

# Конкурс “Від задачок до задач”

## Третій тур (задачі 11 – 15)

11. На полиці стоять томи Енциклопедії з номерами  $1, 2, 3, \dots, n$ . При яких  $n$  можна зняти з полиці один том так, аби середнє арифметичне номерів томів, які залишилися, стало рівним  $9\frac{3}{4}$ ?
12. Розмовляють четверо гномів.
- Алін: у Дваліна більше алмазів, ніж у мене.
- Балін: кількість алмазів у Дваліна дорівнює подвоєній кількості алмазів у Аліна.
- Галін: у когось із вас лише один алмаз.
- Двалін: Балін сказав правду.
- Відомо, що усього у гномів п'ять алмазів та лише один гном збрехав. У кого скільки алмазів?
13. Нехай  $ABC$  — рівнобедрений гострокутний трикутник ( $AB = BC$ ). На стороні  $BC$  відмітили точку  $P$  таку, що  $\angle PAC = 45^\circ$ , а  $Q$  — точка перетину серединного перпендикуляра до відрізка  $AP$  зі стороною  $AB$ . Довести, що  $PQ \perp BC$ .
14. У країні, розташованій на 1344 островах, між деякими парами островів побудовано мости. Відомо, що якщо зачинити будь-які два мости на ремонт, то з будь-якого острова все одно можна буде дістатися по мостах на будь-який інший острів. При якій найменшій кількості мостів це можливо?
15. Знайти всі цілі числа  $x, y$ , які задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} x - \frac{4}{y} = \frac{5}{x}, \\ y - \frac{4}{x} = \frac{5}{y}. \end{cases}$$