Конкурс “Від задачок до задач”

Розв’язання задач 1 — 5

Розділ ведуть Віталій Полонський та Михайло Якір

1. На дошці записали два числа, одне з яких є квадратом, а друге кубом одного й того ж натурального числа. Виявилось, що кожну з цифр $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, які записані на дошці, використали тільки один раз, а цифри 0 та 9 не використовували. Які числа записані на дошці?

Відповідь: 576 та 13824.

Розв’язок. Нехай a — число, квадрат і куб якого потрібно записати за допомогою даних цифр. Тоді $22 \leq a \leq 31$. Інакше загальна кількість цифр чисел a^2 і a^3 буде не більшою за 7 або не меншою за 9. Цифра одиниць числа a не може дорівнювати 1, 5 і 6, оскільки інакше числа a^2 і a^3 мали б однакові останні цифри. Крім того, остання цифра числа a не дорівнює 0, 3 і 7, бо у цьому разі остання цифра числа a^2 дорівнювала б 0 або 9. Залишається розглянути числа 22, 24 і 28. Легко перевірити, що умові задовольняє тільки $a = 24$, а саме $24^2 = 576$, $24^3 = 13824$.

2. Чи можна кожну точку площини розфарбувати одним з трьох кольорів так, щоб будь-яка пряма на цій площині містила точки рівно двох кольорів?

Відповідь: можна.

Розв’язок. Розфарбувати площину потрібним чином можна. Проведемо дві прямі, які перетинаються. Усі точки цих прямих, за винятком точки перетину, пофарбуємо в перший колір. Точку перетину проведених прямих пофарбуємо в другий колір, а всі інші точки площини — в третій колір. Легко переконатися, що вказане розфарбування задовольняє умову задачі.

3. Натуральні числа, які дорівнюють сумі всіх своїх дільників, відмінних від самого числа, називають *досконалими.* Наприклад, досконалими є числа 6 $(6 = 1+2+3)$ і 28 $(28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14)$. Знайдіть усі досконалі числа, які кратні 3, але не кратні 9.

Відповідь: 3.

Розв’язок. Нехай $n = 3d$ — шукане досконале число. Позначимо d_1, d_2, $\ldots$, d_k, d дільники числа d. Тоді

$$n = d_1 + d_2 + \ldots + d_k + d + 3d_1 + 3d_2 + \ldots + 3d_k.$$

Можна записати

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_k + d + 3d_1 + 3d_2 + \ldots + 3d_k + 3d = 4(d_1 + d_2 + \ldots + d_k + d) = 2n = 6d.$$

Звідси $3d = 2(d_1 + d_2 + \ldots + d_k + d)$. Тепер зрозуміло, що d — парне число. Тоді серед дільників числа n є числа $\frac{d}{2}$, d і $\frac{3d}{2}$, сума яких дорівнює $3d = n$. Це можливо лише за умови $\frac{d}{2} = 1$, $d = 2$. Звідси n =6.

4. Чи існує чотирикутник, який можна розрізати на 199 п’ятикутників і один тисячокутник?

Відповідь: такого чотирикутника не існує.

Розв'язок. Кожна вершина тисячокутника є також або вершиною якогось п'ятикутника, або вершиною чотирикутника. Проте загальна кількість вершин усіх п'ятикутників і чотирикутників дорівнює $5 \cdot 199 + 4 = 999$.

5. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) відомо, що $AC = 4$ см, $BC = 3$ см. Точки A_1, B_1 і C_1 такі, що $AA_1 \parallel BC$, $BB_1 \parallel A_1C$, $CC_1 \parallel A_1B_1$, $\angle A_1B_1C_1 = 90°$, $A_1B_1 = 1$ см. Знайдіть B_1C_1.

Відповідь: $B_1C_1 = 12$ см.

Розв'язок. Оскільки трикутники ABC і A_1BC мають спільну сторону BC і рівні висоти, проведені з вершин A і A_1 відповідно, то ці трикутники є рівновеликими. Аналогічно рівновеликими є трикутники A_1BC і A_1B_1C, а також трикутники A_1B_1C і $A_1B_1C_1$. Звідси випливає, що прямокутні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ є рівновеликими, а отже $AC \cdot BC = A_1B_1 \cdot B_1C_1$. Звідси $B_1C_1 = 12$ см.

СПИСОК ЧИТАЧІВ, ЩО НАДІСЛАЛИ ПРАВИЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ

Дмитро Нестеренко *(7 клас, м. Одеса)* 1, 2, 4;
Герман Хівренко *(6 клас, м. Київ)* 1;
Олександр Яриш *(9 клас, м. Київ)* 1, 2, 3, 4.