Конкурс “Від задачок до задач”

Розв’язання задач 1 — 5

Розділ веде Олена Харік[1]

1. Протягом року зріст молодшого з братів збільшився на 1%, а старшого — на 4%. Мати зауважила, що сумарний зріст синів збільшився за цей час на 3%. Чи може вона мати рацію?

Відповідь: може.

Розв’язок. Позначимо зріст молодшого брата на початку року x, а старшого y. Тоді наприкінці року зріст братів $1{,}01x$ та $1{,}04y$ відповідно, тобто має виконуватися умова $1{,}01x + 1{,}04y = 1{,}03(x + y)$, або $0{,}01y = 0{,}02x$. Таким чином, мати має рацію, якщо на початку року зріст старшого брата був вдвічі більшим за зріст молодшого.

2. Знайти найменше число натуральне число a, яке має таку властивість: при кожному $n \geq 1$ у записі числа $a^n + 2014$ немає жодної цифри, більшої за 4.

Відповідь: 10.

Розв’язок. Якщо $1 \leq a \leq 5$, то остання цифра числа $a + 2014$ не менша за 5. Якщо $6 \leq a \leq 9$, то $2050 \leq a^2 + 2014 \leq 2095$ та передостання цифра цього числа не менша за 5. Нарешті, $a = 10$ задовольняє умову, бо числа $a^n + 2014$, $n \geq 1$, це

$$2024, 2114, 3014, 12014, 102014, 1002014, 10002014, \ldots$$

3. Кожен учасник конференції володіє рівно однією з 5 мов, причому кожною мовою володіє принаймні один учасник. Яку найменшу кількість перекладачів, кожен з яких володіє трьома з цих мов, треба запросити на конференцію, аби будь-які двоє учасників змогли знайти перекладача, який володіє їх мовами?

Відповідь: 4.

Розв’язок. Занумеруємо мови числами від 1 до 5. Зрозуміло, що на конференцію достатньо запросити чотирьох перекладачів, які знають такі трійки мов: (1,2,3), (1,4,5), (2,4,5) та (3,4,5). Оскільки дві мови з п’яти можна вибрати 10 способами:

$$(1{,}2),\ (1{,}3),\ (1{,}4),\ (1{,}5),\ (2{,}3),\ (2{,}4),\ (2{,}5),\ (3{,}4),\ (3{,}5),\ (4{,}5),$$

а перекладач, який знає три мови, може обслуговувати лише три пари мов, то трьох перекладачів не вистачить.

4. У трикутнику ABC відомо, що $AC = 21$ см, $BC = 28$ см та $\angle C = 90^\circ$. На гіпотенузі AB побудували квадрат $ABMN$ з центром O таким чином, що відрізок CO перетинає гіпотенузу AB в точці K. Знайти довжини відрізків AK та KB.

Відповідь: $AK = 15$ см, $BK = 20$ см.

Розв’язок. За теоремою Піфагора $AB = 35$ см. Оскільки $\angle ACB = \angle AOB = 90^\circ$, то точки A, C, B, O лежать на одному колі. Кути $\angle ACO$ та $\angle OCB$ є рівними, як вписані

[1] вчитель математики Харківського фізико-математичного ліцею № 27

кути, що спираються на рівні хорди AO та BO. Тому AO — бісектриса кута $\angle ACB$ та за властивістю бісектриси $AK : BK = AC : BC$, звідки $AK = 15$ см, $BK = 20$ см.

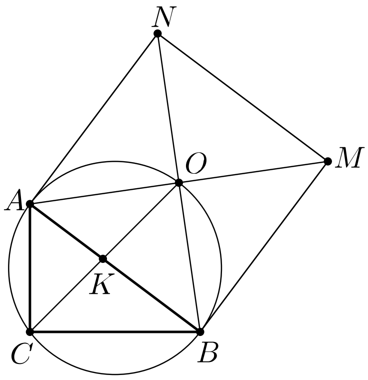

Рис. 1.

5. Знайти усі натуральні n, для яких $\left[\frac{n^2}{3}\right]$ є простим числом (тут $[a]$ — ціла частина числа a, тобто найбільше з цілих чисел, які не перевищують числа a).

Відповідь: $3, 4$.

Розв'язок. Розглянемо випадки в залежності від остачі, яку дає n при діленні на 3.

Якщо $n = 3k$, $k \geq 1$, то $\left[\frac{n^2}{3}\right] = \left[\frac{9k^2}{3}\right] = 3k^2$ є простим лише при $k = 1$, тобто $n = 3$.

Якщо $n = 3k + 1$, $k \geq 0$, то $\left[\frac{n^2}{3}\right] = \left[\frac{9k^2+6k+1}{3}\right] = 3k^2 + 2k = (3k + 2)k$ є простим лише при $k = 1$, тобто $n = 4$.

Якщо $n = 3k + 2$, $k \geq 0$, то $\left[\frac{n^2}{3}\right] = \left[\frac{9k^2+12k+4}{3}\right] = 3k^2 + 4k + 1 = (3k + 1)(k + 1)$. При $k \geq 1$ це число є складеним, бо обидва множники більші за 1. При $k = 0$ дане число дорівнює 1, тобто теж не є простим.

СПИСОК ЧИТАЧІВ, ЩО НАДІСЛАЛИ ПРАВИЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ

Блюмберг Юлія *(5 клас, м. Одеса)* 1, 2, 3, 5;
Осташев Даніїл *(6 клас, м. Харків)* 1, 2, 3, 4, 5;
Рачек Владислав *(8 клас, м. Черкаси)* 1, 2, 4, 5;
Рудавін Андрій *(6 клас, м. Харків)* 1;
Сморцов Михайло *(6 клас, м. Харків)* 1, 2, 3, 5;
Тарасенко Данил *(6 клас, м. Київ)* 1, 3.