XIV Всеукраїнський турнір юних математиків

О. Г. Кукуш[1]*, І. М. Мітельман*[2]*, О. Н. Нестеренко*[3]*,*
К. В. Рабець[4]*, І. В. Федак*[5]*, В. А. Ясінський*[6]

З 24 по 29 жовтня 2011 р. у місті Львові проходив XIV Всеукраїнський турнір юних математиків імені професора М.Й. Ядренка. У ньому взяли участь 24 команди з багатьох областей України. Творчі здобутки учасників оцінювало поважне журі, у складі якого працювали професори, доценти, викладачі вищих та середніх навчальних закладів, наукові співробітники академічних інститутів, студенти та аспіранти національних університетів України. Головою журі ТЮМу був академік НАН України М.О. Перестюк, експертом-консультантом турніру — доцент К.В. Рабець, заступниками голови журі — професор О.Г. Кукуш, доценти І.Й. Гуран, І.М. Мітельман, В.А. Ясінський.

Турнір 2011 року проходив за усталеною схемою. Першим етапом змагання були чвертьфінальні математичні бої, котрі проводились за завчасно оголошеним списком задач, який публікувався в журналах "У світі математики", "Математика в школі" та газеті "Математика". За результатами чвертьфінальних боїв визначились дванадцять команд-півфіналістів, які утворили три півфінальні "четвірки", котрі змагались у два кола (для півфінальних боїв був сформований список з 10 задач, що отримали найвищий рейтинг за опитуванням команд: 2-7, 10-12, 14). За рішенням журі та оргкомітету у фінал вийшли три команди — переможці півфінальних "четвірок": команда "Харків" — збірна м. Харкова (ФМЛ №27 та НВК №45 "Академічна гімназія"), команда "Волинь" — збірна Волинської області та команда "Луматики" Луганської СЗОШ №1 імені професора Л.М. Лоповка. Для фінального бою, що проходив в одне коло, командам був запропонований список з шести нових задач, які команди мали розв'язувати протягом чотирьох годин без будь-якої сторонньої підтримки.

За підсумками основних змагань ТЮМу дипломами переможців I-III ступенів було нагороджено 12 команд.

Дипломами I ступеня: команда "Харків"; команда "Волинь".

Дипломами II ступеня: команда "Луматики"; команда "ДніпроЛІТ" Дніпропетровського ліцею інформаційних технологій при ДНУ імені Олеся Гончара; команда "ФТЛ" фізико-технічного ліцею при Івано-Франківському університеті нафти і газу; команда "КВАНТ.КОМ" спеціалізованої школи-інтернату "Обдарованість" Харківської обласної ради.

---

[1]професор Київського національного університету імені Тараса Шевченка, заступник голови журі турніру

[2]заслужений вчитель України, доцент, заступник директора Рішельєвського ліцею при Одеському національному університеті імені І.І. Мечникова, заступник голови журі турніру

[3]доцент Київського національного університету імені Тараса Шевченка, член журі турніру

[4]доцент Сумського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти, експерт-консультант турніру

[5]доцент Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, член журі турніру

[6]заслужений вчитель України, доцент Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського, заступник голови журі турніру

Дипломами III ступеня: команда "Париська Сорбонна" Парищенської ЗОШ Івано-Франківської області; команда "Флібустьєри" Миколаївського морського ліцею імені професора М. Александрова; команда "Інтелект" — збірна гімназії №14 та НВК №26 м. Луцька; команда "Елітар" Рівненського природничо-математичного ліцею; команда "Адепти мудрості" ліцею №208 м. Києва; команда "Черкаси" — збірна м. Черкас (фізико-математичний ліцей та СШ №17).

З числа учасників турніру 69 учнів (за бажанням) брали участь у математичній олімпіаді. Учасники турніру мали змогу взяти участь і в інших цікавих заходах. Важливою складовою турніру був традиційний математичний лекторій, який проводився членами журі — відомими математиками та педагогами.

Докладну інформацію щодо підсумків та перебігу турніру розміщено на його сайті `www.ukrtym.blogspot.com`.

Журі почуло чимало ґрунтовних та якісних доповідей команд. Як і завжди, оцінювались також і окремі просування, розбір часткових випадків, ситуації, коли команда ставила і розв'язувала аналогічну, але простішу задачу. Для задач, які на перший погляд здавались надто простими, високо оцінювались різноманітні узагальнення. Значна увага приділялась важливому питанню культури доповідей, різноманітним сучасним способам презентації результатів роботи над задачами. Усе це сприяло пануванню на турнірі атмосфери справжнього математичного свята.

Задачі відбірних етапів XIV Всеукраїнського турніру юних математиків

Задача 1. Найменше значення. Знайдіть усі трійки натуральних чисел a, b, c, для яких вираз

$$\frac{1024}{a} + \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{2}$$

набуває свого найменшого значення.

Розв'язання. Запишемо даний вираз як суму 15 доданків:

$$A = 8 \cdot \frac{128}{a} + 4 \cdot \frac{a^2}{4b} + 2 \cdot \frac{b^2}{2c} + \frac{c^2}{2}$$

За нерівністю Коші для 15 чисел

$$A \geq 15 \sqrt[15]{\left(\frac{128}{a}\right)^8 \left(\frac{a^2}{4b}\right)^4 \left(\frac{b^2}{2c}\right)^2 \frac{c^2}{2}} = 120,$$

Рівність досягається за умови

$$\frac{128}{a} = \frac{a^2}{4b} = \frac{b^2}{2c} = \frac{c^2}{2},$$

тобто при $a = 16, b = 8, c = 4$. Отже, найменшим значенням даного виразу на множині натуральних чисел є 120.

Задача 2. Ланцюжок кіл. Вісім кіл радіуса R розташовані у прямокутному трикутнику ABC так, як на рисунку 1. Знайдіть радіус кола, вписаного у цей трикутник.

Розв'язання. Розглянемо трикутник $A_1B_1C_1$ (рис. 1), вершинами якого є центри крайніх кіл ланцюжка. Сторони цього трикутника дорівнюють $8R, 6R$ та $10R$, а отже радіус кола, вписаного у цей трикутник, становить $r' = \frac{1}{2}(8R + 6R - 10R) = 2R$. Оскільки відстані між відповідними сторонами трикутників $A_1B_1C_1$ та ABC є однаковими та дорівнюють R, дістаємо, що радіус вписаного у трикутник ABC кола становить $r = r' + R = 3R$.

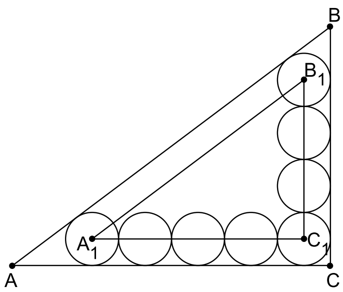

Рис. 1.

Аналогічно, якщо вздовж катетів прямокутного трикутника ABC розміщено $m+1$ та $n+1$ кіл радіуса R, то $r = \left(m + n - \sqrt{m^2 + n^2} + 1\right) R$.

Можна розглянути і просторове **узагальнення** даної задачі: нехай три ребра тетраедра попарно перпендикулярні і вздовж цих ребер розміщено відповідно $m+1, n+1$ та $k+1$ куль радіуса R так, що кожна з куль дотикається до двох перпендикулярних граней тетраедра (одна куля у вершині тетраедра дотикається до всіх трьох попарно перпендикулярних граней), сусідні кулі, розташовані вздовж одного ребра, дотикаються одна до одної, крайні з куль вздовж кожного з ребер дотикаються ще й до четвертої грані тетраедра. Радіус кулі, вписаної у такий тетраедр, дорівнює

$$r = \left(\frac{2mnk}{mn + nk + km + \sqrt{m^2n^2 + n^2k^2 + k^2m^2}} + 1 \right) R.$$

Для обґрунтування цієї формули слід розглянути менший прямокутний тетраедр з вершинами у центрах чотирьох куль, грані якого паралельні граням вихідного тетраедра та знаходяться від них на відстані R. Радіус вписаної в менший тетраедр кулі становитиме $r' = \frac{3V'}{S'}$, де V', S' — його об'єм та площа поверхні, які неважко виразити через m, n, k та R.

