Конкурс “Від задачок до задач”

Розв’язання задач 11 — 15

Розділ веде Олена Харік[1]

11. Чотири команди брали участь у турнірі, який відбувався в одне коло. За перемогу нараховують 2 очки, за нічию 1 очко та за поразку 0 очків. Команда «Метеор» здобула 5 очок, «Зоря» — 2 очки, «Вітерець» — 1 очко. Яке місце посіла команда «Світанок»?

Відповідь: друге місце.

Розв’язок. Оскільки кожні дві з чотирьох команд один раз зіграли між собою, то всього в турнірі було 6 матчів. У кожному матчі розігрують 2 очки, тому всі команди разом здобули 12 очок. Отже, команда «Світанок» здобула $12 - 5 - 2 - 1 = 4$ очки та посіла друге місце.

12. Марійка дуже полюбляє розмовляти по мобілці; заряджений акумулятор може діяти 6 годин розмов чи 210 годин очікування. Коли Марійка розпочала подорож потягом, телефон був повністю заряджений, а коли вона прибула до кінцевої зупинки розрядився. Скільки годин тривала подорож, якщо Марійка розмовляла половину всього часу подорожі?

Відповідь: 11 годин 40 хвилин.

Розв’язок. За годину, коли Марійка розмовляє, витрачається $\frac{1}{6}$ заряду акумулятора, а за годину, коли вона не користується телефоном — $\frac{1}{210}$ заряду. Тому якщо Марійка півгодини розмовляє, а півгодини ні, то за годину витрачається $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{210} = \frac{3}{35}$ заряду. Це означає, що весь заряд витрачається за $\frac{35}{3} = 11\frac{2}{3}$ годин, тобто 11 годин 40 хвилин.

13. Нехай m та n — натуральні числа. Відомо, що серед чотирьох тверджень

1) $m + 1$ ділиться на n,	3) $m + n$ ділиться на 3,
2) $m = 2n + 5$,	4) $m + 7n$ — просте число

три правильних, а одне хибне. Знайдіть всі можливі пари чисел (m, n).

Відповідь: $(9, 2)$, $(17, 6)$.

Розв’язок. Якщо $m = 2n + 5$, то $m + n = 3n + 5$ не ділиться на 3, тому серед тверджень 2) та 3) є хибне. Але якщо $m + n$ ділиться на 3, то $m + 7n = (m + n) + 6n$ теж ділиться на 3 та не може бути простим, тому серед тверджень 3) та 4) теж є хибне. Таким чином, хибним є твердження 3), а твердження 1), 2) та 4) правильні. Звідси $m + 1 = 2n + 6$ ділиться на n, а отже n — дільник числа 6, тобто 1, 2, 3 або 6. Дістаємо пари чисел $(7, 1)$, $(9, 2)$, $(11, 3)$ та $(17, 6)$, які задовольняють умови 1) та 2) та не задовольняють умову 3). Залишається перевірити, для яких пар $m + 7n$ — просте число.

14. Розв’яжіть рівняння

$$-\frac{36}{x^2} + \frac{72}{x} - 11 = (x - 6)^2.$$

[1]вчитель математики Харківського фізико-математичного ліцею № 27

Відповідь: $1, 2, 3, 6$.

Розв'язок. Перепишемо рівняння таким чином:

$$x^2 - 12x + 36 + \frac{36}{x^2} - \frac{72}{x} + 11 = 0,$$

$$\left(x + \frac{6}{x}\right)^2 - 12\left(x + \frac{6}{x}\right) + 35 = 0.$$

Позначимо $t = x + \frac{6}{x}$. Дістанемо квадратне рівняння $t^2 - 12t + 35 = 0$, звідки $t = 5$ або $t = 7$.

Якщо $x + \frac{6}{x} = 5$, то $x^2 + 6 = 5x$, або $x^2 - 5x + 6 = 0$. Це квадратне рівняння має корені $x = 2$ та $x = 3$.

Якщо $x + \frac{6}{x} = 7$, то $x^2 + 6 = 7x$, або $x^2 - 7x + 6 = 0$. Це квадратне рівняння має корені $x = 1$ та $x = 6$.

15. Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою та медіаною, проведеною до катета.

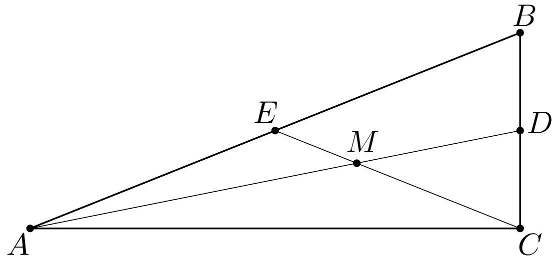

Рис. 1.

Розв'язок. I спосіб. Нехай ABC — прямокутний трикутник ($\angle C = 90°$), AD та CE — медіани, M — їх точка перетину, $AB = c$, $AD = m$ (рис. 1). Розглянемо трикутник AEM. Оскільки $CE = \frac{1}{2}AB$ та за властивістю медіан $AM : MD = CM : ME = 2 : 1$, то всі сторони цього трикутника неважко знайти:

$$AM = \tfrac{2}{3}m, \quad AE = \tfrac{1}{2}c, \quad EM = \tfrac{1}{3}CE = \tfrac{1}{6}c.$$

Звідси випливає така побудова: спочатку будуємо трикутник AEM за трьома сторонами, а потім відкладаємо на продовженнях AE та AM відрізки $EB = AE$ та $MD = \frac{1}{2}AM$ відповідно. Тепер залишається відкласти на продовженні BD відрізок $DC = BD$.

Дістали трикутник ABC, в якому за побудовою D та E є серединами AB та BC, а точка M ділить медіану AD у відношенні $2 : 1$. Звідси випливає, що M — точка перетину медіан трикутника ABC, зокрема ця точка лежить на CE та $CE = 3EM = \frac{1}{2}AB$. Таким чином, медіана, проведена до сторони AB, дорівнює половині цієї сторони, звідки трикутник ABC прямокутний та AB — його гіпотенуза.

Побудова можлива, якщо відрізки $\frac{2}{3}m$, $\frac{1}{2}c$ та $\frac{1}{6}c$ задовольняють нерівність трикутника, тобто при $\frac{1}{2}c < m < c$.

II спосіб. Нехай ABC — прямокутний трикутник ($\angle C = 90°$), AD — медіана, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $AD = m$. За теоремою Піфагора для трикутників ABC та ADC маємо $c^2 = a^2 + b^2$, $m^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2$, тому $c^2 = \frac{3}{4}a^2 + m^2$. Отже, якщо побудувати трикутник з гіпотенузою c та катетом m, то інший катет цього трикутника дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Висота рівностороннього трикутника зі стороною $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ дорівнює $\frac{3}{4}a$, тому відрізок a теж можна побудувати, а далі залишається побудувати прямокутний трикутник за катетом та гіпотенузою.

СПИСОК ЧИТАЧІВ, ЩО НАДІСЛАЛИ ПРАВИЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ

Блюмберг Юлія *(7 клас, м. Одеса)* 11, 12, 13, 14;
Войтович Олександр *(7 клас, м. Харків)* 11, 12, 13;
Купріянов Михайло *(7 клас, м. Харків)* 11, 12, 13;
Осташев Даніїл *(7 клас, м. Харків)* 6, 7, 8, 9, 10 (з попереднього номера), 11, 12, 13, 14, 15;
Рачек Владислав *(9 клас, м. Черкаси)* 11, 12, 13, 14, 15;
Сморцов Михайло *(7 клас, м. Харків)* 11, 12, 13, 14.