XIII ВСЕУКРАЇНСЬКИЙ ТУРНІР ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ ІМЕНІ ПРОФЕСОРА М. Й. ЯДРЕНКА

Відповідно до наказу Міністерства освіти і науки України № 944 від 13.10.2010 р. у місті Миколаєві на базі Миколаївського муніципального колегіуму з 25 по 30 жовтня 2010 р. проходив XIII Всеукраїнський турнір юних математиків. Організаційне та науково-методичне забезпечення Всеукраїнського турніру юних математиків здійснювалось Інститутом інноваційних технологій і змісту освіти МОН України.

Визначною подією для всіх причетних до заснування та проведення Всеукраїнських турнірів юних математиків стало присвоєння наказом МОН України № 945 від 13.10.2010 р. цим авторитетним науковим змаганням для математично обдарованих учнів імені видатного вченого та педагога, фундатора вітчизняної системи роботи з обдарованими юними математиками члена-кореспондента НАН України, лауреата Державної премії України, лауреата премії імені М. М. Крилова НАН України, заслуженого діяча науки і техніки України, професора Михайла Йосиповича Ядренка (1932—2004). Таке по-справжньому унікальне рішення ухвалене Міністерством у зв'язку з численними зверненнями провідних науковців та вчителів щодо увічнення пам'яті визначного математика й непересічну особистість, чия багатогранна творча спадщина є справжньою перлиною української науки та освіти.

Присвоєння імені професора Михайла Ядренка Всеукраїнським турнірам юних математиків є беззаперечним свідченням визнання науковою й освітянською громадськістю винятково високого математичного та методичного рівня цього унікального державного заходу для обдарованих школярів — важливої щорічної події в календарі учнівських наукових змагань. Слід особливо зауважити, що Всеукраїнський турнір юних математиків є на сьогодні єдиним українським інтелектуальним змаганням школярів, яке визнано гідним носити ім'я одного з уславлених учених України. Усім своїм життям, своєю творчістю незабутній Михайло Йосипович Ядренко надихав математиків із різних куточків України віддавати свої знання, натхнення, безмежну любов до Математики майбутньому математичної науки нашої країни — юним талантам. І тому серед засновників та організаторів Всеукраїнських турнірів юних математиків чимало фахівців, котрі протягом багатьох років мали щасливу нагоду працювати на численних математичних конкурсах

Журі ТЮМу

під проводом саме професора Ядренка, які й сьогодні вважають за свій обов'язок продовжувати його справу. Ми усвідомлюємо, яку відповідальність відтепер накладає на всіх причетних до проведення Всеукраїнських турнірів юних математиків присвоєння цим турнірам високого імені Михайла Ядренка — видатного сина українського народу.

У XIII Всеукраїнському турнірі юних математиків імені професора М. Й. Ядренка взяли участь 25 команд, якими були представлені різні куточки України:

«**Адепти Мудрості**», ліцей № 208 (10-й клас), м. Київ;

«**Волинь**», збірна команда Волинської обл.;

«**ДОЛІФМП**», Дніпропетровський обласний фізико-математичний ліцей-інтернат;

«**Елітар**», Рівненський природничо-математичний ліцей;

Збірна команда Луцького НВК «ЗОШ I—III ступенів № 22 — ліцей» та Луцької гімназії № 21 імені М. Кравчука, Волинська обл.;

«**Збірна міста Черкас**», Черкаська обл.;

«**Інтелект**», Луцький НВК «Гімназія № 14»;

«**Істина**», Краматорська ЗОШ I—III ступенів № 35 Донецької обл.;

«**КВАНТ.КОМ**», Обласна спеціалізована школа-інтернат II—III ступенів «Обдарованість» Харківської обласної ради;

Команда Дніпропетровського ліцею інформаційних технологій при Дніпропетровському національному університеті імені Олеся Гончара;

Команда Конотопської гімназії Конотопської міської ради, Сумська обл.;

Команда учнів Львівської області;

«**Лідер**», Житомирський обласний центр науково-технічної творчості учнівської молоді;

«**Ліцеїст**», Волинський обласний ліцей з посиленою військово-фізичною підготовкою;

«**Ліцей-99**», Запорізький багатопрофільний ліцей № 99;

«**Луматики**», Луганська спеціалізована школа I—III ступенів № 1 імені професора Л. М. Лоповка;

«**Луцьк-4**», Луцька гімназія № 4 імені Модеста Левицького;

«**Луцьк-9**», Луцький НВК № 9 Волинської обл.;

«**ММК**», Миколаївський муніципальний колегіум Миколаївської міської ради, Миколаївська обл.;

«**ПНЛ № 145**», Природничо-науковий ліцей № 145 м. Києва;

«**Суми-Дельта**», Сумська спеціалізована школа № 10 ім. О. Бутка;

«**Трава Мудрості**», ліцей № 208 (9-й клас), м. Київ;

«**Флібустьєри**», Миколаївський морський ліцей імені професора М. Александрова;

«**ФТЛ**», Фізико-технічний ліцей при Івано-Франківському національному технічному університеті нафти і газу;

«**Харків-45**», НВК «Академічна гімназія» № 45, м. Харків.