Задача 3. Суми кубів та квадратів.

а) Доведіть, що для будь-якого натурального числа $n \geq 2$ існує натуральне число m, яке можна подати у вигляді суми кубів 2, 3, ..., n попарно різних натуральних чисел.

б) Доведіть, що для будь-якого натурального числа $n \geq 3$ існує натуральне число m, куб якого можна подати у вигляді суми кубів n попарно різних натуральних чисел.

в) Доведіть, що для кожного натурального числа $n \geq 2$ існує натуральне число m, квадрат якого можна подати у вигляді суми квадратів 2, 3, ..., n різних натуральних чисел.

Розв'язання. Будемо розв'язувати завдання у порядку зростання складності:

в) Зауважимо, що для $n = 2$ таке число існує. Наприклад, $5^2 = 4^2 + 3^2$.

Припустимо, що існує m, для якого виконуються рівності

$$m^2 = a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = \ldots = x_1^2 + \ldots + x_k^2,$$

причому в усіх сумах доданки записані у порядку спадання.

Оскільки при цьому

$$
\begin{aligned}
(5m)^2 &= (5a_1)^2 + (5a_2)^2 = (5b_1)^2 + (5b_2)^2 + (5b_3)^2 = \ldots = \\
&= (5x_1)^2 + \ldots + (5x_k)^2 = (5x_1)^2 + \ldots + (5x_{k-1})^2 + (4x_k)^2 + (3x_k)^2\,,
\end{aligned}
$$

то для $n = k + 1$ шукане число теж існує.

Отже, шукані числа m існують для всіх $n \geq 2$.

а) Для $n = 2$ та $n = 3$ таке число існує: $4941 = 14^3 + 13^3 = 17^3 + 3^3 + 1^3$.

Припустимо, що існує таке m, для якого

$$
m = a_1^3 + a_2^3 = b_1^3 + b_2^3 + b_3^3 = \ldots = x_1^3 + \ldots + x_k^3 = y_1^3 + \ldots + y_{k+1}^3,
$$

причому в усіх сумах доданки записані у порядку спадання.

Зауважимо, що $6^3 = 5^3 + 4^3 + 3^3$, звідки дістаємо рівності

$$
\begin{aligned}
6^3 m &= (6a_1)^3 + (6a_2)^3 = (6b_1)^3 + (6b_2)^3 + (6b_3)^3 = \ldots = \\
&= (6x_1)^3 + \ldots + (6x_k)^3 = (6y_1)^3 + \ldots + (6y_{k+1})^3 = \\
&= (6x_1)^3 + \ldots + (6x_{k-1})^3 + (5x_k)^3 + (4x_k)^3 + (3x_k)^3\,.
\end{aligned}
$$

Тому для $n = k + 2$ шукане число m теж існує, а отже шукані числа m існують для всіх $n \geq 2$.

б) Зауважимо, що для $n = 3$ та $n = 4$ такі числа існують: $6^3 = 5^3 + 4^3 + 3^3$, $13^3 = 12^3 + 7^3 + 5^3 + 1^3$. Звідси випливає, що

$$
78^3 = 65^3 + 52^3 + 39^3 = 72^3 + 42^3 + 30^3 + 6^3.
$$

Припустимо, що число m^3 є сумою кубів $3, 4, \ldots, k + 1$ попарно різних натуральних чисел. Аналогічно до пункту а) дістаємо, що число $(6m)^3$ є сумою кубів $3, 4, \ldots, k + 2$ чисел, тобто для $n = k + 2$ шукане число теж існує. Отже, шукані числа m існують для всіх $n \geq 3$.

Як **узагальнення** розглянемо питання про подання четвертих степенів натуральних чисел m у вигляді суми четвертих степенів 3, 4, …, n попарно різних натуральних чисел. Ойлер висловив гіпотезу, що для $n = 3$ це неможливо, проте пізніше було встановлено, що для чисел

$$
A = 20615673, B = 18796760, C = 15365639, D = 2682440
$$

виконується рівність $A^4 = B^4 + C^4 + D^4$. Оскільки $353^4 = 315^4 + 272^4 + 120^4 + 30^4$, то число $m^4 = (353 \cdot A)^4$ можна подати у вигляді суми четвертих степенів як трьох, так і чотирьох різних натуральних чисел.

Припустимо, що існує таке m, для якого

$$
m^4 = a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 = b_1^4 + b_2^4 + b_3^4 + b_4^4 = \ldots = x_1^4 + \ldots + x_k^4 = y_1^4 + \ldots + y_{k+1}^4,
$$

причому в усіх сумах доданки записані у порядку спадання.

Помноживши обидві частини цієї рівності на A^4, отримаємо розклади числа $(Am)^4$ у суму $3, 4, \ldots, k+1$ доданків, а також розклад

$$(Am)^4 = (Ax_1)^4 + \ldots + (Ax_{k-1})^4 + (Bx_k)^4 + (Cx_k)^4 + (Dx_k)^4\,.$$

Тому для $n = k+2$ шукане число m теж існує, а отже, воно існує для кожного $n \geq 3$.

Задача 4. Біноміальні коефіцієнти та системи числення. а) Як за розкладами натуральних чисел m та n у двійковій системі числення визначити, чи є біноміальний коефіцієнт C_n^m парним числом?

б) Як за розкладами натуральних чисел m та n у двійковій системі числення визначити показник найбільшого степеня числа 2, на який ділиться без остачі біноміальний коефіцієнт C_n^m?

Розв'язання. Якщо $n! = a \cdot 2^{p_n}, m! = b \cdot 2^{p_m}, (n-m)! = c \cdot 2^{p_{n-m}}$, де a, b, c — непарні числа, то

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \ \text{ ділиться на } \ 2^{p_n - p_m - p_{n-m}}.$$

Доведемо методом математичної індукції, що для $n = 2^k$, $k \geq 0$, буде $p_n = 2^k - 1$. Для $k = 0$ маємо $(2^0)! = 1, p_1 = 2^0 - 1 = 0$. Припустимо, що $p_n = 2^i - 1$ для $k = i$. Далі зауважимо, що максимальні степені двійки, на які діляться відповідні числа з діапазонів $1, 2, \ldots, 2^i - 1$ та $2^i + 1, 2^i + 2, \ldots, 2^{i+1} - 1$, є однаковими, а степінь двійки у числі 2^{i+1} на 1 більший, ніж у числі 2^i. Тому для $k = i+1$ отримуємо $p_n = (2^i - 1) \cdot 2 + 1 = 2^{i+1} - 1$, що й слід було довести.

Нехай тепер $2^k < n < 2^{k+1}$, $m = n - 2^k$. Оскільки максимальні степені двійки, на які діляться відповідні числа з діапазонів $1, 2, \ldots, m$ та $2^k + 1, 2^k + 2, \ldots, n = 2^k + m$, є однаковими, то $p_n = p_{2^k} + p_m = \left(2^k - 1\right) + p_m$.

Узагальнюючи цю рівність, для числа $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_l}$ $(k_1 > k_2 > \ldots > k_l)$ отримуємо $p_n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_l} - l = n - l$. Звідси $p_n = n - l_n$, де l_n — кількість одиниць у двійковому записі числа n.

Далі за двійковими записами чисел m, n знаходимо двійковий запис числа $n - m$, а отже і показник

$$\alpha = p_n - p_m - p_{n-m} = (n - l_n) - (m - l_m) - (n - m - l_{n-m}) = l_m + l_{n-m} - l_n.$$

Таким чином, приходимо до висновку: якщо $\alpha = 0$, тобто у двійкових записах чисел m та $n - m$ разом використано одиниць стільки ж, як у двійковому записі числа n, то біноміальний коефіцієнт непарний, а якщо $\alpha > 0$, то він парний. Зокрема, при фіксованому n всі біноміальні коефіцієнти є непарними лише тоді, коли $n = 2^k - 1$, $k \in \mathbb{N}$. Якщо $\alpha = k$, то максимальний степінь двійки, на який ділиться біноміальний коефіцієнт C_n^m, дорівнює k.

