Конкурс “Від задачок до задач”
Розв’язання задач 6 — 10

6. На дошці написано число 1. Дозволяється дописувати до числа справа цифру 3, витирати декілька перших зліва цифр, після яких стоїть ненульова цифра, або заміняти число його квадратом. Чи можна за допомогою таких операцій дістати число 43?

Відповідь: ні.

Розв’язання. Зрозуміло, що після будь-яких дозволених операцій остання цифра числа на дошці залишається непарною. Припустимо, що після деякої операції на дошці вперше з’явилося число з останніми цифрами 43. Тоді ця операція не могла бути видаленням декількох перших цифр числа, бо інакше число з останніми цифрами 43 вже було би на дошці раніше. Але операція не могла бути і дописуванням 3, бо інакше перед нею на дошці було б число з парною останньою цифрою, та не могла бути піднесенням до квадрату, бо квадрат числа не може закінчуватися на 3. Отже, за допомогою операцій не можна дістати жодне число з останніми цифрами 43.

7. У Тома є дошки довжиною 1 м, 2 м, $\ldots$, n м. Він хоче огородити ними деяку прямокутну ділянку так, аби кожні дві дошки, довжини яких відрізняються на 1 м, мали спільний кінець. При якому найменшому n це можливо?

Відповідь: $n = 8$.

Розв’язання. Аби огородити пару протилежних сторін потрібно використати принаймні три дошки, оскільки інакше для протилежних сторін було б використано по одній дощці та ці дошки мали б однакову довжину. Отже, $n \geq 6$. Якщо $n = 6$, то периметр прямокутника має дорівнювати $1+2+\ldots+6 = 21$(м), але тоді сума довжин двох сусідніх сторін не є цілою. Якщо $n = 7$, то периметр прямокутника має дорівнювати $1 + 2 + \ldots + 7 = 28$(м), а сума довжин двох сусідніх сторін — 14 м. Неважко перевірити, що утворити 14 як суму декількох послідовних чисел від 1 до 7 можна лише як $2 + 3 + 4 + 5$, тому огородити прямокутник потрібним чином не можна.

Якщо $n = 8$, то периметр прямокутника має дорівнювати $1+2+\ldots+8 = 36$(м), а сума довжин двох сусідніх сторін — 18 м. Утворити 18 як суму декількох послідовних чисел від 1 до 8 можна як $3 + 4 + 5 + 6$ або як $5 + 6 + 7$, тому огородити прямокутник можна як на рис. 1.

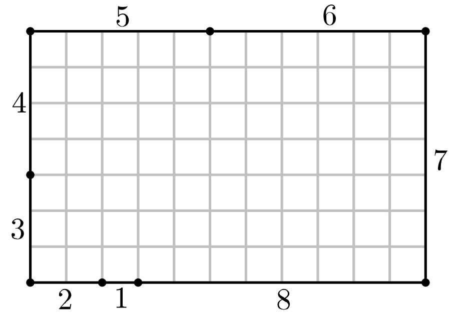

Рис. 1.

8. Нехай $ABCD$ — опуклий чотирикутник. Відомо, що $S_{ABD} = 7$, $S_{BCD} = 5$ та $S_{ABC} = 3$. Всередині чотирикутника відмітили точку X так, що $ABCX$ паралелограм. Знайти S_{ADX} та S_{BDX}.

Відповідь: $S_{ADX} = S_{BDX} = 2$.

Розв'язання. Проведемо через точку D перпендикулярну до AX та BC пряму, яка перетинає прямі AX та BC у точках F та G відповідно (рис. 2). Тоді $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot FG$, $S_{ADX} = \frac{1}{2}AX \cdot DF$ та $S_{BCD} = \frac{1}{2}BC \cdot DG$. Оскільки $DG = DF + FG$ та $AX = BC$, то звідси $S_{BCD} = S_{ABC} + S_{ADX}$. Отже,

$$S_{ADX} = S_{BCD} - S_{ABC} = 5 - 3 = 2.$$

Але $S_{ABX} = S_{ABC} = 3$, тому

$$S_{BDX} = S_{ABD} - S_{ABX} - S_{ADX} = 7 - 3 - 2 = 2.$$

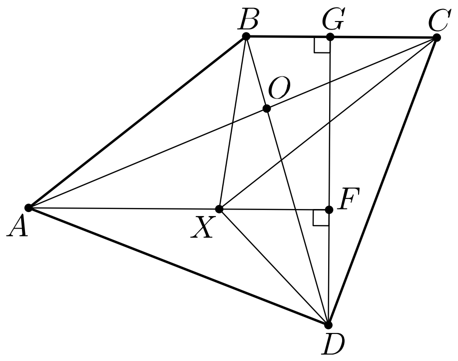

Рис. 2.

9. Знайти всі трійки натуральних чисел (n, k, l), для яких $4^n + 4 = 3^k + 5^l$.

Відповідь: (1,1,1).

Розв'язання. Якщо $n = 1$, то $k = l = 1$. Надалі будемо вважати, що $n > 1$. Тоді число $4^n + 4 = 3^k + 5^l$ дає остачу 4 при діленні на 8. Неважко перевірити, що число 3^k дає при діленні на 8 остачу 3, якщо k непарне, та остачу 1, якщо k парне, а число 5^l дає при діленні на 8 остачу 5, якщо l непарне, та остачу 1, якщо l парне. Тому $3^k + 5^l$ дає при діленні на 8 остачу 4 лише у випадку, коли k непарне, а l парне. Але тоді $3^k + 5^l$ дає остачу 1 при діленні на 3, а $4^n + 4$ дає остачу 2. Отже, при $n > 1$ рівність $4^n + 4 = 3^k + 5^l$ неможлива.

10. Назвемо куточком три кубика, склеєні як показано на рис. 3. При яких n можна скласти з куточків куб $n \times n \times n$?

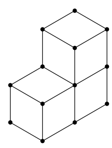

Рис. 3.

Відповідь: при всіх n, що діляться на 3.

Розв'язання. Очевидно, що з куточків неможливо скласти куб $n \times n \times n$, якщо n не ділиться на 3. Нехай n ділиться на 3. Тоді куб $n \times n \times n$ можна утворити з кубів

$3 \times 3 \times 3$, а тому достатньо показати, що куб $3 \times 3 \times 3$ можна скласти з куточків. Справді, куб можна розрізати на три куточки та три паралелепіпеди $3 \times 2 \times 1$ (рис. 4), а паралелепіпед $3 \times 2 \times 1$ можна скласти з двох куточків, що завершує доведення.

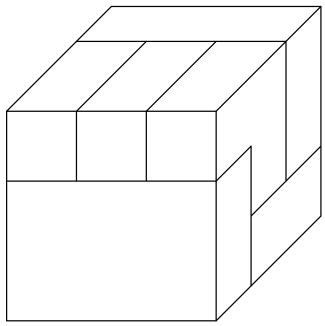

Рис. 4.

СПИСОК ЧИТАЧІВ, ЩО НАДІСЛАЛИ ПРАВИЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ

математичний гурток Запорізького ліцею № 105 (9 клас) 6, 7, 8, 9, 10.