Конкурс "Від задачок до задач"
Розв'язання задач 11 — 15

11. На полиці стоять томи Енциклопедії з номерами $1, 2, 3, \ldots, n$. При яких n можна зняти з полиці один том так, аби середнє арифметичне номерів томів, які залишилися, стало рівним $9\frac{3}{4}$?

Відповідь: при жодному n.

Розв'язок. Зрозуміло, що середнє арифметичне буде найбільшим, якщо зняти з полиці том з номером 1, та найменшим, якщо зняти том з номером n. Якщо зняти з полиці том з номером 1, то залишаться томи з номерами $2, 3, \ldots, n$ та середнє арифметичне номерів томів буде дорівнювати $\frac{n+2}{2}$. Якщо зняти з полиці том з номером n, то залишаться томи з номерами $1, 2, \ldots, n-1$ та середнє арифметичне номерів томів буде дорівнювати $\frac{n}{2}$. Отже, $\frac{n}{2} \leq 9\frac{3}{4} \leq \frac{n+2}{2}$. Звідси $n \leq 19\frac{1}{2} \leq n+2$, тобто $n = 18$ або $n = 19$. Але якщо середнє арифметичне номерів 17 або 18 томів дорівнює $9\frac{3}{4}$, то сума номерів цих томів дорівнює $17 \cdot 9\frac{3}{4}$ або $18 \cdot 9\frac{3}{4}$, а отже не є цілою, що неможливо.

12. Розмовляють четверо гномів.

Алін: у Дваліна більше алмазів, ніж у мене.

Балін: кількість алмазів у Дваліна дорівнює подвоєній кількості алмазів у Аліна.

Галін: у когось із вас лише один алмаз.

Двалін: Балін сказав правду.

Відомо, що усього у гномів п'ять алмазів та лише один гном збрехав. У кого скільки алмазів?

Відповідь: у Баліна є один алмаз, у Галіна — чотири алмази, у інших гномів алмазів немає.

Розв'язок. Зрозуміло, що якщо Балін сказав правду, то Двалін теж сказав правду, а якщо Балін збрехав, то Двалін теж. Але збрехав лише один гном, тому Балін та Двалін сказали правду. Отже, кількість алмазів у Дваліна дорівнює подвоєній кількості алмазів у Аліна. Якщо ця кількість ненульова, то Алін сказав правду, а Галін збрехав. Але тоді у Аліна є принаймні два алмази, а у Дваліна принаймні чотири алмази, тобто усього у гномів не менше шести алмазів, суперечність. Тому у Аліна та Дваліна немає жодного алмаза, Алін збрехав, а Галін сказав правду. Це означає, що лише один алмаз є у Баліна, а інші чотири алмази належать Галіну.

13. Нехай ABC — рівнобедрений гострокутний трикутник ($AB = BC$). На стороні BC відмітили точку P таку, що $\angle PAC = 45°$, а Q — точка перетину серединного перпендикуляра до відрізка AP зі стороною AB. Довести, що $PQ \perp BC$.

Розв'язок. Оскільки Q лежить на серединному перпендикулярі до відрізка AP, то трикутник AQP рівнобедрений (рис. 1). Нехай $\angle QAP = \angle QPA = \alpha$. Тоді $\angle BQP = 2\alpha$ як зовнішній кут трикутника AQP, $\angle BAC = 45° + \alpha$ та

$$\angle ABC = 180° - 2\angle BAC = 180° - 2(45° + \alpha) = 90° - 2\alpha.$$

Отже,

$$\angle QBP = 90^\circ - 2\alpha = 90^\circ - \angle BQP.$$

Тому трикутник BPQ прямокутний, тобто $PQ \perp BC$.

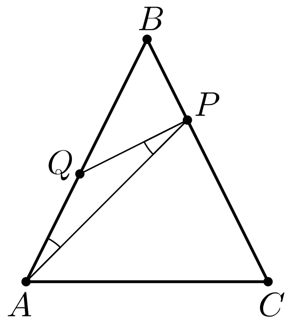

Рис. 1.