Творчі здобутки учасників оцінювало висококваліфіковане журі, у складі якого працювало 5 професорів, 26 доцентів, 9 заслужених учителів України. Колектив журі ТЮМу та його науково-методичну комісію очолює уславлений математик — академік НАН України, лауреат Державної премії України, лауреат премії імені М. М. Крилова НАН України, заслужений діяч науки і техніки України, завідувач кафедри Київського національного університету імені Тараса Шевченка професор Микола Олексійович Перестюк. Вагомим у становлення та розвиток учнівських математичних турнірів уже багато років є внесок таких науковців, як експерт-консультант турніру доцент К. В. Рабець (м. Суми), заступники голови журі — професори В. М. Лейфура (м. Миколаїв) та О. О. Курченко (м. Київ), доценти І. М. Мітельман (м. Одеса) та В. А. Ясінський (м. Вінниця).

Команда «Харків-45»

Турнір 2010 року проходив за усталеною схемою. Першим етапом змагання були чвертьфінальні математичні бої, котрі проходили за оголошеним завчасно списком задач (Математика в школі. — 2010. — № 5; У світі математики. — 2010. — № 2; Математика. — 2010. — № 16; див. також **www.ukrtym.blogspot.com**). За результатами чвертьфінальних боїв визначились дев'ять команд-півфіналістів — три півфінальні «трійки», які змагались у два кола (для півфінальних боїв був сформований список із 10 задач, що отримали найвищий рейтинг за опитуванням команд: №№ 6, 7, 9, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 20).

Команда «Адепти мудрості»

Ураховуючи значну кількість команд-учасниць, журі та оргкомітет вирішили, що в фіналі гратимуть чотири команди: переможці півфінальних «трійок» та команда, яка у півфінальних боях отримала найвищу суму балів серед команд, що вибороли друге місце. Відтак доля двох дипломів І ступеня вирішувалась у змаганні в одне коло чотирьох найкращих команд турніру: «Харків-45», «Адепти мудрості», «ДОЛІФМП» і «ПНЛ № 145». Для фінального бою командам було запропоновано завдання з 6 задач (завдання укладали члени журі М. О. Перестюк, О. Г. Кукуш, О. О. Курченко, В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, М. М. Рожкова, О. Ю. Теплінський, В. А. Ясінський, експерт-консультант К. В. Рабець), які команди мали розв'язувати протягом чотирьох годин без будь-якої сторонньої допомоги.

Учасники турніру продемонстрували високий рівень математичної підготовки, зокрема уміння розв'язувати складні задачі дослідницького характеру самостійно та у співпраці зі своїми наставниками — провідними вчителями та науковцями.

За підсумками основних змагань ТЮМу дипломами переможців І—ІІІ ступенів було нагороджено 13 команд.

Диплом І ступеня

«Харків-45», НВК «Академічна гімназія» № 45, м. Харків (команду підготував О. Ф. Крижановський).

«Адепти Мудрості», ліцей № 208 (10-й клас), м. Київ (команду підготували В. О. Тимошкевич, Т. Д. Тимошкевич).

Диплом ІІ ступеня

«ДОЛІФМП», Дніпропетровський обласний фізико-математичний ліцей-інтернат (команду підготували В. К. Кірман, О. В. Поляков).

«ПНЛ № 145», Природничо-науковий ліцей № 145 м. Києва (команду підготували Я. Ф. Вінніщин, Д. С. Басов).

«Луматики», Луганська спеціалізована школа І—ІІІ ступенів № 1 імені професора Л. М. Лоповка (команду підготував В. В. Григор'єв).

Команда Дніпропетровського ліцею інформаційних технологій при Дніпропетровському національному університеті імені Олеся Гончара (команду підготували Ю. А. Гузєва, А. О. Перепелюк).

Диплом ІІІ ступеня

«Ліцей-99», Запорізький багатопрофільний ліцей № 99 (команду підготував І. Г. Величко).

«ФТЛ», Фізико-технічний ліцей при Івано-Франківському національному технічному університеті нафти і газу (команду підготували І. В. Федак, Б. Я. Шарманський).

«Волинь», збірна команда Волинської обл. (команду підготувала Г. І. Євтушина).

«ММК», Миколаївський муніципальний колегіум Миколаївської міської ради Миколаївська обл. (команду підготував О. В. Гримайло).

«Суми-Дельта», Сумська спеціалізована школа №10 ім. О. Бутка (команду підготували А. І. Азаренкова, Ю. В. Ганиченко).

«Трава Мудрості», ліцей № 208 (9-й клас), м. Київ (команду підготували В. О. Тимошкевич, Т. Д. Тимошкевич).

