Конкурс “Від задачок до задач”

Розв’язання задач 11 — 15

Розділ ведуть Віталій Полонський та Михайло Якір

11. Наведіть приклад таких 100 попарно різних множин, що об’єднання будь-яких двох з них співпадає з об’єднанням усіх даних множин.

Розв’язок. Шуканий набір множин можна побудувати, наприклад, так: розглянути множину $A = \{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$, а також множини

$$B_1 = A\backslash\{1\},\ B_2 = A\backslash\{2\},\ \ldots,\ B_{100} = A\backslash\{100\}.$$

Зрозуміло, що множини B_1, B_2, …, B_{100} задовольняють умову задачі.

12. Доведіть, що значення виразу $\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2010}\right) 2010!$ ділиться на 2011.

Розв’язок. Перетворимо даний вираз:

$$\left(1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{2010}\right)2010! = \left(\left(1 + \tfrac{1}{2010}\right) + \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2009}\right) + \ldots + \left(\tfrac{1}{1005} + \tfrac{1}{1006}\right)\right)2010! =$$
$$= \left(\tfrac{2011}{1\cdot 2010} + \tfrac{2011}{2\cdot 2009} + \ldots + \tfrac{2011}{1005\cdot 1006}\right)2010!$$

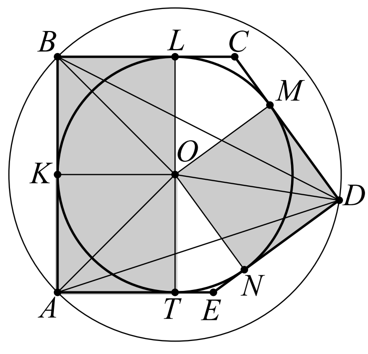
Тепер твердження задачі стає очевидним.

13. У п’ятикутник $ABCDE$ можна вписати коло. Крім того, відомо, що

$$\angle ABC = \angle BAE = \angle CDE = 90^\circ.$$

Знайдіть градусну міру кута ADB.

Відповідь: 45°.



Розв’язок. Нехай O — центр кола, вписаного в п’ятикутник. Проведемо перпендикуляри OK, OL, OM, ON та OT до сторін AB, BC, CD, DE та EA відповідно. Оскільки проведені відрізки є радіусами кола, то чотирикутники $AKOT$, $KBLO$ та $OMDN$ — рівні квадрати. Діагоналі OA, OB і OD цих квадратів рівні, тому O — центр кола, описаного навколо трикутника ADB. Отже, $\angle ADB = \frac{1}{2}\angle AOB = 45^\circ$.

14. Чи є правильним твердження, що будь-який трикутник можна розрізати на 1000 частин, з яких можна скласти квадрат?

Відповідь: Ні.

Розв’язок. Розглянемо прямокутний трикутник ABC з катетами $AC = 2000$ і $BC = \frac{1}{1000}$. Його площа дорівнює 1. Припустимо, що цей трикутник можна розрізати на 1000 частин, з яких можна скласти квадрат. Тоді площа цього квадрата має дорівнювати 1. Розіб’ємо катет AC завдовжки 2000 на 1000 рівних відрізків точками

$$A = A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_{999},\ A_{1000} = C.$$

Оскільки частин 1000, а точок 1001, то які-небудь дві з цих точок потраплять в одну частину. Ця частина не може поміститися в квадрат, оскільки відстань між будь-якими двома з точок $A_0, \ldots, A_{1000}$ не менша ніж 2, а відстань між будь-якими двома точками квадрата не перевищує $\sqrt{2}$. Отримана суперечність показує, що такий трикутник не можна розрізати на 1000 частин, з яких можна скласти квадрат.

15. Чи існує нескінченна арифметична прогресія (з відмінною від нуля різницею), кожний член якої є квадратом натурального числа?

Відповідь: Ні, не існує.

Розв'язок. Будемо міркувати від супротивного.

Припустимо, що така прогресія існує, і числа $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots, a_n^2, \ldots$ $(a_i \in \mathbb{N})$ є послідовними членами цієї прогресії. Маємо $a_2^2 - a_1^2 = a_3^2 - a_2^2$, тобто $(a_2 - a_1)(a_2 + a_1) = (a_3 - a_2)(a_3 + a_2)$. Оскільки $a_2 + a_1 < a_3 + a_2$, то звідси $a_2 - a_1 > a_3 - a_2$. Міркуючи аналогічно, дістаємо, що

$$a_3 - a_2 > a_4 - a_3 > a_5 - a_4 > \ldots > a_{n+1} - a_n > \ldots$$

Таким чином, послідовність $b_n = a_{n+1} - a_n$ є спадною і при цьому складається з натуральних чисел. Зрозуміло, що така послідовність нескінченною бути не може.

СПИСОК ЧИТАЧІВ, ЩО НАДІСЛАЛИ ПРАВИЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ

Анатолій Мамулат *(10 клас, с. Йосипівка, Одеська обл.)* 11;
Дмитро Нестеренко *(8 клас, м. Одеса)* 11, 12, 13, 15;
Герман Хівренко *(7 клас, м. Київ)* 11, 12, 13.