

Конкурс “Від задачок до задач”

Другий тур (задачі 6 — 10)

Розділ ведуть Віталій Полонський та Михайло Якір

Розв’язання задач з цього номеру слід надсилати до 15 серпня на адресу:

01601 МСП, Київ,
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
механіко-математичний факультет
кафедра теорії ймовірностей
Конкурс “Від задачок до задач”

Бажаємо успіхів!

6. Чи існує 2010-цифрове натуральне число n , десятковий запис якого не містить цифри 0 і яке дорівнює сумі двох доданків, кожний з яких отримано в результаті деякої перестановки цифр числа n ?

7. Усі інспектори ДАІ одного району отримали однакову зарплату. Деякі з них згадали, що за останній місяць порушили кілька статей Правил дорожнього руху. Після того, як усі порушники сплатили відповідні штрафи кожному зі своїх колег, виявилось, що у інспектора Петренка від зарплати залишилися 108 гривень, а у інспектора Коваленка — 97 гривень. Скільки інспекторів ДАІ працює в цьому районі?

Примітка. Штраф за будь-яке порушення складає ціле число гривень.

8. Доведіть, що рівняння

$$x^2 + y^2 + z^2 - 7 = xy + yz + zx$$

має безліч розв’язків у натуральних числах.

9. На сторонах AB , BC , CD і DA паралелограма $ABCD$ позначили відповідно точки M , N , K і F . Чи можна, використовуючи тільки циркуль, визначити, чи дорівнює площа чотирикутника $MNKF$ половині площі паралелограма $ABCD$?

10. Знайдіть усі такі натуральні числа $n > 1$, що для будь-яких чисел x_1, x_2, \dots, x_n , для яких виконується рівність $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$, також виконується рівність

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n = nx_1x_2 \cdot \dots \cdot x_n.$$