Конкурс "Від задачок до задач"

Розв'язання задач 6 — 10

Розділ ведуть Олександр Бедов та Ігор Гольдштейн[1]

6. В шаховому турнірі кожен учасник мав зіграти з кожним по одній грі. Після деякого туру гравці Сашко та Ігор вибули з турніру через поважні причини. Всього на турнірі було зіграно 23 гри. Чи встигли Сашко та Ігор зіграти партію між собою?

Відповідь: Могли як встигнути, так і не встигнути.

Розв'язок. Нехай у турнірі брали участь 9 шахістів. Тоді у кожному турі мало було зіграно 4 партії та один шахіст мав відпочівати. Припустимо, що Сашко та Ігор вибули після другого туру. Якщо в першому турі відпочивав Сашко, а в другому вони грали між собою, то всього у турнірі відбулось 2 партії за їх участю та 21 партій між іншими шахістами, тобто усього 23 гри. Проте якщо в першому турі відпочівав Сашко, а в другому Ігор, то у турнірі теж відбулось 23 гри. Отже, задача містить недостатньо даних аби дати однозначну відповідь на поставлене запитання.

7. Знайти усі значення N, при яких N гривень можна розміняти банкнотами по 5 гривень та 2 гривні рівно сімома способами.

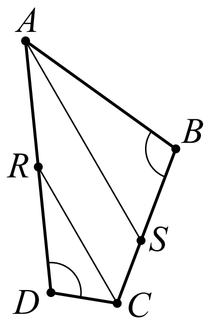
Відповідь: $60, 62, 64, 66, 68, 65, 67, 69, 71, 73$.

Розв'язок. Розглянемо розмін N гривень найменшою кількістю банкнот. Очевидно, що при цьому кількість банкнот вартістю 2 грн не більша, ніж чотири, бо інакше п'ять таких банкнот можна було б замінити на дві банкноти по 5 грн. Інші варіанти утворюються заміною двох банкнот по 5 грн на п'ять банкнот по 2 грн. Отже, якщо такий розмін можливий рівно сімома способами, то найбільша кількість банкнот по 5 грн має дорівнювати 12 або 13. Оскільки найменша кількість банкнот по 2 грн може дорівнювати 0, 1, 2, 3 або 4, то отримуємо 2 набори шуканих значень N: $\{60, 62, 64, 66, 68\}$ та $\{65, 67, 69, 71, 73\}$.

8. На медіані AD нерівнобедреного трикутника ABC відмітили точку E. Точка F — проекція точки E на пряму BC, точка M лежить на відрізку EF, точки N та P — проекції точки M на прямі AC та AB відповідно. Доведіть, що бісектриси кутів PMN та PEN паралельні.

Розв'язок.

Лема. Нехай у чотирикутнику $ABCD$ кути B і D рівні. Тоді бісектриси кутів DCB та DAB паралельні.



Доведення леми. Нехай CR, AS — бісектриси кутів DCB та DAB. Тоді

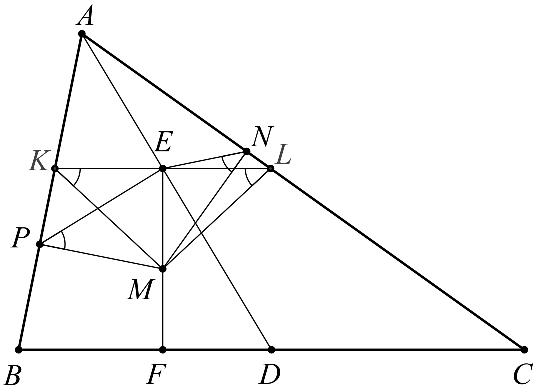
$$\angle DCR = \tfrac{1}{2}\angle C = \tfrac{1}{2}(360^\circ - \angle B - \angle D - \angle A) = \tfrac{1}{2}(360^\circ - 2\angle D - \angle A) = 180^\circ - \angle D - \tfrac{1}{2}\angle A,$$

а отже $\angle DRC = \frac{1}{2}\angle A = \angle DAS$.

[1]вчителі математики ліцею "Наукова зміна"

Перейдемо тепер до розв'язання задачі. Чотирикутник $ANMP$ задовольняє умову леми. Отже, бісектриса кутів NMP паралельна бісектрисі кута BAC. Покажемо, що чотирикутник $ANEP$ також задовольняє умову леми, тоді бісектриса кута PEN паралельна бісектрисі кута BAC, а отже і бісектрисі кута NMP.

