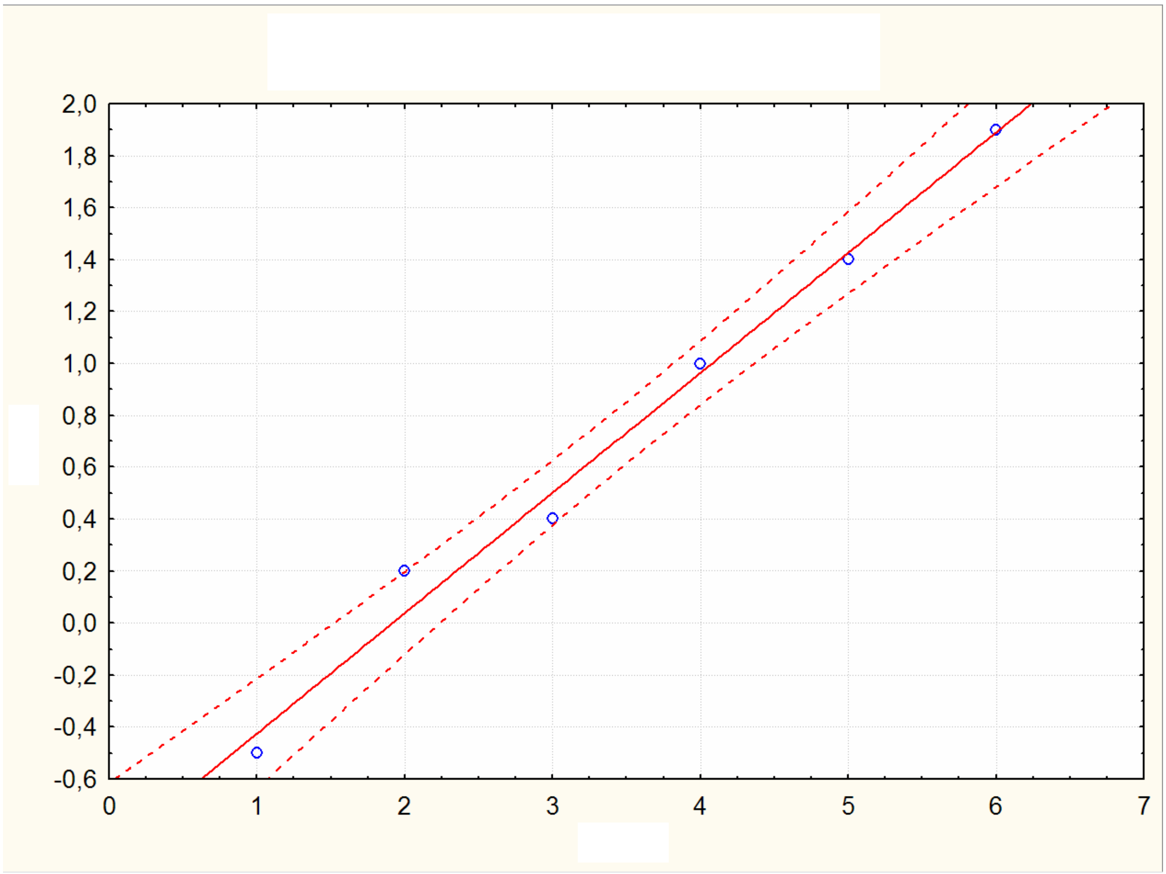
$$\Delta = \begin{vmatrix} 91 & 21 \\ 21 & 6 \end{vmatrix} = 546 - 441 = 105;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 23,5 & 21 \\ 4,4 & 6 \end{vmatrix} = 141 - 92,4 = 48,6;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 91 & 23,5 \\ 21 & 4,4 \end{vmatrix} = 400,4 - 493,5 = -93,1;$$

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{48,6}{105} \approx 0,46; \qquad b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-93,1}{105} \approx -0,89.$$

Таким чином, шукана пряма задається рівнянням $y = 0,46x - 0,89$.



КОНТРОЛЬНЕ ЗАВДАННЯ 14.

В результаті спостережень отримали вибірку пар значень

X	1	2	3	4	5	6
Y	–0,5	0,2	0,4	1	1,4	1,9

Знайти числові характеристики ознаки X та Y, вибірковий коефіцієнт кореляції та пряму вибіркової лінійної регресії y на x.

Зразок розв'язання завдання 14.