Наприклад, для чисел $n = 41_{(10)} = 101001_{(2)}, m = 19_{(10)} = 10011_{(2)}$ знаходимо $n - m = 22_{(10)} = 10110_{(2)}, l_n = l_m = l_{n-m} = 3, \alpha = 3 + 3 - 3 = 3$.

З доведеного випливає таке просте правило: біноміальний коефіцієнт C_n^m непарний, коли віднімання m від n у двійковому записі "у стовпчик" відбувається без жодного переносу. Проілюструємо на прикладі, як найпростіше обчислити показник α. Запишемо двійковий запис числа m під двійковим записом числа n, для зручності доповнивши зліва цифри числа m нулями:

$$n = 41_{(10)} = 1\bar{0}1\bar{0}\bar{0}1_{(2)}$$
$$m = 19_{(10)} = 010011_{(2)}$$

Проведемо зверху риску над кожним розрядом, в якому при відніманні m від n доводиться робити перенос. Кількість таких рисок дорівнює максимальному степеню двійки, на який ділиться відповідний біноміальний коефіцієнт.

Як **узагальнення** отриманих результатів відзначимо, що з теореми французького математика Люка, доведеної у 1878 році, випливають такі твердження:

1) C_n^m не ділиться на просте число p тоді і тільки тоді, коли у записі числа m за основою числення p у всіх розрядах записані цифри не перевищують відповідних цифр у записі числа n за цією ж основою.

2) У послідовності $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^m, \ldots, C_n^n$ жоден коефіцієнт не ділиться на просте число p тоді і тільки тоді, коли $n = sp^k - 1$, де k — довільне натуральне число, а натуральне число $s < p$.

Задача 5. Ковзаюче коло. Коло ω_0 радіуса R_0 дотикається до прямої l у точці A. Нехай R — задане додатне число. Розглядаються всілякі кола ω радіуса R, які дотикаються до прямої l у точці D та мають з колом ω_0 дві різні спільні точки B та C, причому точка B більш віддалена від l, ніж C. Знайдіть геометричне місце центрів описаних кіл усіх отриманих таким чином трикутників ABD.

Розв'язання. Нехай M — центр кола, описаного навколо трикутника ABD, O_0, O — центри кіл ω_0 та ω відповідно (рис. 2). Тоді $\angle BMD = 2\angle BAD = \angle BO_0D$, а оскільки трикутники AO_0B та DMB рівнобедрені, то вони подібні. Отже, $AM = DM = \frac{DB}{AB} \cdot R_0$. Аналогічно з подібності трикутників AMB та DOB дістаємо $AM = \frac{AB}{DB} \cdot R$. Звідси $AM = \sqrt{\frac{DB}{AB} \cdot R_0 \cdot \frac{AB}{DB} \cdot R} = \sqrt{R_0 \cdot R}$.

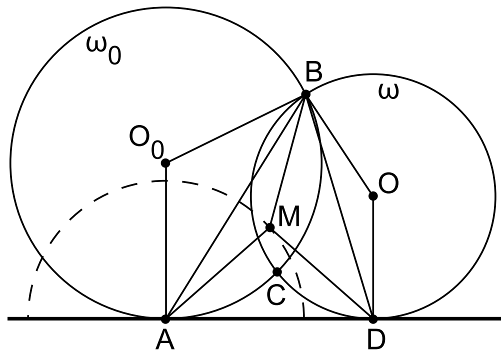

Рис. 2.

Отже, точка M лежить на колі радіуса $\sqrt{R_0 \cdot R}$ з центром у точці A. Неважко перевірити, що точкою M може бути довільна точка півкола радіуса $\sqrt{R_0 \cdot R}$ з центром у точці A, яка не належить прямим AD та AO_0.

Задача 6. Функціональні рівняння. Знайдіть усі такі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що для всіх дійсних значеннях x, y виконується рівність:

а) $f\left(f\left(x\right)+y^2\right)=x+y^2$;

б) $f\left(f\left(f\left(x\right)\right)+y\right)=x+y$.

Розв'язання. а) При $x=t, y=0$ маємо $f(f(t))=t,\ t\in\mathbb{R}$, тому функція f в різних точках набуває різні значення. При $t=f\left(x\right)+y^2$ отримуємо

$$f\left(f\left(f\left(x\right)+y^2\right)\right)=f\left(x\right)+y^2,$$

а застосувавши функцію f до обох частин вихідного рівняння дістаємо

$$f\left(f\left(f\left(x\right)+y^2\right)\right)=f\left(x+y^2\right).$$

Тому $f\left(x+y^2\right)=f\left(x\right)+y^2,\ \ x,y\in\mathbb{R}$. Звідси при $t\geq 0,\ x=0,\ y^2=t$ дістаємо $f\left(t\right)=f\left(0\right)+t$, а при $t\leq 0,\ x=t,\ y^2=-t$ відповідно $f\left(0\right)=f\left(t\right)-t$. Отже, $f\left(t\right)=t+c,\ t\in\mathbb{R}$. Підставляючи цю функцію у вихідне рівняння, отримуємо єдиний розв'язок $f\left(t\right)=t,\ t\in\mathbb{R}$.

Аналогічно можна розв'язати рівняння

$$f\left(\ldots f\left(f\left(x\right)+y^2\right)\ldots\right)=x+y^2,$$

у лівій частині якого функцію f застосовано довільну кількість разів.

б) При $x=t, y=0$ дістаємо $f\left(f\left(f\left(t\right)\right)\right)=t,\ t\in\mathbb{R}$, тому функція f в різних точках набуває різні значення. При $x=t, y=-f\left(f\left(t\right)\right)$ отримуємо $f\left(0\right)=t-f\left(f\left(t\right)\right)$, тобто $f\left(f\left(t\right)\right)=t-c$, де $c=f\left(0\right)$. Звідси при $t=0$ маємо $f\left(c\right)=-c$. Крім того, $f\left(f\left(f\left(t\right)\right)\right)=f\left(t-c\right),\ t\in\mathbb{R}$. Таким чином, $f\left(t-c\right)=t,\ t\in\mathbb{R}$. Оскільки з останньої рівності випливає, що $f\left(c\right)=2c$, то $-c=2c$, тобто $c=0,\ f\left(x\right)=x$. Залишається виконати перевірку.

Аналогічно можна розв'язати рівняння

$$f(f(\ldots f\left(f\left(x\right)\right)\ldots)+y)=x+y.$$

Задача 7. Складна нерівність. Нехай задано три набори довільних дійсних чисел: $\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right), \left(b_1,b_2,\ldots,b_n\right), \left(c_1,c_2,\ldots,c_n\right)$. Доведіть, що має місце нерівність

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_kc_k\right)^3\leq\frac{1}{8}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^4+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^4+\sum_{k=1}^{n}c_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}c_k^4+\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right).$$

Розв'язання. Двічі застосовуючи нерівність Коші-Буняковського, дістаємо

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_kc_k\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2b_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}c_k^2}\leq\sqrt[4]{\sum_{k=1}^{n}a_k^4}\cdot\sqrt[4]{\sum_{k=1}^{n}b_k^4}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}c_k^2}.$$

Аналогічно

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_kc_k\leq\sqrt[4]{\sum_{k=1}^{n}b_k^4}\cdot\sqrt[4]{\sum_{k=1}^{n}c_k^4}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2},$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k \le \sqrt[4]{\sum_{k=1}^{n} c_k^4} \cdot \sqrt[4]{\sum_{k=1}^{n} a_k^4} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Перемножимо ці нерівності та застосуємо нерівність Коші. Дістанемо

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k\right)^3 \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^4 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^4 \cdot \sum_{k=1}^{n} c_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} c_k^4 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k^2} \le$$

$$\le \frac{1}{8}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^4 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^4 + \sum_{k=1}^{n} c_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} c_k^4 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2\right),$$

що і вимагалося довести.

