Розв'язання задач 11 — 15

Розділ веде Юхим Рабінович[1]

11. На дошці записали всі натуральні числа від 1 до 2015 — частину чисел червоною крейдою, а решту синьою. Відомо, що найбільше синє число дорівнює кількості синіх чисел, а найменше червоне число дорівнює кількості червоних. Скільки червоних чисел на дошці?

Відповідь: 1008.

Розв'язок. Нехай x — найбільше синє число. Тоді синіми є всі числа $1, 2, \ldots, x$ та лише вони, бо якщо існує хоча б одне менше за x червоне число, то синіх чисел буде менше за x. Отже, червоними є $2015 - x$ чисел $x + 1, x + 2, \ldots, 2015$. Найменше червоне число $x + 1$ дорівнює кількості червоних чисел, якщо $x + 1 = 2015 - x$, тобто при $x = 1007$ та $x + 1 = 1008$.

12. У школі є 810 учнів. Шкільна їдальня пропонує обід з п'яти страв. Кожна страва подобається рівно половині всіх учнів. Учень замовляє обід, якщо йому подобаються хоча б три страви. Яка найбільша кількість учнів може замовити обід в їдальні?

Відповідь: 675 учнів.

Розв'язок. Припустимо, що кожен учень замовив лише ті страви, які йому подобаються (за умови, що їх хоча б три). Тоді кожну страву замовили не більше ніж 405 учнів, тобто було замовлено не більше за $405 \cdot 5 = 2025$ страв. Оскільки кожен учень замовив принаймні три страви, то учнів, які замовили обід, не більше за $2025 : 3 = 675$.

Покажемо, що така кількість учнів справді могла замовити обід. Нехай кожен учень ставить біля номера страви плюс, якщо йому ця страва подобається, та мінус, якщо не подобається. Якщо утворилися шість комбінацій знаків, показаних у таблиці, причому кожен стовпчик таблиці обрали 135 учнів, то кожна страва подобається половині учнів, а обід замовлять $135 \cdot 5 = 675$ учнів, які обрали перші п'ять комбінацій знаків.

1	+	−	−	+	+	−
2	+	+	−	−	+	−
3	+	+	+	−	−	−
4	−	+	+	+	−	−
5	−	−	+	+	+	−

13. Знайдіть найбільшу кількість різних натуральних чисел таких, що сума довільних двох з них є натуральним степенем двійки.

Відповідь: два числа.

Розв'язок. Припустимо, що існують такі натуральні числа $a < b < c$, для яких $a + b < a + c < b + c$ — різні степені двійки. Найбільший з трьох різних натуральних степенів двійки завжди більший за суму двох інших, бо якщо $k < l < m$, то

$$2^k + 2^l < 2^l + 2^l = 2^{l+1} \leq 2^m.$$

Але $(a + b) + (a + c) > b + c$, суперечність. Отже, чисел з потрібною властивістю щонайбільше два. Наприклад, умову задовольняють числа 1 та 3.

[1] вчитель математики гімназії № 178 м. Києва

14. На стороні AB трикутника ABC відмітили точки M та N так, що $BM = BC$ і $AN = AC$. Потім на сторонах BC і AC відмітили точки P і Q відповідно так, що $BP = BN$ і $AQ = AM$. Довести, що точки C, Q, M, N і P лежать на одному колі.

Розв'язок. Трикутники BCM та BPN рівнобедрені та мають спільну вершину (рис. 1). Тому $\angle PCM = \angle PNB = 180^\circ - \angle PNM$, а отже чотирикутник $CPNM$ вписаний. Аналогічно чотирикутник $CQMN$ вписаний. Таким чином, точки P та Q належать описаному колу трикутника CMN.

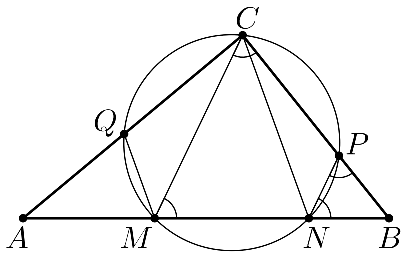

Рис. 1.

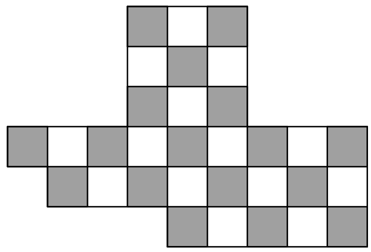
Рис. 2.

15. З аркуша клітчастого паперу вирізали по лініях сітки многокутник без дірок. Відомо, що його можна розрізати по лініях сітки на прямокутники 1×2. Довести, що у цього многокутника є хоча б одна сторона парної довжини.

Розв'язок. Розфарбуємо клітинки многокутника у чорний та білий кольори у шаховому порядку. Оскільки многокутник можна розрізати на прямокутники 1×2, то чорних та білих клітинок однакова кількість. Тому загальна кількість сторін усіх чорних клітинок дорівнює загальній кількості сторін усіх білих клітинок. Кожна сторона клітинки, яка не прилягає до межі многокутника, є спільною для деяких чорної та білої клітинок. Отже, кількості сторін чорних та білих клітинок, які прилягають до межі многокутника, теж мають бути рівними. Припустимо, що всі сторони многокутника мають непарну довжину. Вздовж кожної сторони многокутника чорні та білі клітинки чергуються. Якщо серед клітинок, які прилягають до деякої сторони, перша та остання клітинки чорні (рис. 2), то і серед клітинок, які прилягають до сусідньої сторони, перша та остання клітинки чорні. Тоді на всій межі многокутника сторін чорних клітинок більше, ніж сторін білих клітинок, суперечність.

СПИСОК ЧИТАЧІВ, ЩО НАДІСЛАЛИ ПРАВИЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ

Шкірко Ілля *(6 клас, м. Харків)* 11;
Шраменко Вадим *(8 клас, м. Черкаси)* 13, 14.