Конкурс "Від задачок до задач"

Розв'язання задач 6 — 10

Розділ веде Юхим Рабінович[1]

6. Чи може десятковий запис двох степенів числа 5 відрізнятися лише порядком цифр?

Відповідь: ні.

Розв'язання. Припустимо, що десятковий запис чисел 5^k та 5^n, де $k < n$, відрізняється лише порядком цифр. Якщо $n \geq k+2$, то $5^n \geq 25 \cdot 5^k$ та 5^n містить більше цифр, ніж 5^k. Тому $n = k+1$. Але якщо числа мають однакову суму цифр, то вони дають однакові остачі при діленні на 3, а остачі сусідніх степенів 5 від ділення на 3 є різними, суперечність.

7. Розріжте зображену на рис. 1 фігуру по лініях клітинок на декілька однакових частин. Частин має бути принаймні дві та у кожній частині має бути хоча б дві клітинки.

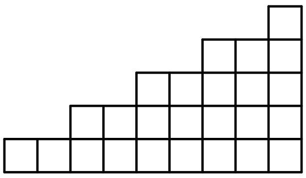

Рис. 1.

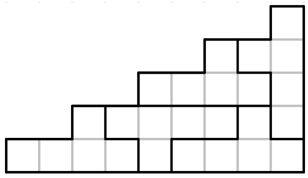

Рис. 2.

Відповідь: див. рис. 2.

Розв'язання. Оскільки фігура складається з 25 клітинок та 25 є добутком двох однакових простих множників, то фігуру можна розрізати лише на 5 частин по 5 клітинок. Зрозуміло, що три крайні зліва клітинки у нижньому рядку на рис. 1 мають належати одній частині, тому нескладно відновити форму частини та дістати шукане розрізання (рис. 2).

8. Сашко та троє його однокласників одночасно стартували у забігу на 200 метрів. Через 12 секунд після початку забігу ніхто ще не фінішував, а всі його учасники разом пробігли 288 метрів. Коли Сашко фінішував, іншим трьом учасникам забігу залишилось пробігти до фінішу в сумі 32 метри. За який час Сашко пробіг всю дистанцію? (Швидкість кожного учасника є сталою протягом усієї дистанції.)

Відповідь: 32 с.

Розв'язання. Оскільки учасники забігу пробігли 288 метрів за 12 секунд, то сума їх швидкостей 24 м/с. Нехай Сашко пробіг 200 метрів за t секунд. За цей час його однокласники пробігли $3 \cdot 200 - 32 = 568$ метрів, тобто разом з Сашком вони пробігли 768 метрів. Тому $t = \frac{768}{24} = 32$.

9. Натуральні числа, які дорівнюють сумі всіх своїх дільників, відмінних від самого числа, називають *досконалими*. Наприклад, досконалими є числа 6 $(6 = 1 + 2 + 3)$ і

[1] вчитель математики гімназії № 178 м. Києва

28 ($28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$). Довести, що сума чисел, обернених до всіх дільників досконалого числа, дорівнює 2.

Розв'язання. Нехай n — досконале число, $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{k-1} < d_k = n$ — всі його дільники. Якщо d — дільник n, то $\frac{n}{d}$ теж є дільником n. Звідси випливає, що $\frac{n}{d_1} > \frac{n}{d_2} > \ldots > \frac{n}{d_{k-1}} > \frac{n}{d_k}$ — всі дільники числа n, записані у протилежному порядку. Тому

$$\frac{n}{d_1} + \frac{n}{d_2} + \ldots + \frac{n}{d_{k-1}} + \frac{n}{d_k} = d_1 + d_2 + \ldots + d_{k-1} + d_k = (d_1 + d_2 + \ldots + d_{k-1}) + n = 2n,$$

а отже $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_{k-1}} + \frac{1}{d_k} = 2$.

10. Чи може сума довжин медіани, бісектриси та висоти деякого трикутника дорівнювати його периметру, якщо

а) ці відрізки проведено з трьох різних вершин?

б) ці відрізки проведено з однієї вершини?

Відповідь: а) ні; б) так.

Розв'язання. а) Нехай a, b, c — сторони трикутника. Якщо h_a, l_a, m_a — довжини висоти, бісектриси та медіани, проведених до сторони a, то $h_a \le l_a \le m_a$. Також медіана трикутника менша за півсуму сторін, між якими вона знаходиться. Тому

$$m_a + l_b + h_c \le m_a + m_b + m_c < \tfrac{1}{2}(b + c) + \tfrac{1}{2}(a + c) + \tfrac{1}{2}(a + b) = a + b + c.$$

Отже, сума медіани, бісектриси та висоти трикутника, проведених з трьох різних вершин, завжди менша за периметр.

б) Нехай ABC — рівнобедрений трикутник ($AB = AC$), AD — висота, бісектриса та медіана (рис. 3). Позначимо $AB = AC = x$, $BD = CD = y$, $AD = z$. Тоді сума медіани, бісектриси та висоти, проведених з вершини A, буде дорівнювати периметру, якщо $3z = 2x + 2y$. За теоремою Піфагора з триктника ABD дістаємо, що $x^2 = y^2 + z^2$. Отже, $\frac{2}{3}(x + y) = z$ та $(x - y)(x + y) = z^2$. Звідси

$$\tfrac{3}{2}(x - y) = z = \tfrac{2}{3}(x + y), \quad 9(x - y) = 4(x + y), \quad 5x = 13y.$$

Тому умову задовольняє, наприклад, рівнобедрений трикутник з бічною стороною $x = 13$, основою $2y = 10$ та висотою $z = 12$.

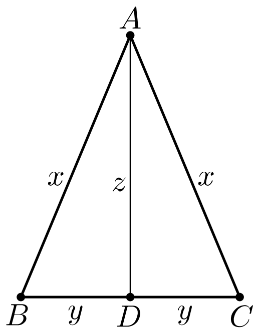

Рис. 3.

СПИСОК ЧИТАЧІВ, ЩО НАДІСЛАЛИ ПРАВИЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ

Коломієць Анна *(9 клас, м. Черкаси)* 7, 8, 9, 10;
Нєстєрова Світлана *(7 клас, м. Лисичанськ)* 7, 8, 9;
Пожуєв Володимир *(9 клас, м. Запоріжжя)* 7, 8, 9, 10;
Прохорчук В'ячеслав *(6 клас, м. Харків)* 1 (з попереднього номера);
Теодоров Ілля *(6 клас, м. Запоріжжя)* 7, 8;
Шкірко Ілля *(6 клас, м. Харків)* 6, 7, 8, 9;
Шраменко Вадим *(8 клас, м. Черкаси)* 7, 8, 10 а).