Задача 8. Намисто симетричних нерівностей. Для додатних чисел $x \ne y$ доведіть нерівності

а) $\dfrac{8}{(x+y)^2} \le \dfrac{2}{(x-y)^2} + \dfrac{1}{2xy}$; б) $\dfrac{18}{(x+y)^4} \le \dfrac{2}{(x-y)^4} + \dfrac{1}{x^3y + xy^3}$;

в) $\dfrac{16}{(x+y)^6} \le \dfrac{4}{(x-y)^6} + \dfrac{1}{3x^5y + 10x^3y^3 + 3xy^5}$.

Для кожної з нерівностей знайдіть усі пари додатних чисел $x, y, x \ne y$, для яких досягається рівність.

Розв'язання. Розглянемо **більш загальну** нерівність

$$\frac{A}{(x+y)^{2k}} \le \frac{B}{(x-y)^{2k}} + \frac{C}{(x+y)^{2k} - (x-y)^{2k}},$$

де $k \in \mathbb{N}$, а додатні числа A, B, C задовольняють умову $C = \left(\sqrt{A} - \sqrt{B}\right)^2$. Заміною $(x+y)^{2k} = z, (x-y)^{2k} = t$ і відніманням лівої частини від правої вона зводиться до очевидної нерівності

$$\frac{\left(\sqrt{A}t - \sqrt{B}z\right)^2}{zt\,(z-t)} \ge 0, \;\; z > t > 0,$$

рівність у якій досягається лише за умови

$$\sqrt{B}z = \sqrt{A}t \Leftrightarrow \sqrt{B}\,(x+y)^{2k} = \sqrt{A}\,(x-y)^{2k} \Leftrightarrow |x+y| = p\,|x-y| \Leftrightarrow y = \frac{p \pm 1}{p \mp 1}x,$$

де $p = \sqrt[4k]{\frac{A}{B}}$. Нерівності з умови задачі є частковими випадками загальної нерівності при таких значеннях параметрів відповідно:

а) $k = 1, A = 8, B = 2, C = 2$,

б) $k = 2, A = 18, B = 2, C = 8$,

в) $k = 3, A = 16, B = 4, C = 4$.

Задача 9. Несподівані точні квадрати. Цій задачі була присвячена окрема замітка, надрукована у попередньому номері журналу[7].

Задача 10. Вага многочлена. Нехай $Q(x) = 3x^2 + 7x + 2$. Знайдіть хоча б один многочлен $P(x)$ такий, що $P(0) = 1$, і для будь-якого натурального n суми квадратів коефіцієнтів многочленів $P^n(x)$ та $Q^n(x)$, записаних у стандартному вигляді, співпадають.

Розв'язання. Покажемо, що шуканим є, наприклад, многочлен $P(x) = 6x^2+5x+1$, для якого очевидно, що $P(0) = 1$. Зауважимо, що

$$P(x) = (3x+1)(2x+1),\ Q(x) = (3x+1)(x+2).$$

Тому маємо рівність многочленів

$$x^2P(x)P\left(\tfrac{1}{x}\right) = x^2Q(x)Q\left(\tfrac{1}{x}\right) \equiv (3x+1)(x+3)(2x+1)(x+2),$$

звідки

$$x^{2n}P^n(x)\,P^n\left(\tfrac{1}{x}\right) = x^{2n}Q^n(x)\,Q^n\left(\tfrac{1}{x}\right), n \in \mathbb{N}.$$

Якщо покласти $P^n(x) = p_0 + p_1x + \ldots + p_{2n}x^{2n}$, $Q^n(x) = q_0 + q_1x + \ldots + q_{2n}x^{2n}$, то зазначена рівність набуде вигляду

$$\begin{aligned}&\left(p_0 + p_1x + \ldots + p_{2n}x^{2n}\right)\left(p_{2n} + p_{2n-1}x + \ldots + p_0x^{2n}\right) = \\ &\qquad = \left(q_0 + q_1x + \ldots + q_{2n}x^{2n}\right)\left(q_{2n} + q_{2n-1}x + \ldots + q_0x^{2n}\right).\end{aligned}$$

Залишилось зауважити, що коефіцієнти при x^{2n} у її лівій та правій частинах як раз дорівнюють сумам квадратів коефіцієнтів многочленів $P^n(x)$ та $Q^n(x)$ відповідно.

Аналогічно рівними є суми квадратів коефіцієнтів довільних многочленів вигляду $(A+ax)^n(B+bx)^n$ та $(a+Ax)^n(B+bx)^n$.

Задача 11. Бісектриса та висоти. Нехай висоти BB_1, CC_1 гострокутного трикутника ABC перетинають його бісектрису AL у двох різних точках P, Q відповідно. Позначимо F таку точку, що $PF \parallel AB$, $QF \parallel AC$, та T точку перетину дотичних, проведених у точках B, C до описаного кола трикутника ABC. Доведіть, що точки A, F, T лежать на одній прямій.

Розв'язання. Опустимо перпендикуляри з точок P, F та Q на сторони AB та AC (рис. 3). Враховуючи, що точки бісектриси рівновіддалені від сторін кута, дістаємо

$$\begin{aligned}\frac{FM}{FN} = \frac{PC_2}{QB_2} = \frac{PB_1}{QC_1} = \frac{AB_1\operatorname{tg}\angle CAL}{AC_1\operatorname{tg}\angle BAL} = \\ = \frac{AB_1}{AC_1} = \frac{AB\cos\angle BAC}{AC\cos\angle BAC} = \frac{AB}{AC}.\end{aligned}$$

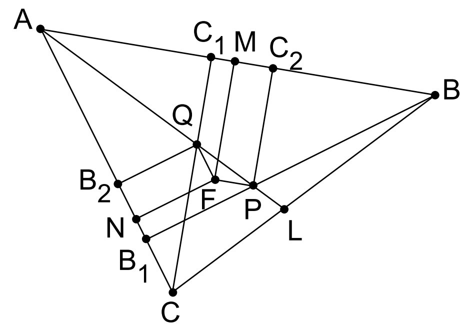

Рис. 3.

[7]І.В. Федак, Несподівані точні квадрати і задача Ойлера, "У світі математики", №4, 2011, с. 5-8.

Опустимо перпендикуляри з точки T на прямі AB та AC (рис. 4). Оскільки $TB = TC$, а дотичні перпендикулярні до відповідних радіусів кола, то

$$\frac{TU}{TV} = \frac{BT\cos\angle BTU}{CT\cos\angle CTV} = \frac{\cos\angle BTU}{\cos\angle CTV} = \\ = \frac{\cos\angle OBA}{\cos\angle OCA} = \frac{2R\cos\angle OBA}{2R\cos\angle OCA} = \frac{AB}{AC}.$$

З доведених рівностей випливає, що $\frac{FM}{FN} = \frac{TU}{TV}$, а тому точка F лежить на прямій AT.

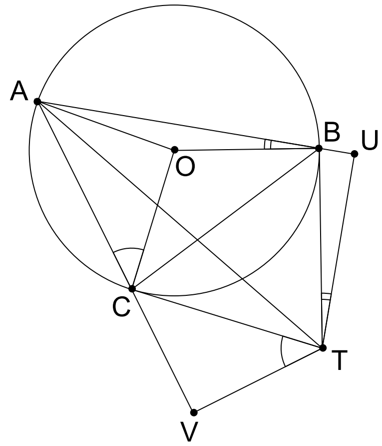

Рис. 4.

Задача 12. Циклічна система рівнянь. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\frac{3x-y}{x-3y} = x^2,\ \frac{3y-z}{y-3z} = y^2,\ \frac{3z-x}{z-3x} = z^2.$$

Розв'язання. Маємо

$$y = \frac{x^3-3x}{3x^2-1},\ z = \frac{y^3-3y}{3y^2-1},\ x = \frac{z^3-3z}{3z^2-1}.$$

Оскільки $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{\operatorname{tg}^3\alpha - 3\operatorname{tg}\alpha}{3\operatorname{tg}^2\alpha - 1}$, то доцільно покласти $x = \operatorname{tg}\alpha, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Тоді

$$y = \operatorname{tg} 3\alpha,\ z = \operatorname{tg} 9\alpha,\ x = \operatorname{tg} 27\alpha.$$

Отже, $\operatorname{tg} 27\alpha = \operatorname{tg}\alpha$, звідки $27\alpha = \alpha + \pi n$, тобто $\alpha = \frac{\pi n}{26}, -12 \le n \le 12$. Звідси

$$x = \operatorname{tg}\frac{\pi n}{26},\ y = \operatorname{tg}\frac{3\pi n}{26},\ z = \operatorname{tg}\frac{9\pi n}{26}, -12 \le n \le 12.$$

Перевірка показує, що при $n = 0$ дістаємо числа $x = y = z = 0$, які не задовольняють вихідну систему, а при $n = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 12$ отримуємо 24 дійсні розв'язки системи.

