Конкурс "Від задачок до задач"

Розв'язання задач 1 — 5

Розділ веде Юхим Рабінович[1]

1. Дмитрик та Петрик одночасно вирушили з села Близького в село Далеке. Дмитрик першу половину всього часу йшов зі швидкістю 6 км/год, а другу половину — зі швидкістю 5 км/год. Петрик першу половину шляху йшов зі швидкістю 5 км/год, а другу — зі швидкістю 6 км/год. Хто прийшов першим у село Далеке?

Відповідь: Дмитрик.

Розв'язання. Оскільки Дмитрик йшов однаковий час зі швидкістю 6 км/год та зі швидкістю 5 км/год, то він подолав більше половини відстані зі швидкістю 6 км/год, а Петрик подолав з такою швидкістю лише половину відстані. Тому Дмитрик витратив на шлях менше часу.

2. По колу розставили вісім чисел. Потім між кожними двома сусідніми числами записали їх суму, а старі числа стерли. Чи може статися так, що по колу записані числа 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 саме у такому порядку?

Відповідь: Не може.

Розв'язання. Нехай по колу стояли числа a, b, c, d, e, f, g, h, а між ними вписали числа $a + b = 11$, $b + c = 12$, $c + d = 13, d + e = 14$, $e + f = 15$, $f + g = 16$, $g + h = 17$, $h + a = 18$. Обчислимо суму початкових чисел двома способами:

$$(a + b) + (c + d) + (e + f) + (g + h) = 11 + 13 + 15 + 17 = 56,$$
$$(b + c) + (d + e) + (f + g) + (h + a) = 12 + 14 + 16 + 18 = 60.$$

Дістали різні значення, тому вказані в умові числа отримати неможливо.

3. Чи можна розрізати квадрат 7×7 по лініях клітинок на п'ять частин та скласти з них три квадрати, жодні два з яких не є рівними?

Відповідь: Можна.

Розв'язання. Оскільки 4+9+36 — єдиний можливий розклад числа 49 у суму трьох різних квадратів, то мають утворитися квадрати розміру 2×2, 3×3 та 6×6. Один з декількох можливих способів розрізання показано на рис. 1.

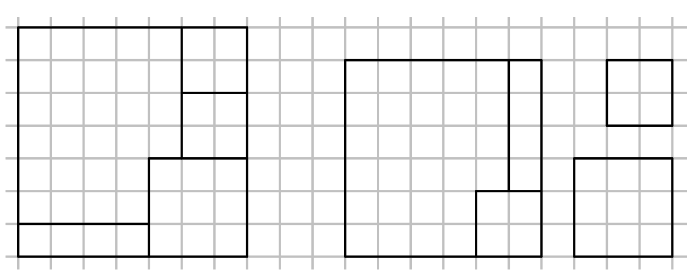

Рис. 1.

[1]вчитель математики гімназії № 178 м. Києва

4. Нехай a, b та c — різні числа, причому $c \neq 0$. Довести, що якщо рівняння $x^2 + ax + bc = 0$ та $x^2 + bx + ac = 0$ мають рівно один спільний корінь, то другі корені цих рівнянь є коренями рівняння $x^2 + cx + ab = 0$.

Розв'язання. Нехай рівняння $x^2 + ax + bc = 0$ має корені x_0 та x_1, а рівняння $x^2 + bx + ac = 0$ — корені x_0 та x_2. Тоді $x_0^2 + ax_0 + bc = 0$ та $x_0^2 + bx_0 + ac = 0$. Віднімемо почленно ці рівності. Після перетворень дістанемо $(a-b)x_0 = (a-b)c$. Оскільки за умовою a та b — різні числа, то $a - b \neq 0$, звідки $x_0 = c$. Тоді за теоремою Вієта знаходимо $x_1 = b$ та $x_2 = a$. Також за теоремою Вієта $x_0 + x_1 = b + c = -a$. Звідси $c = -(a+b)$, а отже числа a та b є коренями рівняння $x^2 + cx + ab = 0$.

5. На дошці побудували систему координат, відмітили точки $A(1;2)$ та $B(3;1)$, а потім систему координат стерли. Відновіть систему координат за двома відміченими точками.

Розв'язання. I спосіб. Трикутник з вершинами $A(1;2)$, $B(3;1)$ та $O(0;0)$ рівнобедрений прямокутний (рис. 2), тому його можна побудувати та знайти початок координат. Далі відкладемо на продовженні AB відрізок $BC = AB$ та дістанемо точку $C(5;0)$. Тепер можна провести вісь Ox та перпендикулярну до неї вісь Oy.

II спосіб. Як і в I способі знаходимо початок координат $O(0;0)$. Далі побудуємо коло з діаметром OA та коло з центром B та радіусом OB. Ці кола перетинаються в точці O та в точці з координатами $(0;2)$ (рис. 2). Тепер можна провести вісь Oy та перпендикулярну до неї вісь Ox.

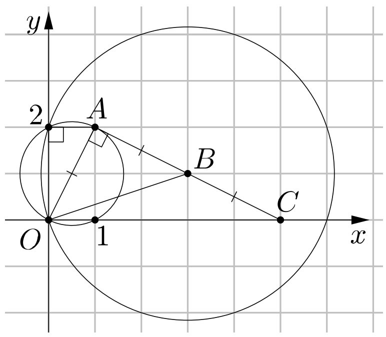

Рис. 2.

СПИСОК ЧИТАЧІВ, ЩО НАДІСЛАЛИ ПРАВИЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ

Кандул Юлія *(8 клас, м. Черкаси)* 1, 2, 3, 4, 5;
Карпенко Маргарита *(8 клас, м. Черкаси)* 1, 2, 3, 4, 5;
Коломієць Анна *(8 клас, м. Черкаси)* 1, 2, 3, 4, 5;
Скоромний Валентин *(с. Хмелів, Сумська обл.)* 2, 3, 4, 5;
Третяк Юлія *(с. Червона Слобода, Черкаська обл.)* 1, 2, 3, 4, 5;
Шкірко Ілля *(5 клас, м. Харків)* 1, 2, 3, 5;