«Ліцеїст», Волинський обласний ліцей з посиленою військово-фізичною підготовкою (команду підготували С. І. Сусь, О. А. Ткачук).

Оргкомітет та журі турніру нагородили групу учасників за виступ в особистій першості.

Дипломи переможців

Баган Олександр, «ПНЛ № 145», м. Київ (**абсолютна перемога**).

Чаудхарі Максим, «Адепти Мудрості», м. Київ.

Пугач Антон, «ДОЛІФМП», м. Дніпропетровськ.

Мельник Оксана, «Суми-Дельта», м. Суми.

Дипломи за успішний виступ

Кіслінський Олексій, «Харків-45», м. Харків.

Кадець Борис, «Харків-45», м. Харків.

Санчин Михайло, «ФТЛ», м. Івано-Франківськ.

Спеціальний диплом **«За високі творчі досягнення на XIII Всеукраїнському турнірі юних математиків»** присуджено **Крисинському Олександру**, «ММК», м. Миколаїв.

З числа учасників турніру 70 учнів (за бажанням) виконували також завдання **математичної олімпіади XIII Всеукраїнського турніру юних математиків**, яке уклали члени журі О. В. Доценко, О. В. Гримайло. І. С. Соколовська, О. Н. Нестеренко, І. В. Федак, А. В. Чайковський.

За підсумками олімпіади нагородили таких учасників.

Дипломи І ступеня

Чаудхарі Максим, «Адепти мудрості», м. Київ (за абсолютний результат).

Вовченко Владислав, «Трава мудрості», м. Київ.

Харитонова Олена, «Трава мудрості», м. Київ.

Кульчицький Юрій, «Адепти мудрості», м. Київ.

Кадець Борис, «Харків-45», м. Харків.

Дипломи II ступеня

Голубенко Андрій, «Трава мудрості», м. Київ.

Круковець Дмитро, «Трава мудрості», м. Київ.

Гетал Станіслав, «Суми-Дельта», м. Суми.

Павлюк Марія, «Адепти мудрості», м. Київ.

Санчин Михайло, «ФТЛ», м. Івано-Франківськ.

Кутовий Анатолій, «Флібустьєри», м. Миколаїв.

Гордійчук Максим, «Збірна міста Черкас», м. Черкаси.

Сердюк Ярослав, «Адепти мудрості», м. Київ.

Лисичкін Сергій, «Харків-45», м. Харків.

Кіслінський Олексій, «Харків-45», м. Харків.

Петрович Дмитро, «Флібустьєри», м. Миколаїв.

Дипломи III ступеня

Крисинський Олександр, «ММК», м. Миколаїв.

Дем'яненко Олександр, «Збірна міста Черкас», м. Черкаси.

Ковальський Ярослав, «ММК», м. Миколаїв.

Музика Дмитро, «ММК», м. Миколаїв.

Плигун Дмитро, «КВАНТ.КОМ», м. Харків.

Сантюров Микола, «Флібустьєри», м. Миколаїв.

Охріменко Анна, «Харків-45», м. Харків.

Учасники турніру взяли участь і в інших цікавих заходах. Важливою складовою турніру був традиційний математичний лекторій, який проводиться членами журі — відомими математиками та викладачами.

Учні та керівники команд мали чудову нагоду для змістовного творчого спілкування.

XIII Всеукраїнський турнір юних математиків показав, що невпинно зростає зацікавленість педагогічного загалу в проведенні математичних турнірів — потужної форми залучення широких верств учнівської молоді до опанування основ наукової діяльності з цієї важливої навчальної дисципліни. Варто звернути увагу на те, що постійно збільшується кількість областей, у яких відбору команд на Всеукраїнський ТЮМ передують місцеві турніри юних математиків (для проведення яких дозволяється частково змінювати перелік задач, запропонований Інститутом інноваційних технологій і змісту освіти МОН України, включаючи інші, можливо — більш прості, задачі). Обласні етапи учнівських турнірів сприяють підвищенню якості учнівських доповідей і варті всілякої підтримки методичними установами, органами управління освітою, вченими та викладачами університетів тощо.

У підготовці завдань, обговоренні задачних «сюжетів» для відбірних етапів XIII Всеукраїнського ТЮМу разом з авторами цієї статті брали активну участь такі математики, як доктори фізико-математичних наук О. Г. Кукуш, В. М. Радченко та кандидати фізико-математичних наук О. Н. Нестеренко й А. В. Чайковський (Київський національний університет імені Тараса Шевченка), а також кандидат фізико-математичних наук О. Ю. Теплінський (Інститут математики НАН України).

Дуже важливо, що науковому забезпеченню Всеукраїнських математичних турнірів приділяють постійну увагу математики-професіонали, котрі налаштовують учнів на перші самостійні кроки в дослідницькій математичній діяльності.