Задача 13. Дробові частини. Позначимо через $\{x\} = x - [x]$ дробову частину числа x.

а) Доведіть, що існує додатне число λ, яке задовольняє такі три умови:

$$\frac{1}{10} < \{\lambda\} < \frac{9}{10},\ \ \left\{\lambda^2\right\} < \frac{1}{10^6},\ \ \left\{\lambda^3\right\} < \frac{1}{10^6}.$$

б) Чи може таке число λ належати проміжку $(0, 5)$?

Розв'язання. а) В якості **узагальнення** замінимо у твердженні задачі число 10^{-6} на довільне $\varepsilon > 0$.

Розглянемо натуральні числа m, n, k, для яких $m^3 + n = k^2$, та покладемо $\lambda = \sqrt[3]{k}$. Тоді $\{\lambda^3\} = 0$ та $\{\lambda^2\} = \{\sqrt[3]{k^2}\} = \{\sqrt[3]{m^3+n}\}$. За умови, що $n < 3m^2\varepsilon$, дістанемо

$$m < \sqrt[3]{m^3+n} < \sqrt[3]{m^3 + 3m^2\varepsilon + 3m\varepsilon^2 + \varepsilon^3} = m + \varepsilon, \ \text{ звідки } \ \left\{\lambda^2\right\} < \varepsilon.$$

Покладемо $m = 9p^2 + 4p, k = 27p^3 + 18p^2 + 2p$, $p \in \mathbb{N}$. Тоді $n = k^2 - m^3 = 8p^3 + 4p^2$. Таким чином,

$$\frac{n}{3m^2} = \frac{8p^3 + 4p^2}{3\left(9p^2 + 4p\right)^2} < \frac{9p^3 + 4p^2}{3\left(9p^2 + 4p\right)^2} < \frac{1}{27p} < \varepsilon \text{ при } p > \frac{1}{27\varepsilon}.$$

Крім того, піднесенням до куба неважко перевірити, що

$$3p + \frac{1}{3} < \lambda = \sqrt[3]{27p^3 + 18p^2 + 2p} < 3p + \frac{2}{3},$$

а тому $\frac{1}{3} < \{\lambda\} < \frac{2}{3}$.

б) Припустимо, що $\lambda \in (0, 5)$.

Якщо $\lambda \in (0, 1)$, то з умови $0,1 < \{\lambda\} < 0,9$ отримуємо $0,01 < \{\lambda^2\} < 0,81$.

Якщо ж $[\lambda^2] = m,\ 1 \le m < 25,\ [\lambda^3] = k,\ 1 \le k < 125$, то $m \le \lambda^2 < m + 10^{-6}$, $k \le \lambda^3 < k + 10^{-6}$, звідки

$$m^3 \le \lambda^6 < \left(m + 10^{-6}\right)^3,\ k^2 \le \lambda^6 < \left(k + 10^{-6}\right)^2.$$

Враховуючи, що $m < 25, k < 125$, при $m^3 > k^2$ звідси дістаємо $\lambda^6 \ge m^3 \ge k^2 + 1 > > \left(k + 10^{-6}\right)^2 > \lambda^6$, а при $k^2 > m^3$ маємо $\lambda^6 \ge k^2 \ge m^3 + 1 > \left(m + 10^{-6}\right)^3 > \lambda^6$. Одержані в обох випадках суперечності доводять, що $m^3 = k^2$. Таким чином, число m має бути точним квадратом. Тому $n^2 \le \lambda^2 < n^2 + 10^{-6} < (n + 0{,}1)^2$, звідки $\{\lambda\} < 0{,}1$, суперечність з умовою задачі. Отже, число λ не може належати інтервалу $(0, 5)$.

Задача 14. Вписаний чотирикутник. Дано вписаний у коло ω чотирикутник $ABCD$, у якому $AB = AD, CB = CD$. Візьмемо точку $P \in \omega$. Нехай вершини чотирикутника $Q_1Q_2Q_3Q_4$ симетричні точці P відносно прямих AB, BC, CD, DA відповідно.

а) Доведіть, що точки, симетричні точці P відносно прямих $Q_1Q_2, Q_2Q_3, Q_3Q_4, Q_4Q_1$, лежать на одній прямій.

б) Доведіть, що коли точка P рухається по колу ω, то всі такі прямі проходять через одну спільну точку.

Розв'язання. а) Доведемо таке **більш загальне** твердження: Нехай $ABCD$ — довільний вписаний у коло ω чотирикутник та $P \in \omega$. Позначимо $Q_{AB}, Q_{BC}, Q_{CD}, Q_{AD}$ точки, симетричні P відносно прямих AB, BC, CD, AD, та R_A, R_B, R_C, R_D точки, симетричні P відносно прямих $Q_{AD}Q_{AB}$, $Q_{AB}Q_{BC}$, $Q_{BC}Q_{CD}$, $Q_{CD}Q_{AD}$ відповідно. Тоді точки R_A, R_B, R_C, R_D лежать на одній прямій.

Позначимо U_A, U_B, U_C, U_D проекції точки P на прямі $Q_{AD}Q_{AB}$, $Q_{AB}Q_{BC}$, $Q_{BC}Q_{CD}$, $Q_{CD}Q_{AD}$ та $P_{AB}, P_{BC}, P_{CD}, P_{AD}$ — проекції точки P на прямі AB, BC, CD, AD відповідно (рис. 5). Тоді U_A, U_B, U_C, U_D — середини відрізків PR_A, PR_B, PR_C, PR_D. Тому достатньо встановити, що точки U_A, U_B, U_C, U_D лежать на одній прямій, а потім використати гомотетію з центром P та коефіцієнтом 2.

Проведемо доведення для конфігурації, зображеної на рис. 5. Інші випадки взаємного розташування точок розбираються цілком аналогічно.

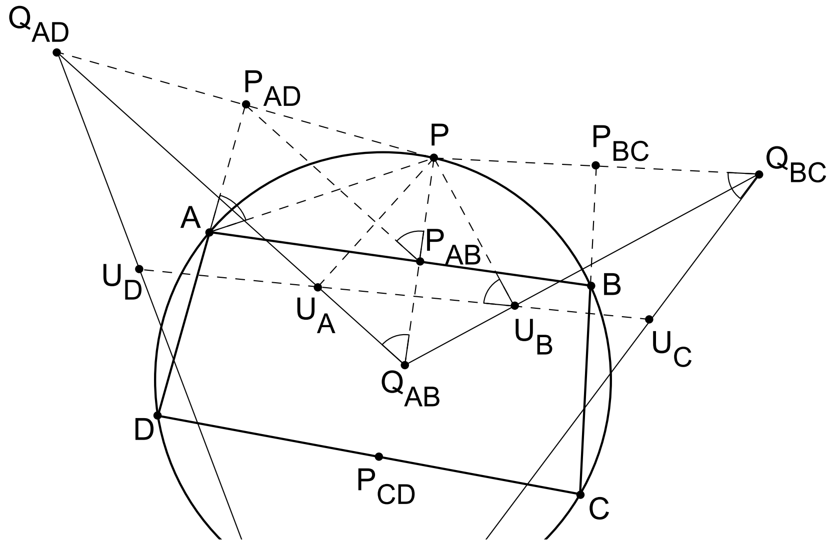

Рис. 5.