Вибіркові середні ознак X та Y:

$$\overline{x} = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = 3,5;$$

$$\overline{y} = \frac{1}{6}(-0,5+0,2+0,4+1+1,4+1,9) = \frac{4,4}{6} \approx 0,73.$$

Вибіркові дисперсії відповідних ознак:

$$D_x = \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) - (3,5)^2 = \frac{91}{6} - 12,25 = 2,92;$$

$$D_y = \frac{1}{6}(0,25+0,04+0,16+1+1,96+3,61) - (0,73)^2 \approx$$

$$\approx \frac{7,02}{6} - 0,53 = 0,64.$$

Емпіричний кореляційний момент

$$K^*_{xy} = \frac{1}{6}\big(1\cdot(-0,5) + 2\cdot 0,2 + 3\cdot 0,4 + 4\cdot 1 + 5\cdot 1,4 + 6\cdot 1,9\big) - 3,5\cdot 0,73 =$$

$$= \frac{23,5}{6} - 2,56 \approx 1,36;$$

вибірковий коефіцієнт кореляції

$$r_B = \frac{1,36}{\sqrt{2,92}\cdot\sqrt{0,64}} \approx 0,99;$$

параметри a і b в рівнянні вибіркової лінійної регресії

$$a = 0,99\cdot\frac{\sqrt{0,64}}{\sqrt{2,92}} \approx 0,46; \qquad b = 0,73 - 0,46\cdot 3,5 = -0,89;$$

$y = 0,46x - 0,89$ – рівняння вибіркової лінійної регресії y на x.

Варіанти завдань для самостійного виконання 13.

Варіант 1.	X	1	2	3	4	5	6
	Y	1,2	1,4	2,8	2,5	2,5	4,3
Варіант 2.	X	1	2	3	4	5	6
	Y	-3,6	-2,6	1,9	0,8	2,6	4,2
Варіант 3.	X	1	2	3	4	5	6
	Y	4,8	5,5	4,3	2,3	2,1	1
Варіант 4.	X	1	2	3	4	5	6
	Y	1,2	3,1	4,2	5,3	8,4	7,2
Варіант 5.	X	-1	0	2	3	4	5
	Y	2	1,5	3	4,5	5	8
Варіант 6.	X	-2	-1	0	1	2	3
	Y	2,1	1,5	1	0,5	-2	-4
Варіант 7.	X	1	2	3	4	5	6
	Y	1,9	2,8	1,6	0,3	0,9	2,1
Варіант 8.	X	1	2	3	4	5	6
	Y	4,5	3,5	2,2	0,9	1,1	2,6
Варіант 9.	X	1	2	3	4	5	6
	Y	5,3	3,5	4,9	2,7	3,4	1,2
Варіант 10.	X	1	2	3	4	5	6
	Y	3,5	4,8	5	7,5	8,7	7

2.3. ПЕРЕВІРКА ГІПОТЕЗИ ПРО ЗАКОН РОЗПОДІЛУ ЗА ДОПОМОГОЮ КРИТЕРІЮ χ^2

Нехай маємо вибірку об’єму n з генеральної сукупності дискретної випадкової величини. Висувається гіпотеза H_0 про те, що закон розподілу даної випадкової величини ξ має вигляд:

ξ	x_1	x_2	$\dots$	x_k
p	p_1	p_2	$\dots$	p_k

Нехай варіантам $x_1, x_2, ..., x_k$ вибірки відповідають частоти $n_1, n_2, ..., n_k$, при цьому $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Побудуємо функцію χ^2, яка характеризує відхилення спостережуваних частот від теоретичних ймовірностей:

$$\hat{\chi}^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}.$$

При $n \to \infty$ функція $\hat{\chi}^2$ має розподіл χ^2 з $(k-1)$ ступенем свободи.

Випадкова величина K із відомим законом розподілу, яка використовується для перевірки основної гіпотези, називається ***статистичним критерієм***. На основі вибірки, керуючись значеннями критерію K, відхиляють або не відхиляють нульову гіпотезу. При цьому можуть виникати помилки першого та другого роду.

Помилку, яка виникає тоді, коли гіпотеза H_0 відхиляється, якщо вона є вірною, називають ***помилкою першого роду***. Ймовірність зробити помилку першого роду називають ***рівнем значущості статистичного критерію*** і позначають α.

Якщо рівень значущості α є заданим, то за таблицею 1 розподілу χ^2 шукаємо таке значення χ^2_α, що $P\left\{ \hat{\chi}^2 > \chi^2_\alpha \right\} = \alpha$. Тоді, значення $\hat{\chi}^2$, для яких $\hat{\chi}^2 \le \chi^2_\alpha$, є ***областю допустимих значень*** (сукупність значень критерію, при яких основну гіпотезу не відхиляють); значення $\hat{\chi}^2$, для яких $\hat{\chi}^2 > \chi^2_\alpha$, утворюють ***критичну область*** (сукупність значень критерію, при яких основну гіпотезу відхиляють).

Розглянутим критерієм χ^2 можна користуватися, коли об’єм вибірки такий, що виконуються умови $np_i \ge 10,\ i = 1, 2, ..., k$.

Приклад 2.5. При $n = 4000$ незалежних випробуваннях події A_1, A_2, A_3, які утворюють повну групу подій, відбулися, відповідно, 1905, 1015 та 1080 раз. Перевірити узгодженість наведених даних при рівні значущості

$\alpha = 0{,}05$ з гіпотезою H_0 про те, що $P(A_1) = 1/2$, $P(A_2) = P(A_3) = 1/4$ у кожному випробуванні.