Запропоновані для XIII Всеукраїнського турніру задачі виявились — на думку всіх команд-учасниць, членів журі, керівників команд — не тільки дуже цікавими та змістовними, а й вдало збалансованими за рівнем складності й тематичним спрямуванням. Суттєвим компонентом турніру є те, що під час підготовки доповідей і навіть не занадто складними задачами учасники знайомилися з новими для них математичними фактами та методами, котрі не входять до шкільної програми. І цей чинник завжди максимально враховується в процесі відбору задач Всеукраїнських турнірів юних математиків.

Журі почуло чимало ґрунтовних та якісних доповідей команд. Як і завжди, оцінювалися також окремі часткові просування, розбір суттєвих випадків, ситуації, коли команда ставила і розв'язувала аналогічну, але не таку складну задачу. Для задач, які на перший погляд здавалися надто простими, високо оцінювалися різноманітні узагальнення. Значна увага приділялась важливому питанню культури доповідей, різноманітним сучасним способам презентації результатів роботи над задачами. Усе це сприяло пануванню на турнірі атмосфери плідних і корисних наукових дискусій — атмосфери справжнього математичного свята.

ВКАЗІВКИ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ВИБРАНИХ ЗАДАЧ ВІДБІРНИХ ЕТАПІВ XIII ВСЕУКРАЇНСЬКОГО ТУРНІРУ ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ

У цій публікації ми обмежуємося вказівками здебільшого для «базових» сюжетів задач, а не для можливих узагальнень. За темами деяких задач турніру плануються окремі статті.

Задача «***Число підмножин***». Знайдіть кількість підмножин множини $\{1; 2; ...; n\}$ (включаючи порожню множину), які:

а) не містять жодної пари послідовних чисел;

б) не містять жодної трійки послідовних чисел.

↓ а) Нехай P_n — кількість підмножин множини $\{1; 2; ...; n\}$, які не містять жодної пари послідовних чисел. Кожній підмножині будемо ставити у відповідність *двійковий* набір довжини n: на k-тому місці стоїть **1**, якщо k входить до підмножини, і **0** — якщо не входить). Якщо підмножина не містить жодної пари послідовних чисел, то у відповідному наборі після **1** та перед **1** обов'язково є **0**). Якщо набір закінчується на **0**, то передостаннім може бути як **0**, так і **1**. Якщо набір закінчується на **1**, то передостаннім може бути лише **0**. Отже, набір буде закінчуватися на **01**. Відтак очевидно, що

$$P_n = P_{n-1} + P_{n-2},\ n \ge 3,\ P_1 = 2,\ P_2 = 3.$$

Скориставшись формулою Біне для послідовності чисел Фібоначчі (*Воробьев Н. Н.* Числа Фибоначчи. — М.: Наука, 1984. — 144 с.), маємо:

$$P_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right).$$

б) Нехай Q_n — кількість підмножин множини $\{1; 2; ...; n\}$, які не містять жодної трійки послідовних чисел. Аналогічно попереднім міркуванням одержимо, що

$$Q_n = Q_{n-1} + Q_{n-2} + Q_{n-3},\ n \ge 4,$$

$$Q_1 = 2,\ Q_2 = 4,\ Q_3 = 7.$$

Використовуючи стандартні методи розв'язування кубічних рівнянь (*Мишина А. П., Проскуряков И. П.* Высшая алгебра: Справочная математическая библиотека. — М.: ГИФМЛ, 1962. — 300 с.) та лінійних рекурентних співвідношень (*Маркушевич А. И.* Возвратные последовательности. — М.: ГИТТЛ, 1950. — 52 с.), отримуємо (залишаємо досить громіздку «технічну» роботу зацікавленим читачам):

$$R_n = 2u\left(2\alpha^{n+3} - w^{n+3} - \overline{w}^{n+3}\right),$$

де $u = \left(3\alpha^2 - 3\right)^{-1}$, M, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) = 1$.

Зауваження. У загальному вигляді (для $2 \le k \le n-1$) рекурентне співвідношення має такий вигляд:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + ... + F_{n-k},\ n \ge k+1,$$

$$F_i = 2^i,\ 1 \le i \le k-1,\ F_k = 2^k - 1. \uparrow$$

Задача «***Нерівність Коші—Буняковського***». Доведіть, що для довільних дійсних чисел a_1, a_2, ... , a_m, b_1, b_2, ... , b_m виконується нерівність

$$\left(\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right)^2 \le \sum_{k=1}^{m} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{m} b_k^2,$$

причому рівність буде досягатися тоді й тільки тоді, коли існують такі дійсні числа λ і μ, що $\lambda^2 + \mu^2 \ne 0$ і $\lambda a_k + \mu b_k = 0$, $1 \le k \le m$.

Доведіть нерівність

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \le (n-2)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + 2a_2a_3\right), \qquad (*)$$

де $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$, $n \ge 3$.

У якому випадку має місце рівність?