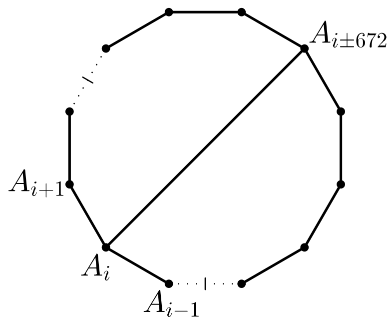

Рис. 2.

14. У країні, розташованій на 1344 островах, між деякими парами островів побудовано мости. Відомо, що якщо зачинити будь-які два мости на ремонт, то з будь-якого острова все одно можна буде дістатися по мостах на будь-який інший острів. При якій найменшій кількості мостів це можливо?

Відповідь: 2016 мостів.

Розв'язок. Зрозуміло, що з кожного острова мають вести принаймні три мости. Справді, інакше існує острів, з якого ведуть щонайбільше два мости. Якщо зачинити ці мости, то з цього острова не можна буде дістатися на жоден інший. Отже, з 1344 островів виходять принаймні $1344 \cdot 3 = 4032$ мости. Оскільки кожен мост пораховано двічі для островів, які він сполучає, то мостів не менше за $4032 : 2 = 2016$. Покажемо, що такої кількості мостів справді вистачить. Позначимо острови $A_1, A_2, \ldots, A_{1344}$ та побудуємо мости $A_1 - A_2$, $A_2 - A_3$, $A_3 - A_4$, $\ldots$, $A_{1343} - A_{1344}$, $A_{1344} - A_1$, а також мости $A_1 - A_{673}$, $A_2 - A_{674}$, $\ldots$, $A_{672} - A_{1344}$. Тоді 1344 мости утворюють кільцевий маршрут $A_1 - A_2 - \ldots - A_{1344} - A_1$, який проходить через усі острови.

Якщо на ремонт зачинено щонайбільше один з цих 1344 мостів, то з будь-якого острова все ще можна потрапити на будь-який інший за допомогою мостів, які належать даному маршруту. Якщо ж зачинено два мости, які належать кільцевому маршруту, то цей маршрут розбивається на дві частини, які разом містять всі острови. Нехай A_i — будь-який острів у частині маршруту, яка містить не більше половини островів (рис. 2). Тоді острів з номером $i - 672$ або $i + 672$ належить іншій частині, а отже міст $A_iA_{i\pm672}$ відновлює зв'язок між частинами кільцевого маршруту.

15. Знайти всі цілі числа x, y, які задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} x - \frac{4}{y} = \frac{5}{x}, \\ y - \frac{4}{x} = \frac{5}{y}. \end{cases}$$

Відповідь: $(3; 3)$, $(-3; -3)$, $(-1; 1)$, $(1; -1)$.

Розв'язок. Перепишемо систему рівнянь у вигляді $\begin{cases} xy - 4 = \frac{5y}{x}, \\ xy - 4 = \frac{5x}{y}. \end{cases}$

Звідси $\frac{y}{x} = \frac{x}{y}$, $y^2 = x^2$, а отже $y = x$ або $y = -x$. Дістаємо сукупність систем рівнянь $\begin{cases} y = x, \\ x^2 - 4 = 5 \end{cases}$ та $\begin{cases} y = -x, \\ -x^2 - 4 = -5. \end{cases}$ Отже, $x = \pm 3$, $y = x$ або $x = \pm 1$, $y = -x$.

СПИСОК ЧИТАЧІВ, ЩО НАДІСЛАЛИ ПРАВИЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ

Хасін Марк *(8 клас, м. Київ)* 12, 13, 14;
математичний гурток Запорізького ліцею № 105 (9 клас) 11, 12, 13, 14, 15.