Чотирикутники $PU_AQ_{AB}U_B$ та $PP_{AD}AP_{AB}$ є вписаними у кола з діаметрами PQ_{AB} та PA відповідно, а $P_{AB}P_{AD}$ — середня лінія трикутника $PQ_{AB}Q_{AD}$, тому

$$\angle U_AU_BP = \angle U_AQ_{AB}P = \angle Q_{AD}Q_{AB}P = \angle P_{AD}P_{AB}P = \angle P_{AD}AP.$$

Чотирикутники $APCD$ та $PP_{BC}PP_{CD}$ також вписані, а $P_{BC}P_{CD}$ — середня лінія трикутника $PQ_{BC}Q_{CD}$, тому

$$\angle P_{AD}AP = \angle PCD = \angle PCP_{CD} = \angle PP_{BC}P_{CD} = \angle PQ_{BC}Q_{CD} = \angle PQ_{BC}U_C.$$

Нарешті, з чотирикутника $PQ_{BC}U_CU_B$, вписаного у коло з діаметром PQ_{BC}, дістаємо, що

$$\angle PU_BU_C = 180^\circ - \angle PQ_{BC}U_C = 180^\circ - \angle P_{AD}AP = 180^\circ - \angle U_AU_BP.$$

Це означає, що кут $U_AU_BU_C$ розгорнутий, тобто точки U_A, U_B, U_C лежать на одній прямій. Аналогічно встановлюємо, що кут $U_DU_AU_B$ теж розгорнутий, тобто точка U_D належить прямій U_AU_B, що і завершує доведення.

б) Будемо використовувати позначення з розв'язання пункту а). Також нехай Q_{AC}, Q_{BD} — точки, симетричні P відносно прямих AC, BD, O — центр кола ω та O' — точка, симетрична O відносно BD.

Покажемо, що всі прямі $R_A - R_B - R_C - R_D$ проходять через точку O'.

Зауважимо, що проекції довільної точки кола на сторони трикутника, вписаного в це коло, лежать на одній прямій, яка називається прямою Симсона (див., наприклад, А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір, *Геометрія: Підручник для 8 кл. з поглибленим вивченням математики.* Харків, "Гімназія", 2008, с. 86). Звідси випливає, що і точки, симетричні довільній точці кола відносно сторін вписаного в це коло трикутника, лежать на одній прямій — так званій подвоєній прямій Симсона. Отже, прямі $Q_{AB}Q_{BC}$ та $Q_{AD}Q_{CD}$ проходять через точку Q_{AC}, а прямі $Q_{BC}Q_{CD}$ та $Q_{AB}Q_{AD}$ — через точку Q_{BD}.

Точки Q_{AB}, Q_{BC} симетричні P відносно перпендикулярних прямих AB, BC, тому точки Q_{AB} та Q_{BC} симетричні відносно B. Аналогічно точки Q_{AD} та Q_{CD} симетричні відносно D. Таким чином, прямі $Q_{AB}Q_{BC}$ та $Q_{AD}Q_{CD}$ містять сторони $Q_{AC}B$ та $Q_{AC}D$ трикутника $Q_{AC}BD$, вписаного в коло ω. Отже, точки Q_{BD}, R_B, R_D лежать на одній прямій — подвоєній прямій Симсона для трикутника $Q_{AC}BD$.

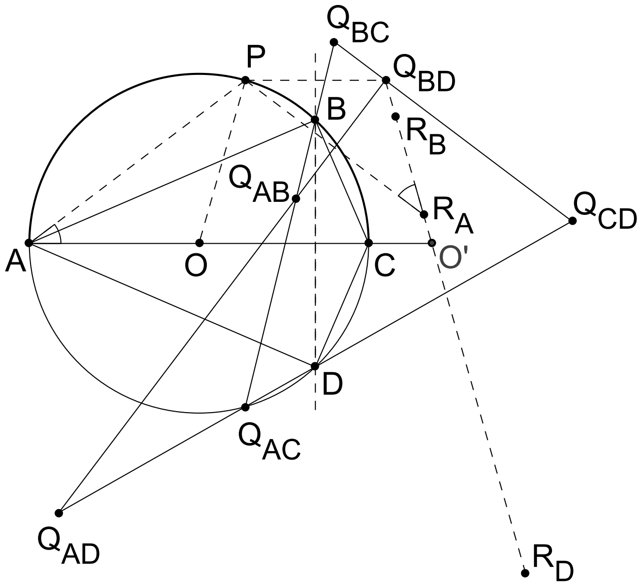

Рис. 6.

Точки P та R_A симетричні відносно прямої $Q_{AD} - Q_{AB} - Q_{BD}$, тому трикутник $PQ_{BD}R_A$ рівнобедрений. Аналогічно до розв'язання пункту а) можна показати, що $\angle PR_AR_B = \angle PAC$, тому рівнобедрені трикутники POA та $PQ_{BD}R_A$ є подібними. Оскільки $PQ_{BD} \parallel AO$, маємо $\angle OPQ_{BD} = \angle AOP = \angle PQ_{BD}R_A$. Звідси випливає, що прямі PO та R_BR_D симетричні відносно BD, а тому пряма R_BR_D проходить через точку O', що і завершує доведення.

Задача 15. Розбиття на групи. Задана послідовність $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ натуральних чисел, виписаних у довільному порядку, така, що у ній кожне натуральне число зустрічається рівно один раз.

а) Чи завжди знайдеться таке m, що у множині $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ існує підмножина, сума елементів якої дорівнює $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_m}{2}$?

б) Таке ж питання, якщо у заданій послідовності для всіх натуральних k виконується нерівність $a_k \le k^2$.

Розв'язання. Доведемо, що навіть за вимоги $a_k \le k^2$ шуканий номер m знайдеться не завжди. Покладемо $a_1 = 1, a_2 = 2$, а далі будемо діяти так:

1) якщо $(2k+1)^2 > a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k}$, то покладаємо $a_{2k+1} = (2k+1)^2$ і візьмемо в якості a_{2k+2} найменше з досі не використаних непарних чисел.

2) якщо $(2k+1)^2 \le a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k}$, то візьмемо в якості a_{2k+1} та a_{2k+2} два найменші з досі не використаних парних чисел.

Отримуємо послідовність 1, 2, 9, 3, 25, 5, 49, 7, 4, 6, 121, 11, 8, 10, ...

Тоді за побудовою для кожного натурального m або сума $S_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m$ є непарною, або $a_m > a_1 + a_2 + \ldots + a_{m-1}$. Тому для жодного m у множині $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ не існує підмножини, сума елементів якої дорівнює $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_m}{2}$.

Залишилось показати, що побудована послідовність містить усі натуральні числа рівно по одному разу та $a_k \leq k^2$ при всіх k.

Доведемо спочатку, що під час побудови послідовності нескінченно багато разів зустрінуться і випадок 1), і випадок 2). Справді, якщо $a_{2k+1} = (2k+1)^2$ та $a_{2k+3} = (2k+3)^2$, причому $k \geq 3$, то $a_1 + \ldots + a_{2k+4} > (2k+1)^2 + (2k+3)^2 > (2k+5)^2$ та маємо випадок 2). Навпаки, нехай $a_{2k+1} = 2m$ та $a_{2k+2} = 2m+2$. За побудовою послідовності зрозуміло, що $m \leq 2k$. Тоді

$$\left((2k+3)^2 - \sum_{i=1}^{2k+2} a_i\right) - \left((2k+1)^2 - \sum_{i=1}^{2k} a_i\right) = (8k+8) - (4m+2) > 0.$$

Тому різниця $(2k+1)^2 - \sum\limits_{i=1}^{2k} a_i$ зростатиме, поки не стане додатною, а тому рано чи пізно зустрінеться випадок 1).

Отже, у послідовності буде нескінченно багато і парних, і непарних чисел, а тому рано чи пізно зустрінеться кожне натуральне число. Якщо число a_n парне, то воно зустрінеться рівно один раз, причому $a_n \leq 2n \leq n^2$, а якщо a_n непарне, то $a_n = n^2$ або $a_n \leq 2n - 1 \leq n^2$. Крім того, у випадку 1) число $(2k+1)^2$ не могло зустрітись у послідовності раніше, бо усі виписані до нього непарні числа не перевищують $(2k)^2$. Отже, всі непарні натуральні числа теж зустрінуться рівно по одному разу.

