Конкурс “Від задачок до задач”
Розв’язання задач 1 — 5

Розділ веде Олена Харік[1]

1. Чи існує складене десятицифрове число, в записі якого присутні всі цифри від 0 до 9, яке залишиться складеним, якщо викреслити будь-яку з його цифр?

Відповідь: існує.

Розв’язок. Умову задовольняє, наприклад, число 1234567980. Воно є парним, а після викреслювання будь-якої цифри залишиться число з останньою цифрою 0 або 8, яке теж є парним, а отже складеним.

Зауваження. Число 1357924680 залишається парним, а отже складеним, при викреслюванні від однієї до чотирьох цифр, а число 7931524680 залишається складеним, навіть якщо викреслити довільні сім цифр! Справді, якщо не викреслити хоча б одну з його останніх шести цифр, то залишиться число, яке є парним або ділиться на 5. Якщо викреслити останні шість цифр, то залишиться число 7931, яке ділиться на 11. Якщо ж викреслити ще одну цифру, то дістанемо одне з чисел $931 = 7^2 \cdot 19$, $731 = 17 \cdot 43$, $791 = 7 \cdot 113$ та $793 = 13 \cdot 61$.

2. Чи можна на шахову дошку виставити декілька коней так, щоб кожен кінь бив рівно трьох інших?

Відповідь: так, можна.

Розв’язок. На рис. 1, рис. 2 та рис. 3 зображено приклади потрібного розташування 8 та 16 коней (для наочності коней, які б’ють один одного, сполучено відрізками).

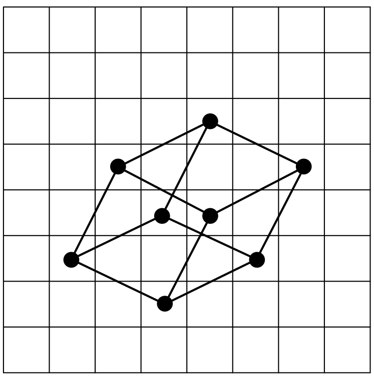

Рис. 1.

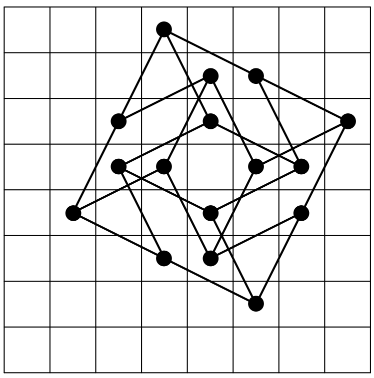

Рис. 2.

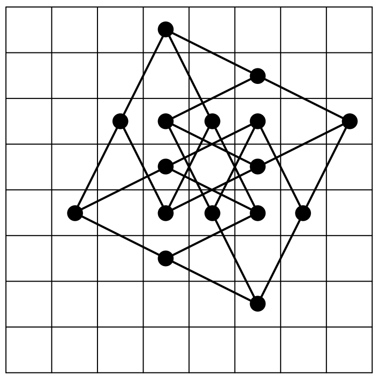

Рис. 3.

3. Знайдіть значення виразу

$$\frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + 2012 \cdot 2013 + 2013 \cdot 2014}{1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + 2011^2 + 2013^2}.$$

Відповідь: 2.

[1] вчитель математики Харківського фізико-математичного ліцею № 27

Розв'язок. Розглянемо чисельник:

$$\begin{aligned}1\cdot 2+&2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+2012\cdot 2013+2013\cdot 2014=\\&=(0\cdot 1+1\cdot 2)+(2\cdot 3+3\cdot 4)+\ldots+(2012\cdot 2013+2013\cdot 2014)=\\&=1\cdot(0+2)+3\cdot(2+4)+\ldots+2013\cdot(2012+2014)=\\&=1\cdot 2\cdot 1+3\cdot 2\cdot 3+\ldots+2013\cdot 2\cdot 2013=2(1^2+3^2+\ldots+2013^2).\end{aligned}$$

Отже, чисельник удвічі більший за знаменник.

4. Для яких простих чисел p число $p^3+p^2+11p+2$ є простим?

Відповідь: $p=3$.

Розв'язок. Якщо $p=3$, то $p^3+p^2+11p+2=71$ є простим. Покажемо, що інших розв'язків немає. Справді, якщо просте число $p\neq 3$, то $p=3n\pm 1$. Звідси

$$p^2+2=(3n\pm 1)^2+2=9n^2\pm 6m+3$$

ділиться на 3, а тому $p^3+p^2+11p+2=(p+1)(p^2+2)+9p$ теж ділиться на 3 та не може бути простим.

5. Трапецію складено з трьох рівних прямокутних рівнобедрених трикутників як показано на рис. 4. Треба розрізати її на 4 рівних частини. Як це зробити?

Розв'язок. Шукане розрізання зображено на рис. 5.

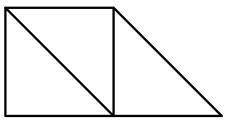

Рис. 4.

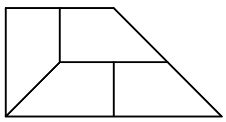

Рис. 5.

СПИСОК ЧИТАЧІВ, ЩО НАДІСЛАЛИ ПРАВИЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ

Бородін Сергій *(8 клас, м. Харків)* 1, 2, 4, 5;
Кутах Анастасія *(5 клас, м. Харків)* 1, 3, 5;
Осташев Даніїл *(5 клас, м. Харків)* 2, 3, 4, 5;
Пожидаєв Максим *(9 клас, м. Одеса)* 1, 2, 3, 4, 5;
Рассоха Юрій *(5 клас, м. Харків)* 1, 5;
Селіханович Даніїл *(9 клас, м. Одеса) 1, 2, 3, 4, 5;*
Шлапак Ярина *(6 клас, м. Київ) 1, 2, 3, 4, 5.*