Конкурс “Від задачок до задач”

Розв’язання задач 1 — 5

1. На дошці записані чотири числа. Для кожної пари різних чисел з дошки Петрик обчислив та записав у зошит їх суму. У зошиті записані числа $2, 4, 9, 9, 14, 16$. Які числа записані на дошці?

Відповідь: $a = -1{,}5$, $b = 3{,}5$, $c = 5{,}5$, $d = 10{,}5$.

Розв’язання. Зрозуміло, що якби серед записаних на дошці чисел було щонайбільше три різних, то серед сум в зошиті теж було б щонайбільше три різні. Отже, всі числа на дошці різні. Нехай це числа $a < b < c < d$. Тоді

$$a + b < a + c < a + d < b + d < c + d,$$

а оскільки в зошиті як раз п’ять різних чисел, то

$$a + b = 2, \quad a + c = 4, \quad b + c = a + d = 9, \quad b + d = 14 \text{ та } c + d = 16.$$

Оскільки $a + b = 2$, $a + c = 4$ та $b + c = 9$, то

$$a = \tfrac{1}{2}\big((a + b) + (a + c) - (b + c)\big) = \tfrac{1}{2}\big(2 + 4 - 9\big) = -1{,}5.$$

Далі дістаємо $b = (a + b) - a = 3{,}5$, $c = (a + c) - a = 5{,}5$, $d = (a + d) - a = 10{,}5$ та залишається зробити перевірку.

2. Розрізати зображену на рис. 1 фігуру на три рівні за розміром та формою частини.

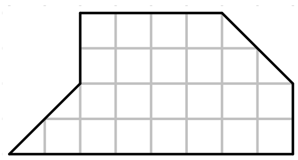

Рис. 1.

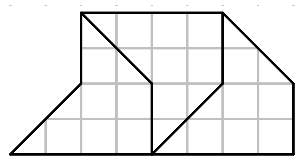

Рис. 2.

Відповідь: див. рис. 2.

3. На рис. 3 бісектриси кутів $\angle DAC$, $\angle EBD$, $\angle ACE$, $\angle BDA$ та $\angle CEB$ перетинаються в одній точці. Довести, що бісектриси кутів $\angle TPQ$, $\angle PQR$, $\angle QRS$, $\angle RST$ та $\angle STP$ теж перетинаються в одній точці.

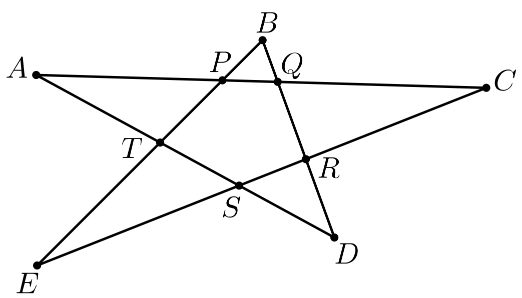

Рис. 3.

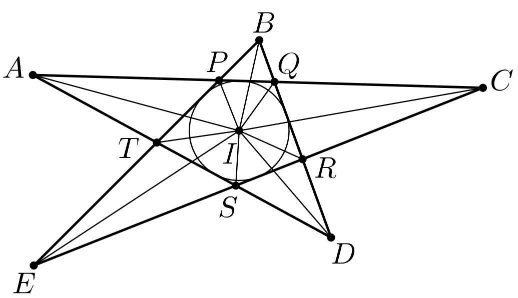

Рис. 4.

Розв’язання. Нехай I — точка перетину бісектрис кутів $\angle DAC$, $\angle EBD$, $\angle ACE$, $\angle BDA$ та $\angle CEB$ (рис. 4). Розглянемо трикутники EPC, AQD, BRE, CSA DTB. У кожному з цих трикутників I є точкою перетину бісектрис деяких двох кутів, тому бісектриси третіх кутів цих трикутників теж проходять через точку I.

4. Чи існують різні натуральні числа a, b, c, d, для яких $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$?

Відповідь: так.