Розв'язання. Гіпотеза H_0 полягає в тому, що $p_1 = 0{,}5$; $p_2 = p_3 = 0{,}25$. Очевидно, що умови виконуються. Обчислимо емпіричне значення критерію

$$\hat{\chi}^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} =$$

$$= \frac{(1905 - 4000 \cdot 0{,}5)^2}{4000 \cdot 0{,}5} + \frac{(1015 - 4000 \cdot 0{,}25)^2}{4000 \cdot 0{,}25} + \frac{(1080 - 4000 \cdot 0{,}25)^2}{4000 \cdot 0{,}25} = 11{,}13.$$

За таблицею розподілу χ^2 знайдемо $\chi^2_{\alpha;n} = \chi^2_{0,05;\,3-1} = 5{,}99$.

Отже, $\hat{\chi}^2 > \chi^2_{\alpha}$ і при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ гіпотезу H_0 будемо відхиляти.

Критерій узгодження χ^2 використовується також і для перевірки гіпотез про неперервну функцію розподілу $F(x)$. Для цього числова вісь розбивається на інтервали, що не перетинаються, підраховуються теоретичні та спостережувані частоти для кожного інтервалу, а потім вони порівнюються за допомогою функції χ^2. Критерієм χ^2 можна користуватися, коли частоти для кожного інтервалу $n_i \geq 5$. Якщо це не так, то перед застосуванням критерію об'єднують сусідні інтервали з малими частотами.

Якщо при перевірці гіпотези про закон розподілу теоретичний розподіл характеризують s невідомих параметрів, то за вибіркою шукають їх відповідні оцінки, а критичне значення χ^2_{α} при вибраному α шукають за таблицею розподілу χ^2 для кількості ступенів свободи $(k - s - 1)$.

Приклад 2.6. За наведеним нижче інтервальним розподілом середньодобової температури повітря при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити гіпотезу H_0 про нормальний розподіл середньодобової температури повітря.

Інтервали	(8,1 – 8,4)	(8,4 – 8,7)	(8,7 – 9,0)	(9,0 – 9,3)	(9,3 – 9,6)	(9,6 – 9,9)
n_i	7	10	9	4	6	4

Розв'язання. Розіб'ємо усю числову вісь на інтервали, що не перетинаються, при цьому об'єднаємо сусідні інтервали з малими частотами. Утворений інтервальний розподіл має вигляд

Інтервали	$(-\infty\,;-8{,}4)$	(8,4 – 8,7)	(8,7 – 9,3)	$(9{,}3\,;+\infty)$
n_i	7	10	13	10

Маємо:

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i = 40 .$$

Гіпотетичний розподіл має два невідомих параметри ($s = 2$), a та σ, точкові оцінки для яких (вибіркове середнє та виправлене вибіркове стандартне відхилення) обчислимо за даним в умові задачі розподілом:

$$\overline{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i^* n_i}{n} = \frac{8,25 \cdot 7 + 8,55 \cdot 10 + 8,85 \cdot 9 + 9,15 \cdot 4 + 9,45 \cdot 6 + 9,75 \cdot 4}{40} = 8,88.$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6} (x_i^* - \overline{x}_B)^2 n_i}{n-1}} \approx 0,484 ,$$

де x_i^* – середини заданих в умові інтервалів.

Ймовірності p_i потрапляння нормальної випадкової величини з параметрами a та σ в інтервал (α, β) обчислимо за формулою

$$P\{\alpha < x < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

де значення функції $\Phi(x)$ (або, що те саме, $N_{(0;1)}(x)$) стандартного нормального розподілу наведено у таблиці 2. При цьому скористаємося тим, що значення функції розподілу $\Phi(-\infty) = 0$; $\Phi(+\infty) = 1$. Значення $\Phi(t)$ при від'ємних значеннях аргументу знаходяться у першій частині таблиці 2 у тому рядку, де для t співпадає ціла частина і цифра у розряді десятих, і у тому стовпчику, номер якого співпадає з цифрою, яка стоїть в t у розряді сотих. Аналогічно за другою частиною таблиці 2 шукають значення $\Phi(t)$ для додатних значень аргументу.

$$p_1 = \Phi\left(\frac{8,4 - 8,88}{0,484}\right) - \Phi(-\infty) = \Phi(-0,99) - 0 = 0,1611;$$

$$p_2 = \Phi\left(\frac{8,7 - 8,88}{0,484}\right) - \Phi\left(\frac{8,4 - 8,88}{0,484}\right) = \Phi(-0,37) - \Phi(-0,99) =$$

$$= 0,3557 - 0,1611 = 0,1946;$$

$$p_3 = \Phi\left(\frac{9,3 - 8,88}{0,484}\right) - \Phi\left(\frac{8,7 - 8,88}{0,484}\right) = \Phi(0,87) - \Phi(-0,37) =$$

$$= 0,8078 - 0,3557 = 0,4521;$$

$$p_4 = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{9,3 - 8,88}{0,484}\right) = 1 - \Phi(0,87) = 1 - 0,8078 = 0,1922 .$$