↓ Зупинимося на нерівності (*). Для її доведення застосуємо нерівність Коші—Буняковського для $m = n - 2$ і таких наборів довжини m: $\left(a_1 + a_2 + a_3,\ a_4,\ a_5,\ ...,\ a_n\right)$, $(1, 1, ..., 1)$. Рівність досягається тоді й тільки тоді, коли

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_4 = a_5 = ... = a_n. \uparrow$$

Задача «***Сума k-тих степенів***». Дослідіть, для яких натуральних k сума $1^k + 2^k + ... + n^k$ ділиться без остачі на $1 + 2 + 3 + ... + n$ для всіх натуральних n.

↓ Для парних k твердження не виконується для $n = 2$.

Доведемо, що для всіх непарних k

$$1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k \,\vdots\, \frac{1}{2}n(n+1).$$

Оскільки $i^k \equiv -(n-i)^k \pmod{n}$, то для парних n

$$1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k \equiv \frac{n}{2} \pmod{n},$$

$$1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k \equiv 0 \left(\operatorname{mod} \frac{n}{2}\right),$$ а для непарних n

$$1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k \equiv 0 \pmod{n}.$$

Далі $i^k \equiv -(n-i+1)^k \pmod{(n+1)}$, і для непарних n

$$1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k \equiv \frac{n+1}{2} \pmod{(n+1)},$$

$$1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k \equiv 0 \left(\operatorname{mod} \frac{n+1}{2}\right),$$ а для парних n

$$1^k+2^k+3^k+...+n^k\equiv 0\left(\mathrm{mod}\left(n+1\right)\right).$$

Залишається скористатись тим, що для парних n числа $\frac{n}{2}$ і $n+1$ є взаємно простими, а для непарних n взаємно простими є числа n і $\frac{n+1}{2}$. ↑

Задача «*Чудові точки всередині трикутника*». Усередині даного трикутника ABC знайдіть точки G і H, для яких, відповідно, середнє геометричне і середнє гармонічне відстаней до прямих, що містять сторони трикутника, набувають максимальних значень. У яких випадках відрізок GH паралельний до однієї із сторін трикутника? Знайдіть довжину такого відрізка GH.

↓ Нехай K — точка всередині трикутника ABC, x, y, z — відстані від неї до прямих BC, AC, AB відповідно, $S_1=S_{KBC}$, $S_2=S_{KAC}$, $S_3=S_{KBA}$, $S=S_{ABC}$. Тоді

$$\sqrt[3]{xyz}=\frac{2}{\sqrt[3]{abc}}\sqrt[3]{S_1S_2S_3}\le$$

$$\le\frac{2}{\sqrt[3]{abc}}\frac{S_1+S_2+S_3}{3}=\frac{2S}{3\sqrt[3]{abc}}.$$

Звідси випливає, що найбільшим значенням середнього геометричного чисел x, y і z є число $\frac{2S}{3\sqrt[3]{abc}}$, причому це значення досягається тоді й тільки тоді, коли $\frac{S}{3}=S_1=S_2=S_3$, тобто коли точка K збігається з точкою перетину медіан. Отже, шукана точка G — центроїд.

Середнє гармонічне $\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$ буде набувати найбільшого значення, якщо $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ набуватиме найменшого можливого значення.

За нерівністю Коші—Буняковського,

$$\left(S_1+S_2+S_3\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge$$

$$\ge\left(\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{z}}\right)^2=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{2}.$$

Рівність досягається тоді й тільки тоді, коли $S_1x=S_2y=S_3z$, тобто за умови $x\sqrt{a}=y\sqrt{b}=z\sqrt{c}$. Доведемо, що така точка насправді існує всередині трикутника ABC (зауважимо, що з останніх рівностей випливає, що якщо така точка існує, то — єдина).

На сторонах BC, AC, AB візьмемо такі точки A_1, B_1, C_1 відповідно, що

$$\frac{CA_1}{A_1B}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}},\ \frac{AB_1}{B_1C}=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}},\ \frac{BC_1}{C_1A}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

За теоремою Чеви, відрізки AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в одній точці. Легко довести, що відстані x, y, z від цієї точки до прямих BC, AC, AB відповідно задовольняють співвідношення $x\sqrt{a}=y\sqrt{b}=z\sqrt{c}$. Ця точка й буде шуканою точкою H.

Для точки H маємо:

$$2S=ax+by+cz=x\left(a+\sqrt{ab}+\sqrt{ac}\right).$$

Зрозуміло, що вектори $\overline{GH}$ і $\overline{BC}$ колінеарні тоді й тільки тоді, коли $x=\frac{1}{3}h_a$, тобто $x=\frac{2S}{3a}$. Отже,

$$\overline{GH}\parallel\overline{BC}\Leftrightarrow 2\sqrt{a}=\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

Аналогічно,

$$\overline{GH}\parallel\overline{AB}\Leftrightarrow 2\sqrt{c}=\sqrt{a}+\sqrt{b},$$

$$\overline{GH}\parallel\overline{AC}\Leftrightarrow 2\sqrt{b}=\sqrt{a}+\sqrt{c}.$$

Точки G і H збігатимуться тоді й тільки тоді, коли трикутник ABC — рівносторонній. ↑

Задача «*Кількість розв'язків*». Знайдіть кількість розв'язків рівняння

$$\sqrt{[x]}+\sqrt{\{x\}}=a,$$

де $[x]$ — ціла частина числа x (тобто найбільш ціле число, яке не перевищує x), $\{x\}=x-[x]$ — дробова частина числа x залежно від значення параметра $a\in\mathbb{R}$.

