Конкурс “Від задачок до задач”

Розв’язання задач 11 — 15

Розділ ведуть Олександр Бедов та Ігор Гольдштейн[1]

11. В одинадцятицифровому числі N закреслили середню цифру і одержали число M. Виявилось, що N ділиться на M без остачі. Скільки існує таких чисел N?

Відповідь: 90000.

Розв’язок. Нехай $N = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5cb_1b_2b_3b_4b_5}$, а $M = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5b_1b_2b_3b_4b_5}$. Якщо $N \neq 10M$, то число $N - 10M \neq 0$ є щонайбільше шестицифовим та не може ділитись на десятицифрове число M. Отже, $N = 10M$, тобто

$$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5cb_1b_2b_3b_4b_5} = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5b_1b_2b_3b_4b_50},$$

звідки $c = b_1 = b_2 = \ldots = b_5 = 0$. Очевидно, що усі числа вигляду $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5000000}$ задовольняють умову задачі, причому цифра a_1 може набувати 9 значень, а кожна з цифр a_2, a_3, a_4, a_5 — 10 значень.

12. П’ять граней куба, довжина ребра якого дорівнює цілому числу k ($k \geq 3$) пофарбували в чорний колір. Після цього куб розрізали на куби з ребром довжиною 1. Скільки з одержаних кубів мають 3 зафарбованих грані? 2 грані? 1 грань? Жодної зафарбованої грані?

Відповідь: 3 зафарбовані грані — 4 куба,
2 грані — $8(k-2)+4 = 8k-12$ кубів,
1 грань — $5(k-2)^2 + 4(k-2) = 5k^2 - 16k + 12$ кубів,
жодної грані — $(k-2)^3 + (k-2)^2 = k^3 - 5k^2 + 8k - 4$ кубів.

Розв’язок. Серед одиничних кубів, які знаходяться у вершинах великого куба, 4 мають 3 зафарбовані грані та 4 мають 2 зафарбовані грані. Серед кубів, які прилягають до ребер великого куба, але не знаходяться у вершинах, $8(k-2)$ мають 2 зафарбовані грані та $4(k-2)$ мають 1 зафарбовану грань. Серед кубів, які прилягають до граней великого куба, але не прилягають до ребер, $5(k-2)^2$ мають 1 зафарбовану грань та $(k-2)^2$ не мають зафарбованих граней. Нарешті, $(k-2)^3$ кубів, які не прилягають до граней великого куба, не мають зафарбованих граней.

13. Скільки існує натуральних чисел, які не перевищують 500, таких, що сума всіх їх натуральних дільників непарна?

Відповідь: 37.

Розв’язок. Зрозуміло, що сума всіх натуральних дільників числа є непарною тоді й лише тоді, коли це число має непарну кількість непарних дільників. Розглянемо довільне число n та подамо його у вигляді $2^k \cdot m$, де m непарне. Тоді непарні дільники числа n це дільники числа m. Далі, усі дільники числа m можна розбити на пари вигляду $(l, \frac{m}{l})$. Тому їх кількість є непарною тоді і лише тоді, коли в одній з пар дільники співпадають, тобто при деякому l маємо $l = \frac{m}{l}$, а це означає, що $m = l^2$ є точним квадратом. Отже, непарну суму дільників мають числа вигляду $2^k \cdot l^2$, де

[1]вчителі математики ліцею “Наукова зміна”

l непарне. При парному k такі числа є точними квадратами, а при непарному — подвоєними точними квадратами. Залишилось знайти кількість точних квадратів та подвоєних точних квадратів, які не перевищують 500.

14. Довжини чотирьох сторін вписаного восьмикутника дорівнюють 4 см, довжини інших чотирьох сторін — 6 см. Знайдіть площу восьмикутника.

Відповідь: $52 + 48\sqrt{2}$ см^2.