Обчислимо

$$\hat{\chi}^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{\left(7 - 40 \cdot 0,1611\right)^2}{40 \cdot 0,1611} + \frac{\left(10 - 40 \cdot 0,1946\right)^2}{40 \cdot 0,1946} +$$

$$+ \frac{\left(13 - 40 \cdot 0,4521\right)^2}{40 \cdot 0,4521} + \frac{\left(10 - 40 \cdot 0,1922\right)^2}{40 \cdot 0,1922} \approx 2,8 .$$

За таблицею 1 розподілу χ^2 для кількості ступенів свободи $\left(k - s - 1\right) = \left(4 - 2 - 1\right) = 1$ при $\alpha = 0,05$ знайдемо $\chi^2_{\alpha;n} = \chi^2_{0,05;1} = 3,84$.

Отже, $\hat{\chi}^2 \approx 2,8 < 3,84 = \chi^2_{\alpha}$ і при рівні значущості $\alpha = 0,05$ будемо стверджувати, що гіпотеза H_0 про нормальний розподіл середньодобової температури повітря узгоджується з вибірковими даними.

КОНТРОЛЬНЕ ЗАВДАННЯ 15.

Зразок розв’язання завдання 15 див. у прикладі 2.5.

Варіанти завдань для самостійного виконання 14.

Варіант 1. Перевірити, чи узгоджується вибірка при рівні значущості $\alpha = 0,05$

x_i	-1	0	2	3
n_i	40	20	25	15

з розподілом

x_i	-1	0	2	3
P_i	$1/2$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

Варіант 2. Перевірити, чи узгоджується вибірка при рівні значущості $\alpha = 0,01$

x_i	3	4	5	6
n_i	25	30	30	15

з розподілом

x_i	3	4	5	6
P_i	$1/4$	$1/3$	$1/4$	$1/6$

Варіант 3. Перевірити, чи узгоджується вибірка при рівні значущості $\alpha = 0,025$

x_i	0	1	2	3
n_i	10	20	30	10

з розподілом

x_i	0	1	2	3
P_i	$1/6$	$1/3$	$1/3$	$1/6$

Варіант 4. Перевірити, чи узгоджується вибірка при рівні значущості $\alpha = 0,05$

x_i	-1	0	1	2
n_i	40	15	25	20

з розподілом

x_i	-1	0	1	2
P_i	$1/2$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

Варіант 5. Перевірити, чи узгоджується вибірка при рівні значущості $\alpha = 0,01$

x_i	2	4	5	7
n_i	30	30	25	15

з розподілом

x_i	2	4	5	7
P_i	$1/4$	$1/3$	$1/4$	$1/6$

Варіант 6. Перевірити, чи узгоджується вибірка при рівні значущості $\alpha = 0,025$

x_i	-1	0	1	3
n_i	10	20	30	10

з розподілом

x_i	-1	0	1	3
P_i	$1/6$	$1/3$	$1/3$	$1/6$

Варіант 7. Перевірити, чи узгоджується вибірка при рівні значущості $\alpha = 0,05$

x_i	-3	0	1	3
n_i	40	20	25	15

з розподілом

x_i	-3	0	1	3
P_i	$1/2$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

Варіант 8. Перевірити, чи узгоджується вибірка при рівні значущості $\alpha = 0,01$

x_i	1	3	4	6
n_i	25	30	30	15

з розподілом

x_i	1	3	4	6
P_i	$1/4$	$1/3$	$1/4$	$1/6$

Варіант 9. Перевірити, чи узгоджується вибірка при рівні значущості $\alpha = 0,025$

x_i	-2	0	1	3
n_i	40	15	25	20

з розподілом

x_i	-2	0	1	3
P_i	$1/2$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

Варіант 10. Перевірити, чи узгоджується вибірка при рівні значущості $\alpha = 0,05$

x_i	-2	0	2	3
n_i	10	20	30	10

з розподілом

x_i	-2	0	2	3
P_i	$1/6$	$1/3$	$1/3$	$1/6$

КОНТРОЛЬНЕ ЗАВДАННЯ 16.

За результатами 30 вимірів певного параметра отримали варіаційний ряд:

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_k

де x_i – значення параметра, n_i – відповідна частота. Користуючись критерієм χ^2 при рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити гіпотезу про нормальний розподіл досліджуваного параметра.

Зразок розв'язання завдання 16 див. у прикладі 2.6.

Варіанти завдань для самостійного виконання 16.