Задача 16. Перерізи многогранника. Дослідіть питання щодо найбільшої кількості сторін многокутників, які можна отримати у перерізі площиною:

а) правильних многогранників;

б) опуклих октаедрів, які не є правильними (тобто опуклих многогранників з 8 трикутними гранями, 12 ребрами та 6 вершинами, з кожної з яких виходить по 4 ребра).

Чи існує такий опуклий n-гранник, що будь-який опуклий многокутник, отриманий у його перетині площиною, має не більше за $n/10$ сторін?

Розв'язання. а) Оскільки у правильного тетраедра лише 4 грані, то в його перерізі площиною можна отримати щонайбільше чотирикутник. Його отримуємо, провівши, наприклад, площину через середини чотирьох ребер.

Оскільки у куба лише 6 граней, то в його перерізі площиною можна отримати щонайбільше шестикутник. Його отримуємо, провівши площину через центр куба перпендикулярно до головної діагоналі. Вона пройде через середини шести ребер гексаедра.

Оскільки усі ребра правильного октаедра лежать у трьох різних (взаємно перпендикулярних) площинах, то в його перерізі площиною можна отримати щонайбільше шестикутник. Його отримуємо, провівши площину паралельно до двох протилежних граней октаедра.

Оскільки у правильного додекаедра 12 граней, то його переріз площиною не може мати більше 12 сторін. Насправді можна отримати лише десятикутник, провівши площину через центр додекаедра паралельно до двох протилежних граней. Для доведення достатньо проаналізувати всі можливі варіанти перетину площиною однієї з граней додекаедра. В кожному з таких варіантів знайдуться принаймні дві грані, які дана площина не зможе перетнути.

Оскільки у правильному ікосаедрі усі ребра лежать у 12 площинах, причому кожне ребро належить одночасно до двох таких площин, то в його перерізі площиною можна отримати щонайбільше дванадцятикутник. Його отримуємо, провівши площину через центр ікосаедра паралельно до двох протилежних граней.

б) Оскільки у октаедра лише 8 граней, то в його перерізі площиною можна отримати щонайбільше восьмикутник. Доведемо, що 8 сторін отримати вдасться. Побудуємо такий октаедр деформацією правильного октаедра. Нехай площина проходить через чотири ребра правильного октаедра, які утворюють квадрат. Деформуємо октаедр так, щоб дві протилежні вершини цього квадрата опинилися по один бік від даної площини, а дві інші вершини по інший бік, причому октаедр залишився опуклим. Тоді площина перетне 8 ребер отриманого октаедра, тобто у перетині отримаємо восьмикутник.

Нарешті, доведемо існування такого опуклого n-гранника, що будь-який опуклий многокутник, отриманий у його перетині площиною, має не більше за $n/10$ сторін. Справедливе навіть **загальніше твердження**: для кожного k існує такий опуклий n-гранник, що будь-який опуклий многокутник, отриманий у його перетині площиною, має щонайбільше n/k сторін.

Для $k = 1$ твердження очевидне. Якщо ж $k > 1$, то розглянемо сферу і проведемо через її діаметр $2k$ різних площин. Перетини таких площин зі сферою назвемо меридіанами. Перпендикулярно до вибраного діаметра проведемо ще $2k - 1$ площин, перетини яких зі сферою назвемо паралелями. Зрозуміло, що кожна паралель перетинатиме кожен меридіан у двох точках. Між собою різні паралелі не перетинаються, а всі меридіани перетинаються у двох точках. З'єднаємо на кожному меридіані та на кожній паралелі найближчі точки перетину відрізками (ребрами). У результаті отримаємо $4k(2k+1)$-гранник, кожне з ребер якого належить або меридіану, або паралелі, тобто одній з $4k-1$ площин. Отже, многокутник, отриманий у перерізі такого многогранника площиною, матиме не більше за $2(4k-1) < \frac{n}{k}$ вершин.

Завдання олімпіади

1. Розв'яжіть рівняння $x^3 + 3x^2 + 3x = 2011$.

2. Доведіть, що число $\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$ є коренем многочлена з цілими коефіцієнтами.

3. Про трапецію $ABCD$ відомо, що $AD \parallel BC$, $\angle A = 90°$, діагоналі AC і BD перетинаються під прямим кутом. Нехай точки N і K – середини AC і BD відповідно. Доведіть, що прямі AK і BN перпендикулярні.

4. Попарно різні числа x, y, z задовольняють рівність

$$x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 = xyz^4 + yzx^4 + zxy^4.$$

Доведіть, що ці числа, записані в деякому порядку, утворюють геометричну прогресію.

5. Після довгої розлуки зустрілися двоє друзів. Один з них повідомив, що має трьох синів. Добуток їхніх років дорівнює 36, а сума дорівнює кількості вікон у будинку, біля якого відбулася зустріч. Другий сказав, що він не може визначити вік дітей. Тоді перший додав, що його старший син рудий. Після цього другий зразу назвав вік дітей. Скільки років було кожному із синів?

6. Задано опуклий 2011-кутник. Чи можна розрізати цей многокутник на трикутники вздовж його діагоналей так, щоб через кожну вершину проходила або парна кількість розрізів, або не проходило жодного розрізу?

7. Доведіть нерівність $\sum\limits_{k=1}^{2n-1} \sqrt{k\,(4n-k)} < \pi n^2$ для всіх натуральних n.

Завдання фінального математичного бою

1. Дано опуклий чотирикутник $ABCD$, у якому $BA = BC$ і $DA = DC$. Відомо, що на діагоналі AC існує така точка K, що $KA = KB$ і навколо чотирикутника $BCDK$ можна описати коло. Доведіть, що трикутник BCD рівнобедрений.

2. Знайдіть усі такі пари натуральних чисел x і y, для яких виконується рівність $4x^2 + 3xy + 2y^2 = x^2y^2$.

3. На сторонах AB, BC і CA трикутника ABC відмічено відмінні від вершин точки K, M і N відповідно так, що $KM \parallel AC$, $KN \parallel BC$. Нехай відрізки AM і NK перетинаються в точці E, а відрізки BN і MK — у точці F. Доведіть, що $EF \le \frac{1}{4}AB$.

4. Знайдіть усі такі дійсні значення параметра a, для кожного з яких існує така функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$

$$af\,(\sin x) + f\,(\cos x) + \cos 2x = 0.$$

5. Нехай n — задане натуральне число. На дошці розміру $(2n + 1) \times (2n + 1)$ довільно відмічено $2n^2 + 2n$ клітинок. “Кульгава” тура за один хід пересувається в одну із сусідніх по стороні клітинок. Початкове положення “кульгавої” тури можна вибирати самостійно. Якої найменшої кількості ходів достатньо “кульгавій” турі, щоб відвідати всі відмічені клітинки?

6. Знайдіть найбільше дійсне число λ таке, що для будь-яких дійсних чисел a, b, c виконується нерівність

$$\sqrt{(a^2+1)\,(b^2+1)\,(c^2+1)}+\sqrt{(a^2+1)\,(b^2+1)} + \sqrt{(b^2+1)\,(c^2+1)}+ \\ +\sqrt{(c^2+1)\,(a^2+1)} \ge 2\,(ab+bc+ca)+\lambda.$$

Відповіді та вказівки до розв’язання задач фінального бою

1. Оскільки $BA = BC$ та $DA = DC$, то точки B і D лежать на серединному перпендикулярі відрізка AC. Нехай $\angle BCK = \alpha$, тоді з умов $BA = BC$ та $KA = KB$ дістаємо, що $\angle BAC = \angle ABK = \alpha$, а $\angle BKC = 2\alpha$. Оскільки $\angle BCA = \alpha$ і $BD \perp AC$, то $\angle CBD = 90^\circ - \alpha$, а $\angle KBD = 90^\circ - 2\alpha$. За властивістю вписаних кутів $\angle KCD = \angle KBD = 90^\circ - 2\alpha$, тому $\angle BCD = \alpha + (90^\circ - 2\alpha) = 90^\circ - \alpha = \angle CBD$. Отже, трикутник BCD є рівнобедреним.