Розв'язання. Можна почати з будь-яких двох пар різних дробів з однаковими сумами, а потім розділити всі дроби на їх найменший спільний чисельник. Наприклад, оскільки $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{4}{5} = \frac{15}{30}+\frac{20}{30}-\frac{24}{30} = \frac{11}{30}$, то $\frac{1}{2}+\frac{2}{3} = \frac{4}{5}+\frac{11}{30}$, найменше спільне кратне чисельників 1, 2, 4, 11 дорівнює 44, після ділення всіх дробів на 44 дістаємо $\frac{1}{88}+\frac{1}{66} = \frac{1}{55}+\frac{1}{120}$.

5. У Скруджа є необмежено багато монет з номіналами 1 копійка, 2 копійки, 5 копійок, 10 копійок, 25 копійок, 50 копійок та 1 гривня. Про натуральні числа A та B відомо, що суму A копійок Скрудж може сплатити рівно B монетами. Довести, що суму B гривень Скрудж може сплатити рівно A монетами.

Розв'язання. I спосіб. Нехай суму A копійок Скрудж може сплатити рівно B монетами. Покажемо, що кожну монету, яку він використав, можна замінити на стільки інших монет, як її номінал, так, що цими монетами можна сплатити 1 гривню. Справді, замінимо кожну монету

номіналом 1 копійка на одну монету номіналом 1 гривня,

номіналом 2 копійки на дві монети по 50 копійок,

номіналом 5 копійок на п'ять монет: 50 копійок, 25 копійок, 5 копійок та дві по 10 копійок,

номіналом 10 копійок на десять монет по 10 копійок,

номіналом 25 копійок на двадцять п'ять монет: вісімнадцять по 5 копійок, три по 2 копійки та чотири по 1 копійці,

номіналом 50 копійок на п'ятдесят монет по 2 копійки,

номіналом 1 гривня на сто монет по 1 копійці.

Тоді всього дістанемо A монет, якими можна сплатити B гривень.

II спосіб. Спочатку покажемо, що при кожному $1 \leq k \leq 100$ одну гривню можна сплатити, використавши рівно k монет. Зрозуміло, що при $k = 100$ можна використати сто монет по 1 копійці. Далі можна послідовно зменшувати кількість монет на один таким чином: якщо при попередньому способі оплати використовували хоча б дві монети по 1 копійці, то замінимо дві монети по 1 копійці однією монетою номіналом 2 копійки, інакше замінимо три монети по 2 копійки на дві монети з номіналами 1 та 5 копійок. Так можна діяти, поки не дійдемо до $k = 22$, коли для сплати використовуються дев'ятнадцять монет по 5 копійок, дві монети по 2 копійки та одна монета номіналом 1 копійка. При $k = 21$ можна використати одну монету номіналом 10 копійок, вісімнадцять монет по 5 копійок, дві монети по 2 копійки та одну монету номіналом 1 копійка, а при $k = 20$ двадцять монет по 5 копійок. Далі для зменшення кількості використаних монет будемо на кожному кроці міняти або дві монети по 5 копійок на одну монету номіналом 10 копійок, або три монети по 10 копійок на дві монети з номіналами 5 та 25 копійок. Так можна діяти, поки не дійдемо до $k = 6$, коли для сплати використовуються три монети по 25 копійок, дві монети по 10 копійок та одна монета номіналом 5 копійок. При $k = 5$ можна використати по одній монеті з номіналами 50 копійок, 25 копійок і 5 копійок та дві монети по 10 копійок, а при $k = 4$ — чотири монети по 25 копійок. Далі можна на кожному кроці міняти або дві монети по 25 копійок на одну монету номіналом 50 копійок, або дві монети по 50 копійок на одну монету номіналом 1 гривня, поки не дійдемо до $k = 1$.

Нехай тепер Скрудж може сплатити суму A копійок рівно B монетами. Тоді очевидно, що $B \leq A \leq 100B$, тому при діленні A на B (можливо, з остачею) дістанемо, що $A = iB + j$, де $1 \leq i \leq 100$ та $0 \leq j < B$, причому якщо $i = 100$, то $j = 0$. Отже, аби сплатити суму B гривень рівно A монетами Скрудж може $B - j$ разів сплатити одну гривню i монетами та ще j разів сплатити одну гривню $i + 1$ монетами.

СПИСОК ЧИТАЧІВ, ЩО НАДІСЛАЛИ ПРАВИЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ

математичний гурток Запорізького ліцею № 105 (8 клас) 1, 2, 3, 4, 5.