Варіант 1.

x_i	4,0	4,1	4,3	4,5	4,6	4,9	5,2	5,5
n_i	2	2	4	5	6	7	2	2

Варіант 2.

x_i	3,6	3,7	3,9	4,2	4,4	4,7	4,9	5,1
n_i	3	2	2	7	5	4	4	3

Варіант 3.

x_i	3,8	4,0	4,2	4,4	4,5	4,7	4,9	5,3
n_i	1	2	4	7	5	5	4	2

Варіант 4.

x_i	4,1	4,2	4,5	4,7	4,9	5,1	5,4	5,6
n_i	2	5	4	6	6	3	2	2

Варіант 5.

x_i	4,4	4,5	4,8	4,9	5,2	5,4	5,7	5,9
n_i	2	2	3	3	5	6	6	3

Варіант 6.

x_i	3,0	3,1	3,3	3,5	3,6	3,8	4,2	4,5
n_i	1	2	4	5	6	7	3	2

Варіант 7.

x_i	3,1	3,2	3,5	3,7	3,9	4,1	4,4	4,6
n_i	2	3	4	8	6	3	2	2

Варіант 8.

x_i	4,1	4,3	4,5	4,8	4,9	5,2	5,4	5,6
n_i	2	5	4	7	6	3	2	1

Варіант 9.

x_i	3,8	4,0	4,3	4,4	4,7	4,9	5,2	5,3
n_i	3	2	4	5	7	5	2	2

Варіант 10.

x_i	3,6	3,7	3,9	4,2	4,4	4,7	4,9	5,1
n_i	1	2	4	7	6	5	3	2

ДОДАТОК 1

Розподіл Пірсона

У таблиці 1 наведено значення функції $\chi^2_{\alpha;n}$, або, що те саме, верхні α – границі розподілу Пірсона (χ^2-розподілу) з n ступенями вільності, коротко, χ^2_n-розподілу.

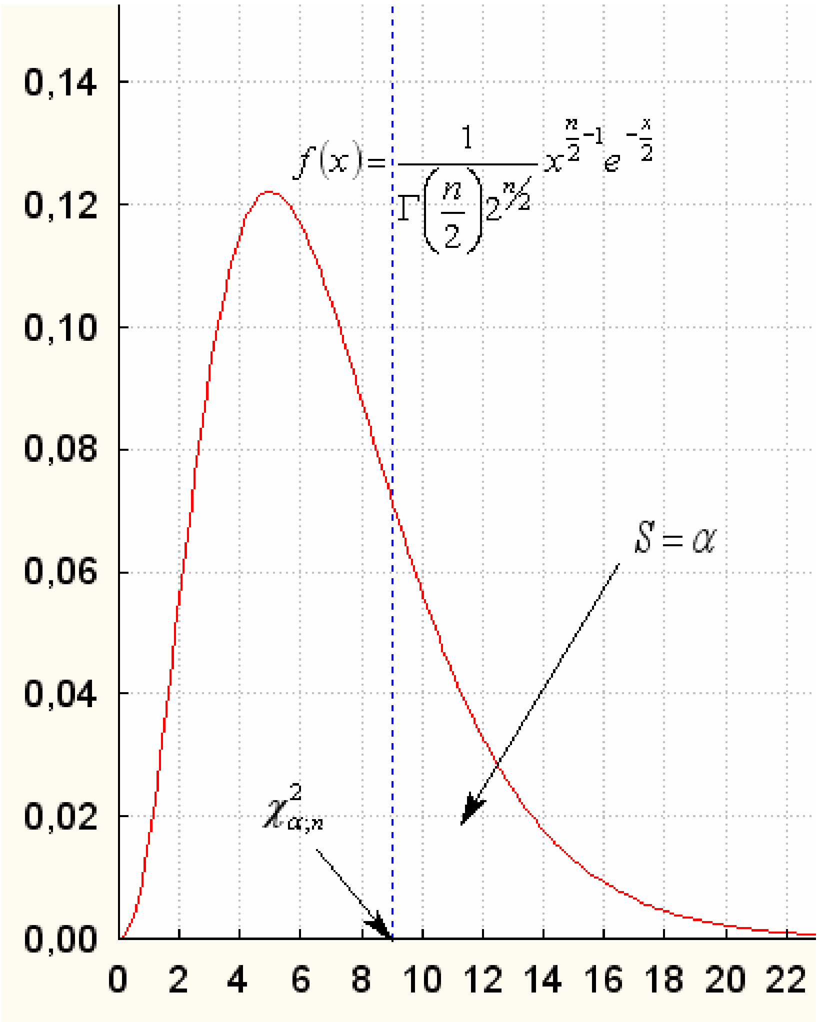


Рис. 1

До означення $\chi^2_{\alpha;n}$ – верхньої α –границі розподілу Пірсона з n ступенями вільності; $f(x)$ – щільність χ^2_n – розподілу,

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)2^{n/2}}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}},\ x>0,\ \Gamma(y)=\int_0^\infty e^{-t}t^{y-1}dt.$$

Значення $\chi^2_{\alpha;n}$ для заданих α та n визначається як розв'язок рівняння

$$\int_{\chi^2_{\alpha;n}}^{+\infty} f(x)dx = \alpha ,$$

де $f(x)$ – щільність χ^2_n-розподілу (Пірсона); $\chi^2_{\alpha;n}$ – число, що відтинає правий "хвіст" χ^2_n-розподілу, на який припадає "маса" α (див. рис. 1).

