Конкурс “Від задачок до задач”

Розв'язання задач 1 — 5

Розділ ведуть Олександр Бедов та Ігор Гольдштейн[1]

1. У футбольному турнірі, в якому брали участь 16 команд, кожна команда зіграла з кожною іншою по одному разу. Чи могло трапитися, що у кожної команди кількість її перемог виявилась такою ж, як кількість її нічиїх? Якою буде відповідь, якщо у турнірі брали участь 15 команд?

Відповідь: могло і для 16, і для 15 команд.

Розв'язок. Наведемо приклад шуканого турніра для 16 команд. Розташуємо команди по колу і нехай кожна команда виграє у 5 команд, які йдуть по колу після неї, програє 5 командам, які стоять по колу перед нею, та зіграє внічию з 5 командами, що залишились.

Тепер вкажемо приклад турніра з 15 командами. Розташуємо 14 команд по колу і нехай кожна команда виграє у 3 команд, які йдуть по колу після неї, програє 3 командам, які стоять по колу перед нею, та зіграє внічию з 4 командами, що залишились. Якщо тепер усі ці команди виграють у останньої команди, то у них буде по 4 перемог та нічиїх, а у останньої команди будуть лише поразки.

Зауваження. Наведені приклади очевидно узагальнюються на довільну кількість команд вигляду $3k+1$ або $3k$. Покажемо, що для кількості команд вигляду $3k+2$ шуканий турнір провести неможливо. Справді, нехай команди отримують 2 очки за перемогу, 1 — за нічию та 0 — за поразку. Тоді кожна команда за умовою має отримати кількість очок, що ділиться на 3, а тому і загальна кількість очок, що розігрується в турнірі, має ділитися на 3. Проте ця кількість дорівнює подвоєній кількості матчів, тобто $(3k+2)(3k+1)$, суперечність.

2. Нехай O — центр описаного кола, а AD — бісектриса гострокутного трикутника ABC. Перпендикуляр, проведений з точки D до прямої AO, перетинає пряму AC в точці P. Довести, що $AP = AB$.

Розв'язок. Нехай $AH \perp BC$ (див. рис. 1). Тоді $\angle ANM = 90°$, $NM \parallel BC$, $\smile BN = \smile CM$, $\angle BAN = \angle CAM$. Звідси $\angle HAD = \angle TAD$ та $\triangle HAD = \triangle TAD$ за кутом та гіпотенузою, $\angle ADH = \angle ADT$. Далі розглянемо два випадки.

1) Точка P належить стороні AC. Тоді

$$\angle ADB = \angle ADH = \angle ADT = \angle ADP,$$

$\triangle ADB = \triangle ADP$ за стороною та двома кутами, звідки $AB = AP$.

2) Точка P належить продовженню сторони AC. Тоді

$$\angle ADB = 180° - \angle ADH = 180° - \angle ADT = \angle ADP,$$

та знову $\triangle ADB = \triangle ADP$, звідки $AB = AP$.

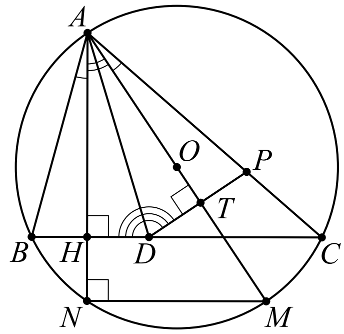

Рис. 1.

[1]вчителі математики ліцею “Наукова зміна”

3. Вінні-Пух завітав у гості до Кролика. Кролик почастував Вінні-Пуха медом та згущеним молоком. Вінні-Пух помітив, що кількість горщиків з медом була меншою, ніж потроєна кількість горщиків зі згущеним молоком, але коли він підкріпився 8 горщиками з медом, їх все одно лишилося більше, ніж зі згущеним молоком. Скільки горщиків з медом залишилось, якщо спочатку всіх горщиків було менше 20?

Відповідь: 6 горщиків.

Розв'язок. Нехай у Кролика було X горщиків зі згущеним молоком та Y горщиків з медом. Тоді за умовою $3X > Y$, $Y - 8 > X$ та $X + Y < 20$. Звідси $3X > Y > X + 8$ та $2X + 8 < X + Y < 20$. Отже, $4 < X < 6$, звідки $X = 5$. Крім того, $13 = X + 8 < Y < 3X = 15$, тому $Y = 14$ та $Y - 8 = 6$.

Зауваження. Задачу можна розв'язати і графічно. Для цього слід зобразити на координатній площині прямі $y = 3x$, $y - 8 = x$ та $x + y = 20$ та зауважити, що цілі числа X, Y задовольняють нерівності $3X > Y$, $Y - 8 > X$ та $X + Y < 20$ тоді й лише тоді, коли точка (X, Y) лежить всередині (не на межі) трикутника, обмеженого даними прямими. Єдина така точка — $(5, 14)$.