↓ Для $a<0$ розв'язків немає. Якщо $a\in[0;1)$, то й $x\in[0;1)$, а тому $x=\{x\}=a^2$ — єдиний корінь рівняння.

Нехай $a\ge 1$. Тоді маємо:

$$\sqrt{\{x\}}=a-\sqrt{[x]},$$

$$0\le a-\sqrt{[x]}<1,$$

$$a-1<\sqrt{[x]}\le a,$$

$$(a-1)^2<[x]\le a^2.$$

Наразі для будь-якого натурального числа $n\in\left((a-1)^2;a^2\right]$ має місце нерівність $0\le\left(a-\sqrt{n}\right)^2<1$ і $x=n+\left(a-\sqrt{n}\right)^2$ задовольняє вихідне рівняння. Отже, для $a\ge1$ рівняння має $\left[a^2\right]-\left[(a-1)^2\right]$ коренів. ↑

Задача «***Розбиття***». Подання натурального числа у вигляді суми натуральних доданків назвемо *розбиттям* цього числа (наприклад, 15 = 7 + 3 + 3 + 2). Порядок доданків не враховується, тобто 3 = 2 + 1 і 3 = 1 + 2 — одне й те саме розбиття. Через $P(N)$ позначимо число всіх розбиттів числа N, і нехай $P_k(N)$ — кількість усіх тих розбиттів числа N, що задовольняють додаткову умову: довільні два доданки відрізняються не більше, ніж на k. Наприклад, розбиття 15 = 8 + 7 та 15 = 4 + 4 + 3 + 2 + 2 враховуються для підрахунку $P_2(15)$, а розбиття 15 = 7 + 5 + 3 — ні. Через $Q_k(N)$ позначимо кількість усіх тих розбиттів, для яких довільні два доданки відрізняються не більше, ніж на k, і всі доданки непарні.

а) Знайдіть $P_1(2010)$.

б) Знайдіть $P_1(N)$ для довільного натурального числа N.

в) Знайдіть $Q_1(2010)$.

г) Знайдіть $Q_2(2010)$.

д) Дослідіть величини $P_2(N)$ та $P_3(N)$ для довільного натурального числа N.

е) Нехай k — фіксоване натуральне число. Дослідіть питання щодо існування та властивостей такого многочлена $f(x)$, що $\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{P_k(N)}{f(N)}=1$.

↓ Пункти д) і е) мають дослідницький характер. На жаль, команди не досягли з них суттєвих просувань. Журі сподівається, що тематика цієї задачі зацікавить учасників конкурсів Малої академії наук.

Для будь-якого N: $P_1(N)=N$. Насправді, нехай число N подано як сума k доданків. Позначимо $m=\left[\dfrac{N}{k}\right]$, тоді $km\le N<k(m+1)$. Звідси легко випливає, що всі доданки мають належати до множини $\{m;\ m+1\}$. Візьмемо спочатку k доданків, що дорівнюють m. Якщо їхня сума менша від N, починаємо по одному замінювати доданки, що дорівнюють m, на $m+1$ — аж доки не досягнемо суми, що дорівнює N.

Неважко отримати, що $Q_1(2010)=8$. Усі доданки мають бути однаковими та непарними. Залишається зауважити, що число $2010=2\cdot3\cdot5\cdot67$ має 8 непарних дільників.

Далі $Q_2(2010)=1005$. Кількість доданків має бути парною. Беремо будь-яке парне натуральне число $k\le2010$ і для числа $\dfrac{2010}{k}$ візьмемо найближчі (зверху та знизу) непарні числа. Подальше є зрозумілим. ↑

Задача «***Два факторіали***». Нехай p — просте число. Знайдіть усі натуральні n такі, що число $(p-n)!(n-1)!+(-1)^{n-1}$ ділиться без остачі на p.

↓ Доведемо, що це твердження має місце для всіх натуральних $n\le p$. Оскільки для всіх $k\in\mathbf{Z}$ $k\equiv-(p-k)(\operatorname{mod}p)$, то

$$(p-n)!(n-1)!\overset{\operatorname{mod}p}{\equiv}$$

$$\overset{\operatorname{mod}p}{\equiv}(-1)^{n-1}(p-n)!(p-1)(p-2)\cdot\ldots\cdot(p-n+1)=$$

$$=(-1)^{n-1}(p-1)!.$$

За теоремою Вільсона, $(p-1)!\equiv-1(\operatorname{mod}p)$. Звідси випливає, що

$$(p-n)!(n-1)!+(-1)^{n-1}\overset{\operatorname{mod}p}{\equiv}(-1)^{n-1}\left((p-1)!+1\right)\overset{\operatorname{mod}p}{\equiv}0.\ \uparrow$$

Задача «***Дотична до кола***». Зображено такий трикутник ABC, що коло ω, яке проходить через вершину C і середини сторін AC та BC, містить точку M перетину медіан трикутника ABC. На площині обрано таку точку K, про яку відомо, що $K\in\omega$ та $\angle AKB=90°$. Користуючись лише лінійкою, проведіть дотичну до кола ω в точці K.