Таблиця 1. Значення функції $\chi^2_{\alpha;n}$

n	Значення α							
	0,990	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,010
1	0,00	0,00	0,00	0,02	2,71	3,84	5,02	6,64
2	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21
3	0,12	0,22	0,35	0,58	6,23	7,82	9,35	11,34
4	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,48	11,14	13,28
5	0,55	0,83	1,14	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09
6	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81
7	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48
8	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09
9	2,90	2,70	3,32	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67
10	2,56	3,25	3,94	4,86	15,99	18,31	20,48	23,21
11	3,05	3,82	4,58	5,58	17,28	19,68	21,92	24,72
12	3,57	4,40	5,23	6,3	18,55	21,03	23,34	26,22
13	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69
14	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14
15	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58
16	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00
17	6,41	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41
18	7,02	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81
19	7,63	8,91	10,12	11,65	27,2	30,14	32,85	36,19
20	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57
21	8,90	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93
22	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29
23	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64
24	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,92
25	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31
26	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,89	41,92	45,64
27	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96
28	13,56	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,26
29	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59
30	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89
40	22,16	24,43	26,51	29,05	51,80	55,76	59,34	63,69
50	29,71	32,36	34,76	37,69	63,17	67,50	71,42	76,15
60	37,48	40,48	43,19	46,46	74,40	79,08	83,30	88,38
70	45,44	48,76	51,74	55,33	85,53	90,53	95,02	100,4
80	53,54	57,15	60,39	64,28	96,58	101,9	106,6	112,3
90	61,75	65,65	69,13	73,29	107,6	113,1	118,1	124,1
100	70,06	74,22	77,93	82,36	118,5	124,3	129,6	135,8

ДОДАТОК 2

Нормальний розподіл

У таблиці 2 наведено значення функції $\Phi(t)$ нормального розподілу з параметрами (0; 1) (квантилі стандартного нормального розподілу): для заданих t табульовані значення функції

$$N_{0;1}(t) = \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp\left\{-\frac{s^2}{2}\right\} ds.$$

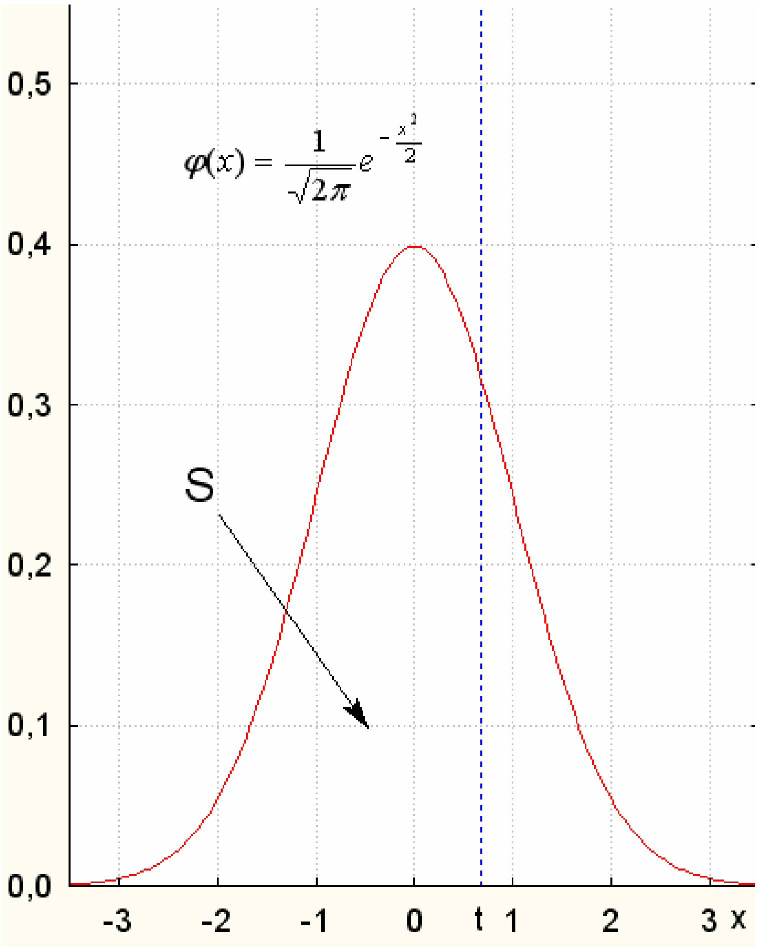


Рис. 2

До означення квантиля нормального розподілу;

$\phi(x)$ – щільність розподілу $N_{0;1}$.