Оскільки $\angle APE = 90^\circ - \angle EPM$, $\angle ANE = 90^\circ - \angle ENM$, то достатньо показати рівність кутів EPM та ENM. Проведемо $KL \parallel BC$ через точку E. Тоді $\angle KPM = \angle KEM = 90^\circ$. Отже, точки E, M, P, K лежать на одному колі. Звідси $\angle EPM = \angle EKM$. Аналогічно $\angle ENM = \angle ELM$. Трикутники AKL та ABC гомотетичні. Тому AE — медіана трикутника AKL, тобто E — середина KL. Отже, ME є медіаною та висотою трикутника KLM, тобто цей трикутник рівнобедрений та $\angle EKM = \angle ELM$, звідки $\angle EPM = \angle ENM$.



9. Деяке чотирицифрове число записане послідовними цифрами в порядку зростання, друге число записане тими самими цифрами, але в порядку спадання, третє число записане тими самими цифрами. Які це числа, якщо їх сума дорівнює 12300?

Відповідь: 2345, 5432, 4523.

Розв'язок. Перше число має дорівнювати 2345, бо якщо воно не менше, ніж 3456, то сума трьох чисел не менша за $3456 + 3456 + 6543 > 12300$, а якщо воно дорівнює 1234, то сума трьох чисел не перевищує $1234 + 4321 + 4321 < 12300$. Тоді друге число дорівнює 5432, а третє — 4523.

10. Десять робітників мають виготовити 50 деталей. Кожну деталь потрібно спочатку пофарбувати, а потім змонтувати. Час фарбування — 10 хвилин, час монтування — 20 хвилин, після фарбування деталь має висихати 5 хвилин. Як поділити робітників на малярів та монтувальників, аби виконати роботу у найкоротший термін?

Відповідь: Треба виділити 3 малярів і 6 монтувальників. Того робітника, який залишився, можна призначити будь-ким, а можна взагалі не використовувати, від цього час роботи — 195 хвилин — не зміниться.

Розв'язок. Якщо малярів буде менше трьох, то на фарбування знадобиться не менше 250 хвилин. Якщо монтувальників буде менше шести, то на монтування піде не менше 200 хвилин.

Розглянемо загальний час роботи для випадку 3 малярів та 7 монтувальників. Кожні 10 хвилин з'являються 3 пофарбовані деталі, тому останню деталь буде пофарбовано через 170 хвилин після початку роботи. Ще 5 хвилин вона висихатиме та 20 хвилин її монтуватимуть, отже робота вимагає принаймні 195 хвилин.

Нехай тепер є 4 маляри та 6 монтувальників. Тоді першу деталь фарбуватимуть та вона висихатиме 15 хвилин. Далі, за 20 хвилин можна змонтувати 6 деталей, тобто останню деталь буде змонтовано не раніше, ніж через 180 хвилин після початку роботи монтувальників, а вся робота вимагає принаймні 195 хвилин.

Нарешті, перевіримо що 195 хвилин вистачить навіть 9 робітникам — 3 малярам та 6 монтувальникам. Справді, 3 монтувальники зможуть розпочати роботу через 15 хвилин після початку роботи малярів, а наступні 3 — через 25 хвилин. Перші 3 готові деталі з'являться через 35 хвилин після початку роботи та надалі по 3 готові деталі з'являтимуться кожні 10 хвилин, тому на всю роботу піде як раз 195 хвилин.

СПИСОК ЧИТАЧІВ, ЩО НАДІСЛАЛИ ПРАВИЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ

Биков Ростислав *(9 клас, м. Одеса)* 6, 7, 8, 9, 10;
Гупалик Ірина *(7 клас, с. Пнівне Волинської обл.)* 9;
Кіпень Наталія *(9 клас, м. Камінь-Каширський Волинської обл.)* 9;
Нестеренко Дмитро *(8 клас, м. Одеса)* 6, 7, 8, 9, 10;
Селиханович Данило *(7 клас, м. Одеса)* 9;
Чорний Михайло *(8 клас, м. Бровари Київської обл.)* 7, 9.