Конкурс “Від задачок до задач”

Розв’язання задач 6 — 10

Розділ веде Олена Харік[1]

6. Розв’язати рівняння $2x^4 + y^4 + 1 = 4x^2y$.

Відповідь: $x = 1, y = 1$ та $x = -1, y = 1$.

Розв’язок. Перепишемо рівняння таким чином:

$$2(x^2 - y)^2 + (y^2 - 1)^2 = 0.$$

Тоді $x^2 = y$ та $y^2 = 1$, звідки $y = 1$ та $x = \pm 1$.

7. У кімнаті сім гномів, деякі з яких завжди брешуть, а інші завжди кажуть правду. Кожного гнома запитали, скільки у кімнаті чесних гномів. Перший гном відповів, що жодного, другий — що не більше одного, третій — що не більше двох, ..., шостий — що не більше п’яти, а сьомий гном промовчав. Скільки у кімнаті чесних гномів насправді?

Відповідь: три чесних гнома.

Розв’язок. Якщо в кімнаті чотири або більше чесних гномів, то брехливих гномів не більше трьох, але перші чотири гноми сказали неправду, суперечність. Якщо в кімнаті двоє або менше чесних гномів, то правду сказали третій, четвертий, п’ятий та шостий гноми, що теж неможливо. Тому чесних гномів троє (а саме, четвертий, п’ятий та шостий гноми).

8. Кожне з чисел $1, 2, 3, \ldots, 2013, 2014$ пофарбували у червоний колір, якщо його сума цифр є непарною, та у синій колір, якщо парною. Що більше: сума всіх червоних чи сума всіх синіх чисел?

Відповідь: сума червоних чисел.

Розв’язок. Для зручності будемо вважати число 0 червоним. Зауважимо, що для кожного числа $0 \leq a \leq 499$ числа $a+500$ та $a+1000$ мають інший колір, а число $a+1500$ — такий самий колір, причому $a+(a+1500) = (a+500)+(a+1000)$. Звідси випливає, що всі числа від 0 до 1999 можна розбити на четвірки так, що кожна четвірка містить два червоні та два сині числа з рівними сумами. Отже, сума всіх червоних чисел, менших за 2000, дорівнює сумі всіх синіх чисел, менших за 2000. Залишилось врахувати числа від 2000 до 2014. Сім чисел $2000, 2002, 2004, 2006, 2008, 2011$ та 2013 є синіми, а вісім чисел $2001, 2003, 2005, 2007, 2009, 2010, 2012$ та 2014 є червоними, тому сума червоних чисел є більшою.

9. На колі з діаметром AB відмітили довільну точку C, яка не збігається з A та B. Дотична до кола в точці A перетинає пряму BC в точці D. Довести, що дотична до кола в точці C ділить навпіл відрізок AD.

---

[1] вчитель математики Харківського фізико-математичного ліцею № 27

Розв'язок. Кут $\angle ACB$ спирається на діаметр, тому трикутник ACD прямокутний (рис. 1). Нехай дотична до кола в точці C перетинає AD в точці E. Тоді $EA = EC$ як дотичні до кола, проведені з точки E. Отже, $\angle ECA = \angle EAC$. Тому

$$\angle DCE = 90^\circ - \angle ECA = 90^\circ - \angle EAC = \angle EDC$$

та $ED = EC = EA$, тобто E — середина AD.

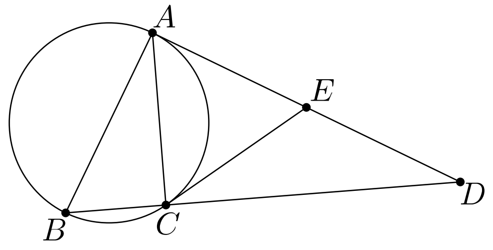

Рис. 1.

10. В кожній клітинці таблиці 15×16 стоїть число 1 або -1. Під кожним стовпчиком записали добуток чисел, які стоять у цьому стовпчику, а поруч з кожним рядком — добуток чисел, які стоять у цьому рядку. Чи може сума всіх 31 добутків дорівнювати 1?

Відповідь: не може.

Розв'язок. Якщо сума всіх 31 добутків дорівнює 1, то 15 з них дорівнюють -1 та 16 дорівнюють 1. Тому якщо перемножити всі ці добутки, то дістанемо -1. Але з іншого боку якщо перемножити всі добутки, то дістанемо квадрат добутку всіх чисел в таблиці, який не може бути від'ємним, суперечність.

СПИСОК ЧИТАЧІВ, ЩО НАДІСЛАЛИ ПРАВИЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ

Блюмберг Юлія *(6 клас, м. Одеса)* 6, 7, 8, 10;
Шлапак Ярина *(7 клас, м. Київ)* 1, 2, 3, 4, 5 (з попереднього номера);
Рачек Владислав *(8 клас, м. Черкаси)* 6, 7, 8, 9, 10;
Сморцов Михайло *(7 клас, м. Харків)* 6, 7, 8, 10.