↓ Нехай точки A_1, B_1, C_1 — середини сторін BC, CA, AB відповідно. Розглянемо гомотетію кола ω з центром C та коефіцієнтом $k=2$. Відмінну від C точку перетину отриманого кола з прямою CM позначимо M_1. Зрозуміло, що $M_1C_1=MC_1$. Оскільки

$AC_1\cdot BC_1=M_1C_1\cdot CC_1=C_1M\cdot CC_1$ і

$AC_1=BC_1=KC_1$, то

$C_1K^2=C_1M\cdot C_1C$.

Звідси випливає, що пряма C_1K є дотичною до кола ω. (Застосувавши формулу для довжини медіани трикутника, неважко довести, що $MC_1<AC_1$. Тому коло ω має дві спільні точки з колом, побудованим на стороні AB як на діаметрі.)

Зауваження. Таке розв'язання не потребує зображення власне кола ω. Утім, нагадаємо читачам, якщо зображено деяке коло Ω (чи навіть *конічний переріз*) і на ньому позначено довільну точку, то через цю точку до кола Ω можна провести дотичну з використанням лише лінійки (*Смогоржевский А. С.* Линейка в геометрических построениях. — М.: ГИТТЛ, 1957. — 64 с.). ↑

Задача «***Тура на шаховій дошці***». Тура відвідує кожну клітинку шахової дошки розміром 8 × 8 рівно один раз і повертається на початкове поле. За один хід вона переходить з клітинки до сусідньої (зі спільною стороною) з нею клітинки. Відтак маршрут тури замкнений і утворює контур без самоперетинів неопуклого многокутника (вважаємо, що маршрут проходить через центри клітинок, і площа однієї клітинки дорівнює 1).

а) Знайдіть площу такого многокутника.

б) Відомо, що тура потрапила на поле **b2** з поля **a2**. З якого поля вона потрапила на поле **h8**?

↓ а) Розглянемо *цілочисельну ґратку*, утворену центрами клітинок. Скористаємось формулою Піка (*Васильев Н. Б.* Вокруг формулы Пика // Квант. — 1974. — № 12): $S = n + \frac{m}{2} - 1$, де S — площа *вписаного* до ґратки многокутника (це означає, що всі його вершини є вузлами ґратки); m — кількість вузлів ґратки на межі многокутника; n — кількість внутрішніх вузлів ґратки для многокутника. У нашому випадку $n = 0$, $m = 64$, а тому $S = 31$.

б) Оскільки маршрут тури є простою замкненою ламаною, то він ділить площину на дві області — внутрішню та зовнішню (цей «майже очевидний» факт пов'язаний з теоремою Жордана (*Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов. — М.: МЦНМО, 2001. — 568 с.). Теорема Жордана, звісно, має місце не тільки для простої замкненої ламаної, а й для *простої замкненої кривої*, яка є *гомеоморфним* образом кола). Відтак усі чотири кутові клітинки шахівниці будуть обходитися в одному й тому самому напрямку (або всі вони знаходитимуться по «ліву руку» від тури, що рухається, або — по «праву руку»). Хід a2 → b2 визначає, що клітинка a1 обходиться в порядку c1 → b1 → a1 → a2 → b2 за рухом годинникової стрілки. Отже, клітинка h8 обходиться в напрямку g2 → h2 → h7.

Зауваження. Цей сюжет передбачає можливість різноманітних узагальнень. ↑

Задача «*Центри мас трикутників*». На сторонах трикутника ABC зовнішнім чином побудовані правильні трикутники ABC_1, BCA_1, CAB_1. Доведіть, що точки перетину медіан трикутників ABC та $A_1B_1C_1$ збігаються.

↓ Наведемо більш загальний факт.

Нехай $A_1A_2...A_n$ — опуклий многокутник, на сторонах котрого в зовнішній бік побудовано подібні трикутники

$A_1A_2B_1 \sim A_2A_3B_2 \sim ... \sim A_nA_1B_n$.

Тоді *центри мас* многокутників $A_1A_2...A_n$ і $B_1B_2...B_n$ збігаються. Тобто якщо для точки M виконується рівність

$\overline{MA_1} + \overline{MA_2} + ... + \overline{MA_n} = \bar{0}$, то

$\overline{MB_1} + \overline{MB_2} + ... + \overline{MB_n} = \bar{0}$.

