Конкурс “Від задачок до задач”

Розв’язання задач 6 — 10

Розділ веде Олена Харік[1]

6. Розв’яжіть ребус

$$(\text{СІ} + \text{Р}) \cdot \text{І} \cdot \text{УС} = 2014$$

(однаковими буквами позначено однакові цифри, а різними — різні).

Відповідь: $(31 + 7) \cdot 1 \cdot 53 = 2014$.

Розв’язок. Розкладемо число 2014 на прості множники: $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$. Звідси $\text{І} = 1$ або $\text{І} = 2$. Далі, $\text{СІ}+\text{Р} \le 92+8 = 100$, а тому число $\text{СІ}+\text{Р}$ є двохцифровим. Тоді $\text{СІ} + \text{Р}$ та УС — деякі два з чисел 19, 38 та 53, причому перша цифра числа $\text{СІ} + \text{Р}$ не менша за другу цифру числа УС. Отже, $\text{СІ} + \text{Р} = 38$ та $\text{УС} = 53$. Тепер легко встановити, що $\text{І} = 1, \text{С} = 3, \text{У} = 5, \text{Р} = 7$. Залишається зробити перевірку.

7. Чи можна розташувати на площині 8 точок та сполучити їх відрізками так, щоб кожну точку було сполучено рівно з 4 іншими точками, а жодні два відрізка не перетиналися?

Відповідь: Можна.

Розв’язок. Один з можливих прикладів зображено на рис. 1.

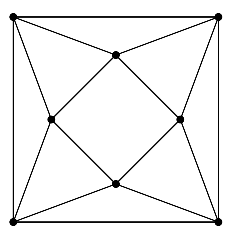

Рис. 1.

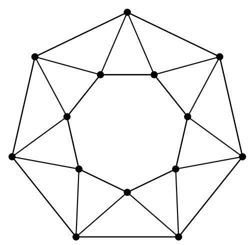

Рис. 2.

Зауваження. Наведений приклад легко узагальнити на $2n$ точок ($n \ge 3$). На рис. 2 зображено приклад для $n = 7$.

8. Чи можна а) числа $1, 2, 3, \dots, 9, 10$; б) числа $1, 2, 3, \dots, 10, 11$ розподілити на дві групи таким чином, щоб суми квадратів чисел у групах були однаковими?

Відповідь: а) Не можна; б) Можна.

Розв’язок. а) Якби шуканий розподіл на групи був можливим, то сума квадратів усіх чисел від 1 до 10 була би парною, а це не так, бо серед даних чисел 5 непарних.

б) Неважко перевірити, що $1^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 9^2 + 11^2 = 2^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 10^2 = 253$.

9. До сторін AB та CD ромба $ABCD$ проведено серединні перпендикуляри. Виявилося, що вони розділили діагональ AC на три рівні частини. Знайдіть висоту ромба, якщо $AB = 1$.

Відповідь: $\frac{\sqrt{15}}{4}$ або $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв’язок. Нехай CH — висота ромба, MK — серединний перпендикуляр до AB. За умовою $CK = \frac{1}{3}AC$ (рис. 2) або $AK = \frac{1}{3}AC$ (рис. 3). Розглянемо ці випадки окремо.

[1]вчитель математики Харківського фізико-математичного ліцею № 27

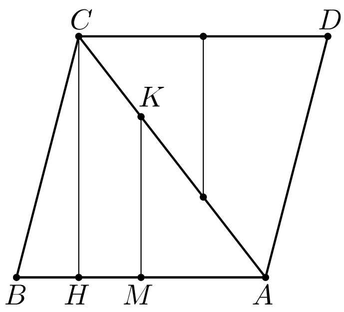

Рис. 2.

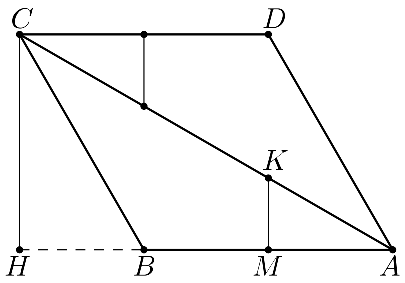

Рис. 3.

Нехай $CK = \frac{1}{3}AC$. Оскільки $CH \parallel KM$, то за теоремою про пропорційні відрізки $AM : AH = AK : AC = 2 : 3$. Оскільки $AM = \frac{1}{2}$, то $AH = \frac{3}{4}$, $BH = AB - AH = \frac{1}{4}$ та з прямокутного трикутника BCH дістаємо $CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Аналогічно якщо $AK = \frac{1}{3}AC$, то $AM : AH = AK : AC = 1 : 3$. Оскільки $AM = \frac{1}{2}$, то $AH = \frac{3}{2}$, $BH = AH - AB = \frac{1}{2}$ та $CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

10. Знайдіть усі натуральні n такі, що числа $4n + 5$ та $9n + 4$ є квадратами цілих чисел.

Відповідь: $n = 5$.

Розв'язок. I спосіб. Нехай натуральні числа m та k є такими, що $4n + 5 = k^2$ та $9n + 4 = m^2$. Тоді $9k^2 = 36n + 45$ та $4m^2 = 36n + 16$, звідки

$$9k^2 - 4m^2 = (3k - 2m)(3k + 2m) = 29.$$

Оскільки 29 — просте число, то це можливо лише при $3k - 2m = 1$, $3k + 2m = 29$. Звідси $k = 5$, $m = 7$ та $n = 5$.

II спосіб. Якщо числа $4n+5$ та $9n+4$ є точними квадратами, то їх добуток також є квадратом цілого числа. Нехай $(4n+5)(9n+4) = 36n^2+61n+20 = a^2$, де a натуральне, тоді $36n^2 + 61n + 20 - a^2 = 0$. Розглянемо останню рівність як квадратне рівняння відносно n. Це рівняння може мати цілий корінь лише за умови, що його дискримінант $D = 61^2 - 4\cdot 36\cdot(20 - a^2) = 841 + (12a)^2$ є точним квадратом. Нехай $841 + (12a)^2 = b^2$, де b натуральне. Тоді $(b - 12a)(b + 12a) = 841$, а оскільки $841 = 29^2$ — квадрат простого числа та $0 < b - 12a < b + 12a$, то це можливо лише при $b - 12a = 1$, $b + 12a = 841$. Звідси $a = 35$ та з рівняння $36n^2 + 61n - 1205 = 0$ знаходимо $n = 5$ (другий корінь не є цілим). Залишається зробити перевірку: $4 \cdot 5 + 5 = 5^2$ та $9 \cdot 5 + 4 = 7^2$.

СПИСОК ЧИТАЧІВ, ЩО НАДІСЛАЛИ ПРАВИЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ

Бородін Сергій *(8 клас, м. Харків)* 6, 7, 8б);
Кутах Анастасія *(5 клас, м. Харків)* 6, 7, 8а);
Пожидаєв Олександр *(8 клас, м. Одеса)* 6, 7, 8, 10;
Пожидаєв Максим *(9 клас, м. Одеса)* 6, 7, 8, 10;
Рассоха Юрій *(5 клас, м. Харків)* 6, 7, 8а);
Селіханович Даніїл *(9 клас, м. Одеса) 6, 7, 8, 9, 10.*
Шлапак Ярина *(6 клас, м. Київ) 6, 7, 8, 10.*