4. Про п'ять різних натуральних чисел відомо, що серед всіх можливих попарних сум цих чисел рівно сім різних. Довести, що сума цих чисел ділиться на п'ять.

Розв'язок. Нехай $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$. Тоді

$$a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < a_1 + a_4 < a_1 + a_5 < a_2 + a_5 < a_3 + a_5 < a_4 + a_5.$$

Ми вже дістали сім різних сум, тому кожна з сум $a_2+a_3, a_2+a_4, a_3+a_4$ має дорівнювати одній з вже зазначених. Оскільки $a_1 + a_3 < a_2 + a_3 < a_2 + a_4 < a_3 + a_4 < a_3 + a_5$, то звідси отримуємо такі рівності:

$$\begin{cases} a_1 + a_4 = a_2 + a_3, \\ a_1 + a_5 = a_2 + a_4, \\ a_2 + a_5 = a_3 + a_4. \end{cases}$$

Звідси $a_4 - a_3 = a_2 - a_1$, $a_5 - a_4 = a_2 - a_1$, $a_3 - a_2 = a_5 - a_4 = a_2 - a_1$. Отже, числа утворюють арифметичну прогресію та $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5a_3$.

5. Чи можна зафарбувати деякі з клітинок дошки 8×8 таким чином, щоб у кожному квадраті 3×3 було рівно 5 зафарбованих клітинок, а у кожному прямокутнику 4×2 рівно 4?

Відповідь: не можна.

Розв'язок. Припустимо, що таке розфарбування можливе. Розіб'ємо квадрат на 8 прямокутників розміру 4×2 (див. рис. $2a$) В кожному з прямокутників слід зафарбувати 4 клітинки, отже всього зафарбованих клітинок має виявитись 32. Тепер розіб'ємо квадрат на прямокутники як на рис. $2b$.

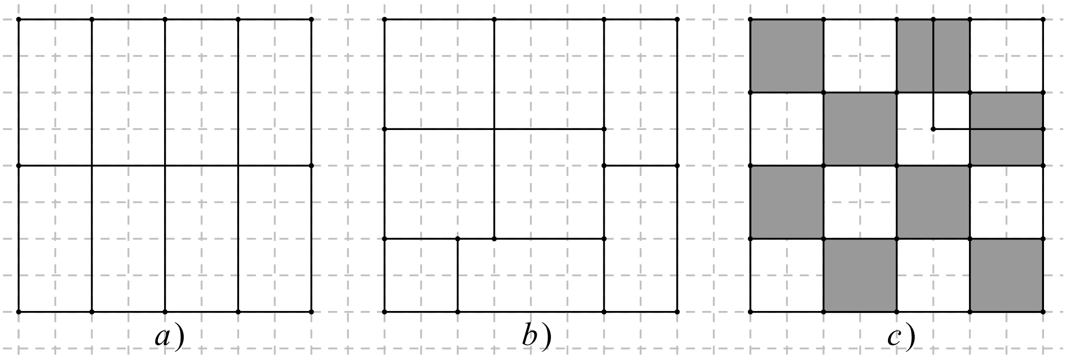

Рис. 2.

На цьому рисунку у прямокутниках 4×2 та квадратах 3×3 вже міститься 32 зафарбованих клітинки, тому в лівому нижньому квадраті 2×2 зафарбованих клітинок немає. Враховуючи, що в кожному прямокутнику 4×2 має бути рівно 4 зафарбованих клітинки, встановлюємо, що усі клітинки сусідніх з ним квадратів 2×2 зафарбовані. Рухаючись вправо та вгору, однозначно відновлюємо розфарбування усіх клітинок (рис. 2c). Але тоді у правому верхньому квадраті 3×3 лише 4 зафарбованих клітинки, суперечність.

СПИСОК ЧИТАЧІВ, ЩО НАДІСЛАЛИ ПРАВИЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ

Биков Ростислав *(м. Одеса)* 1, 2, 3, 4, 5;
Гупалик Ірина *(7 клас, с. Пнівне Волинської обл.)* 3;
Кіпень Наталія *(9 клас, м. Камінь-Каширський Волинської обл.)* 3;
Мальцев Андрій *(9 клас, м. Запоріжжя)* 1, 2, 3, 4, 5;
Нестеренко Дмитро *(8 клас, м. Одеса)* 3;
Хівренко Герман *(7 клас, м. Київ)* 2, 3;
Чорний Михайло *(8 клас, м. Бровари Київської обл.)* 2, 3, 5;
математичний гурток НВК №1 (м. Камінь-Каширський Волинської обл.) 2, 3.
гурток "Юний математик" Блистівської ЗОШ (с. Блистівка Чернігівської обл.) 2, 3.