Розв'язок. Спочатку зауважимо, що відповідь не залежить від порядку сторін восьмикутника. Справді, якщо відрізати від восьмикутника і перевернути трикутник ABC зі сторонами $AB = 4$ см та $BC = 6$ см (рис. 1) так, щоб утворився трикутник $AB'C$ зі сторонами $AB' = 6$ см та $B'C = 4$ см, то восьмикутник залишиться вписаним та його площа не зміниться. Отже, можна надалі вважати, що сторони восьмикутника $ABCDEFGH$ довжиною 4 см та 6 см чергуються як на рис. 2. Тоді усі кути восьмикутника рівні (вписані, спираються на рівні дуги), тобто кожен з них становить 135°. Звідси випливає, що восьмикутник можна отримати з квадрата $KLMN$ зі стороною $6 + 4\sqrt{2}$ см відрізанням від його кутів прямокутних трикутників з катетом $2\sqrt{2}$ см та гіпотенузою 4 см (рис. 2). Тому площа восьмикутника $(6+4\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 4 = 52 + 48\sqrt{2}$ (см^2).

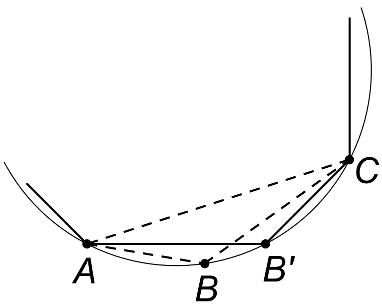

Рис. 1.

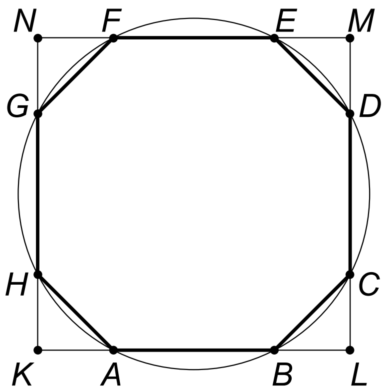

Рис. 2.

15. На дошці записали чотирицифрове число. Далі обчислюють суму його чотирьох цифр і праворуч приписують останню цифру цієї суми. Потім таку саму операцію проводять для останніх чотирьох цифр отриманого числа і т. д. Наприклад,

$$5\ 8\ 9\ 3\ 5\ 5\ 2\ 5\ 7\ldots$$

Нехай на дошці написали число 2011. Чи можна після певної кількості операцій одержати записані поспіль цифри

а) 2012;

б) 4449?

Відповідь: а) ні; б) так.

Розв'язок. а) Неважко перевірити, що у даній послідовності парні та непарні числа будуть повторюються таким чином: ПП-НН-ППП-НН-ППП-НН-ППП-... (після 2 непарних чисел йдуть 3 парних, далі знову 2 непарних і так далі). Тому число 2012, у якому непарна цифра 1 стоїть між двома парними цифрами, одержати не можна.

б) Існує скінченна кількість наборів з чотирьох цифр, тому рано чи пізно деяка четвірка цифр на дошці повториться. Але як наступна, так і попередня цифри визначаються четвіркою цифр однозначно, тому вперше на дошці повториться саме число 2011. Випишемо декілька цифр, які йому передуватимуть:

$$\ldots\ 4\ 4\ 4\ 9\ 1\ 8\ 2\ 0\ 1\ 1.$$

СПИСОК ЧИТАЧІВ, ЩО НАДІСЛАЛИ ПРАВИЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ

Биков Ростислав *(м. Одеса)* 12, 15а;
Гупалик Ірина *(8 клас, с. Пнівне Волинської обл.)* 14;
Кіпень Наталія *(м. Камінь-Каширський Волинської обл.)* 12;
Нестеренко Дмитро *(9 клас, м. Одеса)* 12, 13, 14, 15а;
Селиханович Данило *(8 клас, м. Одеса)* 12, 14;
Чорний Михайло *(9 клас, м. Бровари Київської обл.)* 12, 15.