Конкурс “Від задачок до задач”
Розв’язання задач 11 — 15

Розділ веде Олена Харік[1]

11. Сьогодні три зошити та один олівець коштують стільки, як п’ять зошитів вчора, а два зошити та один олівець — як три зошити та один олівець вчора. Що дорожче: один зошит та два олівці сьогодні, чи п’ять олівців вчора?

Відповідь: порівну.

Розв’язок. Сьогодні 9 зошитів та 3 олівці коштують стільки, як 15 зошитів вчора, а 10 зошитів та 5 олівців — як 15 зошитів та 5 олівців вчора. Тому 5 олівців вчора коштували рівно стільки, як 1 зошит та 2 олівці сьогодні.

12. Петрик задумав число від 1 до 10. Василько може назвати будь-яке своє число, а Петрик назве найбільший спільний дільник свого числа та числа Василька. Чи може Василько назвати таке число, щоб за відповіддю Петрика дізнатись, яке число він задумав?

Відповідь: так, може.

Розв’язок. Якщо Василько назве, наприклад, число $2520 = 8 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7$, яке ділиться на всі числа від 1 до 10, то відповідь Петрика і буде задуманим числом.

13. У чотирикутнику $ABCD$ відомо, що

$$\angle ABC + \angle DBC = 180^\circ \text{ та } \angle ADC + \angle BDC = 180^\circ.$$

Доведіть, що центр кола, описаного навколо трикутника BCD, лежить на діагоналі AC.

Розв’язок. Кут DBC дорівнює куту, суміжному з кутом ABC, тому BC — бісектриса зовнішнього кута при вершині B трикутника ABD (рис. 1). Аналогічно DC — бісектриса зовнішнього кута при вершині D трикутника ABD, а тому AC — бісектриса кута BAD. Нехай тепер I — точка перетину бісектрис трикутника ABD. Тоді $\angle IBC = \angle IDC = 90^\circ$ як кути між бісектрисами суміжних кутів. Тому чотирикутник $IBCD$ є вписаним у коло з діаметром IC. Центр цього кола O є серединою відрізка IC, а отже лежить на AC.

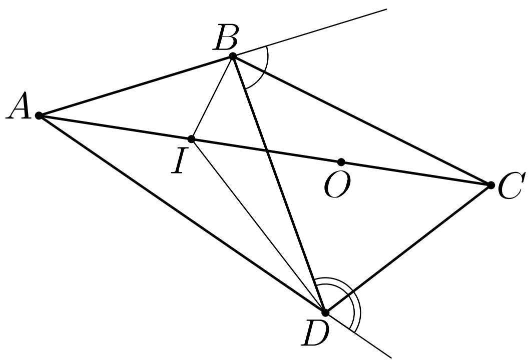

Рис. 1.

[1] вчитель математики Харківського фізико-математичного ліцею № 27

14. Нехай a, b, c — сторони трикутника, а p — півпериметр цього трикутника. Доведіть, що

$$\frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c} \geq 6.$$

Розв'язок. Нехай $p-a = x$, $p-b = y$, $p-c = z$, тоді $a = y+z$, $b = x+z$, $c = x+y$. Звідси

$$\frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c} = \frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} =$$
$$= \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) \geq 6,$$

оскільки сума виразів у кожній з дужок не менша за 2.

Зауваження. Рівність досягається при $x = y = z$, звідки $a = b = c$, тобто трикутник рівносторонній.

15. П'ятикутник $ABCDE$ розбито діагоналями на 11 частин: десять трикутників і один п'ятикутник. Чи можна записати у кожну з цих частин деяке натуральне число так, щоб у всіх трикутниках, вершинами яких є деякі три з точок A, B, C, D, E, суми чисел були однаковими?

Відповідь: можна.

Розв'язок. Розставимо числа, як на рис. 2. Тоді умова задачі буде виконуватися, якщо $2a+b = a+3b+c$, тобто $a = 2b+c$. Наприклад, можна взяти $b = c = 1$ та $a = 3$.

Зауваження. Умову задачі можна виконати, використавши всі числа від 1 до 11 по одному разу (рис. 3).

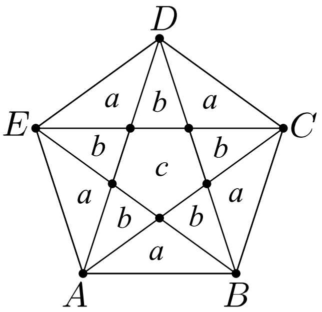

Рис. 2.

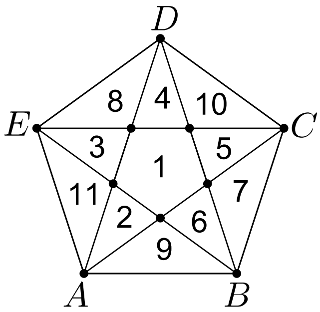

Рис. 3.

СПИСОК ЧИТАЧІВ, ЩО НАДІСЛАЛИ ПРАВИЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ

Кутах Анастасія *(6 клас, м. Харків)* 11, 12, 15;
Осташев Даніїл *(6 клас, м. Харків)* 11, 12, 14;
Ракова Тетяна *(6 клас, м. Харків)* 11, 12;
Світличний Єгор *(6 клас, м. Харків)* 11;
Селіханович Даніїл *(10 клас, м. Одеса)* 11, 12, 13, 14, 15;
Шлапак Ярина *(7 клас, м. Київ)* 11, 12, 13, 14, 15.