Для кожного t значення $N_{0;1}(t)$ чисельно дорівнює площі S, показаної на рис. 2 фігури.

Значення $N_{a;\sigma^2}(x)$ – функції нормального розподілу з параметрами a і σ^2 – обчислюється за значеннями табульованої функції $N_{0;1}(t) = \Phi(t)$ нормального розподілу $N_{0;1}$:

$$N_{a;\sigma^2}(x) = N_{0;1}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Таблиця 2 допускає лінійну інтерполяцію.

Таблиця 2. Значення функції $\Phi(t)$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-0,0	,5000	,4960	,4920	,4880	,4840	,4801	,4761	,4721	,4681	,4641
-0,1	,4602	,4562	,4522	,4483	,4443	,4404	,4364	,4325	,4286	,4247
-0,2	,4207	,4168	,4129	,4090	,4052	,4013	,3974	,3936	,3897	,3859
-0,3	,3821	,3783	,3745	,3707	,3669	,3632	,3594	,3557	,3520	,3483
-0,4	,3446	,3409	,3372	,3336	,3300	,3264	,3228	,3192	,3156	,3121
-0,5	,3085	,3050	,3015	,2981	,2946	,2912	,2877	,2843	,2810	,2776
-0,6	,2743	,2709	,2676	,2643	,2611	,2578	,2546	,2514	,2483	,2451
-0,7	,2420	,2389	,2358	,2327	,2297	,2266	,2236	,2206	,2177	,2148
-0,8	,2119	,2090	,2061	,2033	,2005	,1977	,1949	,1922	,1894	,1867
-0,9	,1841	,1814	,1788	,1762	,1736	,1711	,1685	,1660	,1635	,1611
-1,0	,1587	,1562	,1539	,1515	,1492	,1469	,1446	,1423	,1401	,1379
-1,1	,1357	,1335	,1314	,1292	,1271	,1251	,1230	,1210	,1190	,1170
-1,2	,1151	,1131	,1112	,1093	,1075	,1056	,1038	,1020	,1003	,0985
-1,3	,0968	,0951	,0934	,0918	,0901	,0885	,0869	,0853	,0838	,0823
-1,4	,0808	,0793	,0778	,0764	,0749	,0735	,0721	,0708	,0694	,0681
-1,5	,0668	,0655	,0643	,0630	,0618	,0606	,0594	,0582	,0571	,0559
-1,6	,0548	,0537	,0526	,0516	,0505	,0495	,0485	,0475	,0465	,0455
-1,7	,0446	,0436	,0427	,0418	,0409	,0401	,0392	,0384	,0375	,0367
-1,8	,0359	,0351	,0344	,0336	,0329	,0322	,0314	,0307	,0301	,0294
-1,9	,0288	,0281	,0274	,0268	,0262	,0256	,0250	,0244	,0239	,0233
-2,0	,0228	,0222	,0217	,0212	,0207	,0202	,0197	,0192	,0188	,0183
-2,1	,0179	,0174	,0170	,0166	,0162	,0158	,0154	,0150	,0146	,0143
-2,2	,0139	,0136	,0132	,0129	,0125	,0122	,0119	,0116	,0113	,0110
-2,3	,0107	,0104	,0102	,0099	,0096	,0094	,0091	,0089	,0087	,0084
-2,4	,0082	,0080	,0078	,0075	,0073	,0071	,0069	,0068	,0066	,0064
-2,5	,0062	,0060	,0059	,0057	,0055	,0054	,0052	,0051	,0049	,0048
-2,6	,0047	,0045	,0044	,0043	,0041	,0040	,0039	,0038	,0037	,0036
-2,7	,0035	,0034	,0033	,0032	,0031	,0030	,0029	,0028	,0027	,0026
-2,8	,0026	,0025	,0024	,0023	,0023	,0022	,0021	,0021	,0020	,0019
-2,9	,0019	,0018	,0018	,0017	,0016	,0016	,0015	,0015	,0014	,0014

t	-3,0	-3,1	-3,2	-3,3	-3,4	-3,5	-3,6	-3,7	-3,8	-3,9
$\Phi(t)$	,0013	,0010	,0007	,0005	,0003	,0002	,0002	,0001	,0001	,0000

Таблиця 2 (закінчення)