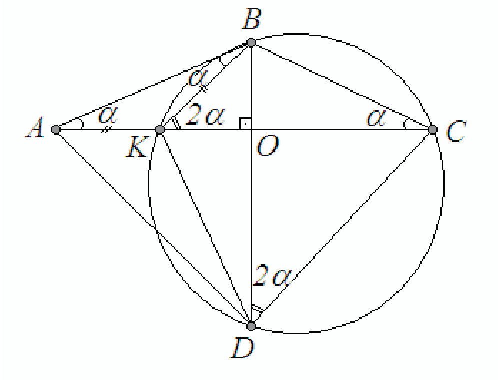

Рис. 7.

2. *Відповідь:* $x = 3, y = 3$. Подамо рівняння у вигляді $\frac{2}{x^2} + \frac{3}{xy} + \frac{4}{y^2} = 1$. Звідси випливає, що $x \geq 2$ та $y \geq 3$. При $y = 4$ дане рівняння не має натуральних розв'язків. Якщо $y \geq 5$ та $x \geq 2$, то $\frac{2}{x^2} + \frac{3}{xy} + \frac{4}{y^2} < 1$. При $y = 3$ знаходимо $x = 3$.

3. Нехай $AK : KB = m : n$, $m > 0$, $n > 0$. За узагальненою теоремою Фалеса умови паралельності $KM \parallel AC$ і $KN \parallel BC$ дають $CM : MB = m : n$ і $AN : NC = m : n$. Крім того, ці умови паралельності дають $NE : EK = CM : MB = m : n$ і $KF : FM = AN : NC = m : n$. Оскільки $KE : KN = n : (m+n)$ і $CMKN$ — паралелограм, одержуємо, що $KE : CM = n : (m+n)$. Звідси та з рівності $CM : CB = m : (m+n)$ маємо $KE : CB = mn : (m+n)^2$. Отже, $\frac{KE}{CB} = \frac{mn}{(m+n)^2}$. Аналогічно $\frac{KF}{AC} = \frac{mn}{(m+n)^2}$. Оскільки $\frac{KE}{CB} = \frac{KF}{AC}$ і $\angle EKF = \angle BCA$, то $EKF \sim BCA$ (за двома сторонами і кутом між ними).

З подібності цих трикутників випливає, що

$$\frac{EF}{AB} = \frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{mn}{(2\sqrt{mn})^2} = \frac{1}{4}$$

(внаслідок нерівності між середніми). Зауважимо, що рівність у цій нерівності буде досягатися тоді і тільки тоді, коли $m = n$, тобто коли K — середина AB.

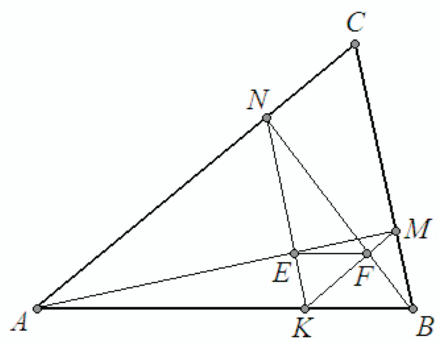

Рис. 8.

4. *Відповідь:* $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Доведемо, що для $a = 1$ таких функцій не існує. Справді, нехай $f(\sin x) + f(\cos x) = -\cos 2x$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Тоді, роблячи підстановку $x = \frac{\pi}{2} = t$, отримаємо тотожність $f(\cos t) + f(\sin t) = \cos 2t$, суперечність.

Нехай $a \neq 1$. Якщо шукати потрібну функцію у вигляді $f(u) = Au^2 + B$, то неважко переконатись у тому, що функція $f(u) = \frac{2u^2-1}{a-1}$ задовольняє вихідне функціональне рівняння.

5. *Відповідь:* $4n^2+4n-2$. Виділені клітинки назвемо зафарбованими, а інші – білими. Далі розглядатимемо тільки такі розфарбування, при яких є рівно $2n^2+2n$ зафарбованих клітинок. Спочатку розглянемо розфарбування у шаховому порядку таке, як на рис. 9.

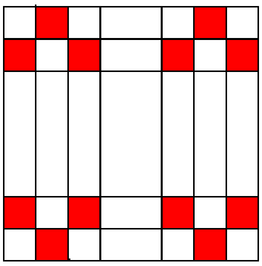

Рис. 9.

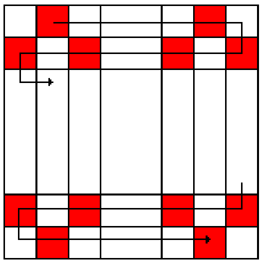

Рис. 10.

Оскільки для зафарбованої клітинки усі сусідні з нею по стороні клітинки білі, то для того, щоб потрапити з однієї зафарбованої клітинки в іншу зафарбовану клітинку, треба зробити не менше двох ходів. Тому аби відвідати всі зафарбовані клітинки слід зробити не менше, ніж $2\left(2n^2+2n-1\right)=4n^2+4n-2$ ходів.

Покажемо, що для довільного розфарбування вказаної кількості ходів завжди вистачить. Для шахового розфарбування, розглянутого вище, цієї кількості ходів буде достатньо, якщо дотримуватись такої схеми руху, як на рис. 10.

Розглянемо тепер довільне розфарбування, відмінне від наведеного вище. При такому розфарбуванні знайдуться принаймні дві сусідні білі клітинки. З точністю до поворотів та симетричних відображень можна не втрачаючи загальності вважати, що ці сусідні білі клітинки розташовані так, як на рис. 11 або рис. 12. На кожному з цих рисунків вказано схему руху, дотримуючись якої можна відвідати всі інші клітинки, окрім даних двох сусідніх білих, а отже, й усі зафарбовані клітинки. При цьому робимо $(2n+1)^2-3=4n^2+4n-2$ кроків.

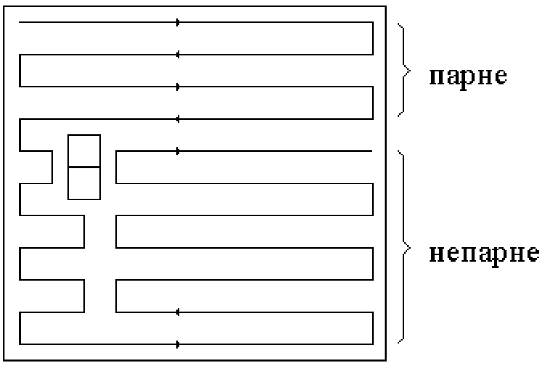

Рис. 11.

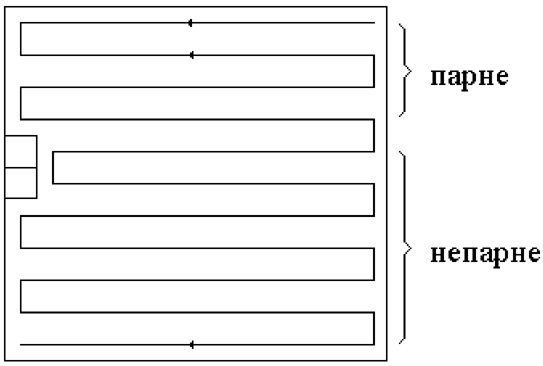

Рис. 12.

6. *Відповідь:* $\lambda_{\max}=2$. Застосовуючи нерівність Коші-Буняковського, одержимо

$$\sqrt{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)}=\sqrt{\left((a+b)^2+(ab-1)^2\right)\left(c^2+1^2\right)}\geq$$
$$\geq(a+b)\cdot c+(ab-1)\cdot 1=ab+bc+ca-1,$$

а також

$$\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} \geq ab+1, \ \sqrt{(b^2+1)(c^2+1)} \geq bc+1, \ \sqrt{(c^2+1)(a^2+1)} \geq ca+1.$$

Додавши ці чотири правильні нерівності, одержимо, що

$$\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}+\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}+\sqrt{(b^2+1)(c^2+1)}+ \\ +\sqrt{(c^2+1)(a^2+1)} \geq 2(ab+bc+ca)+2.$$

Оскільки рівність у цій нерівності досягається при $a=b=c=\sqrt{3}$, то $2 \geq \lambda$. Звідси випливає, що $\lambda_{\max}=2$.