Конкурс “Від задачок до задач”

Розв’язання задач 6 — 10

Розділ ведуть Віталій Полонський та Михайло Якір

6. Чи існує 2010-цифрове натуральне число n, десятковий запис якого не містить цифри 0 і яке дорівнює сумі двох доданків, кожний з яких отримано в результаті деякої перестановки цифр числа n?

Відповідь: існує.

Розв’язок. Помітимо, що $954 = 459 + 495$. Тепер зрозуміло, що записавши число 954 в рядок послідовно 670 разів ($2010 : 3 = 670$) отримаємо запис шуканого числа n.

7. Усі інспектори ДАІ одного району отримали однакову зарплату. Деякі з них згадали, що за останній місяць порушили кілька статей Правил дорожнього руху. Після того, як усі порушники сплатили відповідні штрафи кожному зі своїх колег, виявилося, що у інспектора Петренка від зарплати залишилися 108 гривень, а у інспектора Коваленка — 97 гривень. Скільки інспекторів ДАІ працює в цьому районі?
Примітка. Штраф за будь-яке порушення складає ціле число гривень.

Відповідь: 11 інспекторів ДАІ.

Розв’язок. Покажемо, що різниця сум грошей у Петренка і Коваленка в будь-який момент часу кратна n — кількості інспекторів, які працюють в цьому районі.

Одразу після отримання зарплати ця різниця дорівнює нулю.

Нехай в деякий момент кількість гривень, які мають Петренко і Коваленко, дорівнюють $S_{\text{П}}$ і $S_{\text{К}}$ відповідно, причому $S_{\text{П}} - S_{\text{К}}$ ділиться на n. Якщо штраф за порушення в розмірі m гривень виплатить який-небудь третій інспектор, то ці суми стануть рівними $S_{\text{П}} + m$ і $S_{\text{К}} + m$ відповідно. Тоді маємо

$$(S_{\text{П}} + m) - (S_{\text{К}} + m) = S_{\text{П}} - S_{\text{К}} \,\vdots\, n.$$

Якщо штраф у розмірі t гривень усім своїм колегам виплатить Петренко, то суми грошей у Петренка і Коваленка дорівнюватимуть $S_{\text{П}} - (n-1)t$ і $S_{\text{К}} + t$ відповідно. Тоді

$$(S_{\text{П}} - (n-1)t) - (S_{\text{К}} + t) = S_{\text{П}} - S_{\text{К}} - nt \,\vdots\, n.$$

Аналогічно розглядається випадок, коли штраф виплатить Коваленко.

Оскільки після виплати всіх штрафів виявилося, що $S_{\text{П}} - S_{\text{К}} = 108 - 97 = 11$, то $11 \,\vdots\, n$. Крім того, зрозуміло, що $n > 1$.

Зауваження. Якщо кількість інспекторів дорівнює 11, то описані в умові задачі події справді могли відбутись: наприклад, спочатку у всіх інспекторів було по 107 гривень, а потім інспектор Коваленко сплатив кожному з колег по 1 гривні.

8. Доведіть, що рівняння $x^2 + y^2 + z^2 - 7 = xy + yz + zx$ має безліч розв’язків у натуральних числах.

Розв’язок. Помноживши обидві частини рівняння на 2, отримуємо

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 14 = 2xy + 2yz + 2zx.$$

Звідси $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=14$. Тепер можна помітити, що будь-яка трійка чисел (x,y,z) така, що $x=n$, $y=n+1$, $z=n+3$, задовольняє рівняння.

9. На сторонах AB, BC, CD і DA паралелограма $ABCD$ позначили відповідно точки M, N, K і F. Чи можна, використовуючи тільки циркуль, визначити, чи дорівнює площа чотирикутника $MNKF$ половині площі паралелограма $ABCD$?

Відповідь: можна.

Розв'язок. Розв'язання задачі може базуватися на такому твердженні. Площа чотирикутника $MNKF$ дорівнює половині площі паралелограма $ABCD$ тоді і тільки тоді, коли одна з діагоналей цього чотирикутника паралельна стороні паралелограма. Доведемо цей факт.

Нехай, наприклад, $MK \parallel AD$ (рис. 1). Доведемо, що площа чотирикутника $MNKF$ дорівнює половині площі паралелограма $ABCD$.

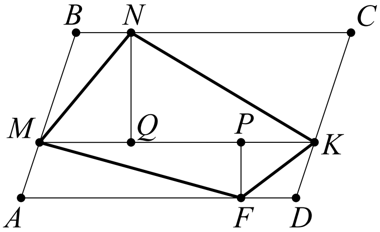

Рис. 1.

Проведемо висоти NQ і FP трикутників MNK і MFK відповідно. Тоді площа чотирикутника $MNKF$ дорівнює $\frac{1}{2}MK\cdot NQ+\frac{1}{2}MK\cdot FP=\frac{1}{2}MK(NQ+FP)$. Оскільки висота паралелограма $ABCD$, проведена до сторони AD, дорівнює $NQ+FP$ і $AD=MK$, то площа паралелограма $ABCD$ дорівнює $MK(NQ+FP)$.

Нехай тепер площа чотирикутника $MNKF$ дорівнює половині площі паралелограма $ABCD$. Припустимо, що одна з його діагоналей, MK, не паралельна AD. Доведемо, що тоді друга діагональ, NF, паралельна AB.

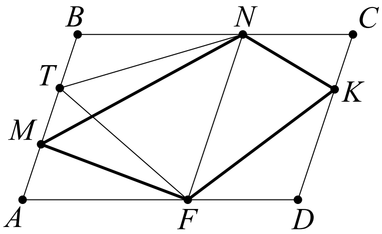

Рис. 2.

Позначимо на відрізку AB точку T так, що $TK \parallel AD$ (рис. 2). Тоді площа чотирикутника $TNKF$ дорівнює половині площі паралелограма $ABCD$. Звідси випливає, що трикутники FMN і FTN рівновеликі. Оскільки NF — спільна сторона цих трикутників, то точки M і T рівновіддалені від прямої FN, а отже $AB \parallel FN$.

10. Знайдіть усі такі натуральні числа $n>1$, що для будь-яких чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, для яких виконується рівність $x_1+x_2+\ldots+x_n=0$, також виконується рівність

$$x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n=nx_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n.$$

Відповідь: $n=3$.

Розв'язок. Покладемо $x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}=1$, $x_n=1-n$. Тоді має виконуватися рівність

$$\underbrace{1^n+1^n+\ldots+1^n}_{n-1 \text{ доданок}}+(1-n)^n=n(1-n).$$

Таким чином, $n-1+(1-n)^n=n-n^2$, тобто $(1-n)^n=1-n^2$. При парних n остання рівність неможлива, бо її ліва частина є додатною, а права від'ємною. Тому надалі розглядаємо лише непарні n і з врахуванням того, що $n>1$, можна записати

$(n-1)^{n-1} = n+1$. Зрозуміло, що число $n-1$ — дільник числа $n+1$. Оскільки $n+1=(n-1)+2$, то число $n-1$ — дільник числа 2, тобто $n-1=1$ або $n-1=2$. Звідси $n=3$. Залишається перевірити, що за умови $x_1+x_2+x_3=0$ виконується рівність $x_1^3+x_2^3+x_n^3=3x_1x_2x_3$. Така перевірка не викликає ускладнень.

СПИСОК ЧИТАЧІВ, ЩО НАДІСЛАЛИ ПРАВИЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ

Дмитро Нестеренко *(7 клас, м. Одеса)* 6, 8, 9, 10;
Герман Хівренко *(6 клас, м. Київ)* 6.