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	,5000	,5040	,5080	,5120	,5160	,5199	,5239	,5279	,5319	,5359
0,1	,5398	,5438	,5478	,5517	,5557	,5596	,5636	,5675	,5714	,5753
0,2	,5793	,5832	,5871	,5910	,5948	,5987	,6026	,6064	,6103	,6141
0,3	,6179	,6217	,6255	,6293	,6331	,6368	,6406	,6443	,6480	,6517
0,4	,6554	,6591	,6628	,6664	,6700	,6736	,6772	,6808	,6844	,6879
0,5	,6915	,6950	,6985	,7019	,7054	,7088	,7123	,7157	,7190	,7224
0,6	,7257	,7291	,7324	,7357	,7389	,7422	,7454	,7486	,7517	,7549
0,7	,7580	,7611	,7642	,7673	,7703	,7734	,7764	,7794	,7823	,7852
0,8	,7881	,7910	,7939	,7967	,7995	,8023	,8051	,8078	,8106	,8133
0,9	,8159	,8186	,8212	,8238	,8264	,8289	,8315	,8340	,8365	,8389
1,0	,8413	,8438	,8461	,8485	,8508	,8531	,8554	,8577	,8599	,8621
1,1	,8643	,8665	,8686	,8708	,8729	,8749	,8770	,8790	,8810	,8830
1,2	,8849	,8869	,8888	,8907	,8925	,8944	,8962	,8980	,8997	,9015
1,3	,9032	,9049	,9066	,9082	,9099	,9115	,9131	,9147	,9162	,9177
1,4	,9192	,9207	,9222	,9236	,9251	,9265	,9279	,9292	,9306	,9319
1,5	,9332	,9345	,9357	,9370	,9382	,9394	,9406	,9418	,9429	,9441
1,6	,9452	,9463	,9474	,9484	,9495	,9505	,9515	,9525	,9535	,9545
1,7	,9554	,9564	,9573	,9582	,9591	,9599	,9608	,9616	,9625	,9633
1,8	,9641	,9649	,9656	,9664	,9671	,9678	,9686	,9693	,9699	,9706
1,9	,9713	,9719	,9726	,9732	,9738	,9744	,9750	,9756	,9761	,9767
2,0	,9772	,9778	,9783	,9788	,9793	,9798	,9803	,9808	,9812	,9817
2,1	,9821	,9826	,9830	,9834	,9838	,9842	,9846	,9850	,9854	,9857
2,2	,9861	,9864	,9868	,9871	,9875	,9878	,9881	,9884	,9887	,9890
2,3	,9893	,9896	,9898	,9900	,9904	,9906	,9909	,9911	,9913	,9916
2,4	,9918	,9920	,9922	,9925	,9927	,9929	,9931	,9932	,9934	,9936
2,5	,9938	,9940	,9941	,9943	,9945	,9946	,9948	,9949	,9951	,9952
2,6	,9953	,9955	,9956	,9957	,9959	,9960	,9961	,9962	,9963	,9964
2,7	,9965	,9966	,9967	,9968	,9969	,9970	,9971	,9972	,9973	,9974
2,8	,9974	,9975	,9976	,9977	,9977	,9978	,9979	,9979	,9980	,9981
2,9	,9981	,9982	,9982	,9983	,9984	9984	,9985	,9985	,9986	,9986

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
$\Phi(t)$	,9987	,9990	,9993	,9995	,9997	,9998	,9998	,9999	,9999	1,000

ДОДАТОК 3

Розподіл Стьюдента

Таблиця 3. Значення $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	Значення γ		
	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61
6	2,57	4,03	6,86
7	2,45	3,71	5,96
8	2,37	3,50	5,41
9	2,31	3,36	5,04
10	2,26	3,25	4,78
11	2,23	3,17	4,59
12	2,20	3,11	4,44
13	2,18	3,06	4,32
14	2,16	3,01	4,22
15	2,15	2,98	4,14
16	2,13	2,95	4,07
17	2,12	2,92	4,02
18	2,11	2,90	3,97
19	2,10	2,88	3,92
20	2,093	2,861	3,883
25	2,064	2,797	3,745
30	2,045	2,756	3,659
35	2,032	2,720	3,600
40	2,023	2,708	3,558
45	2,016	2,692	3,527
50	2,008	2,679	3,502
60	2,001	2,662	3,464
70	1,996	2,649	3,439
80	1,991	2,640	3,418
90	1,987	2,633	3,403
100	1,984	2,627	3,392
120	1,980	2,617	3,374
∞	1,960	2,576	3,291

Список літератури

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.,1976.
2. Вища математика. Спеціальні розділи. Книга 2, 2-ге вид., за ред. проф. Кулініча Г.Л. – К.: Либідь, 2003.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Уч. пособие для студентов вузов. – М.: Высш. школа, 1999.
4. Данілов В.Я., Кушніренко С.В. Математична статистика: навчальний посібник. – К.: ВГЛ "Обрії", 2012.
5. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М., 2000.
6. Мишура Ю.С. Методические указания к изучению теории вероятностей и математической статистики. – К., изд-во КГУ, 1984.
7. Турчин В.М. Математична статистика. – К., ВЦ: Академія, 1999.
8. Чертко Н.К. Математические методы в физической географии. – Минск, изд-во: Университетское, 1987.