Доведення. Від довільної точки Q відкладемо вектори

$\bar{u}_1 = \overline{A_1A_2}$, $\bar{u}_2 = \overline{A_2A_3}$, ... , $\bar{u}_n = \overline{A_nA_1}$,

$\bar{v}_1 = \overline{A_1B_1}$, $\bar{v}_2 = \overline{A_2B_2}$, ... , $\bar{v}_n = \overline{A_nB_n}$.

Нехай Ψ — таке перетворення поворотної гомотетії з центром у точці Q, що $u_i \overset{\Psi}{\mapsto} v_i$, $i = \overline{1,n}$ ($\angle B_1A_1A_2 = \angle B_2A_2A_3 = ... = \angle B_{n-1}A_{n-1}A_n = \angle B_nA_nA_1$).

Тоді

$$\overline{MB_1} + \overline{MB_2} + ... + \overline{MB_n} =$$
$$= \left(\overline{MA_1} + \overline{MA_2} + ... + \overline{MA_n}\right) +$$
$$+ \left(\overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2} + ... + \overline{A_nB_n}\right) =$$
$$= \Psi\left(\bar{u}_1\right) + \Psi\left(\bar{u}_2\right) + ... + \Psi\left(\bar{u}_n\right) =$$
$$= \Psi\left(\bar{u}_1 + \bar{u}_2 + ... + \bar{u}_n\right) = 0.$$

(Ми врахували *лінійність* перетворення Ψ та рівність $\bar{u}_1 + \bar{u}_2 + ... + \bar{u}_n = \bar{0}$.) ↑

Задача «*Точки на сфері*». Точки A, B, C і D лежать на сфері радіуса 1, причому відомо, що для них виконується рівність

$$AB \cdot AC \cdot AD \cdot BC \cdot BD \cdot CD = \frac{512}{27}.$$

Доведіть, що ці точки є вершинами правильного тетраедра.

↓ Уведемо довільно в просторі прямокутну декартову систему координат. Нехай G — така точка простору, координати якої дорівнюють середньому арифметичному *відповідних* координат точок A, B, C і D (якщо ці точки є вершинами тетраедра, то, як відомо, точка G буде його *центроїдом*). За допомогою векторної алгебри (або ж методу координат) для довільної точки M легко довести просторовий аналог формули Лейбніца (*Понарин Я. П.* Элементарная геометрия: Том 2. — Стереометрия, преобразования пространства. — М.: МЦНМО, 2006. — 256 с.):

$$AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 =$$
$$= 4\left(MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2\right) - 16MG^2.$$

Коли точка M збігатиметься з центром O одиничної сфери, якій належать точки A, B, C, D, матимемо:

$$AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 = 16 - 16 \cdot OG^2.$$

Якщо точки A, B, C і D — вершини правильного тетраедра, вписаного до одиничної сфери, то $OG = 0$, і квадрат довжини a ребра такого тетраедра становить $\frac{8}{3}$, звідси $a^6 = \frac{512}{27}$.

Нехай, навпаки, для даних чотирьох точок одиничної сфери справджується рівність

$$AB \cdot AC \cdot AD \cdot BC \cdot BD \cdot CD = \frac{512}{27}.$$

З іншого боку, за нерівністю Коші,

$$6\sqrt[6]{AB^2 \cdot AC^2 \cdot AD^2 \cdot BC^2 \cdot BD^2 \cdot CD^2} \le$$
$$\le AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2,$$

а тому

$$6\sqrt[3]{AB \cdot AC \cdot AD \cdot BC \cdot BD \cdot CD} \le 16,$$
$$AB \cdot AC \cdot AD \cdot BC \cdot BD \cdot CD \le \frac{512}{27}.$$

Отже, $AB = AC = AD = BC = BD = CD$. Очевидно, що за такої умови точки A, B, C і D сфери не можуть лежати в одній площині, а тому є вершинами правильного тетраедра. ↑

Задача «*Рекурентна послідовність*». Послідовність дійсних чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ задається в такий спосіб:

$a_0 = \frac{1}{2010}$ і $a_{n+1} = a_n - \arcsin\left(\sin^2 a_n\right)$ для всіх $n \ge 0$.

Знайдіть $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\, a_n$.

↓ Зауважимо, що $a_{n+1} = a_n - \arcsin\left(\sin^2 a_n\right) \le a_n$. Методом математичної індукції покажемо, що для всіх n $a_n > 0$. Насправді $a_0 = \frac{1}{2010} > 0$, і припустимо, що для всіх $n \le k$ $a_n > 0$. Покажемо, що тоді $a_{k+1} > 0$. Оскільки $a_1 < a_0$, то $0 < a_k < \frac{1}{2010}$, $k \ge 1$. Отже, для всіх $k \ge 0$

$$\sin a_k > \sin^2 a_k,$$
$$a_k > \arcsin\left(\sin^2 a_k\right),$$
$$a_{k+1} = a_k - \arcsin\left(\sin^2 a_k\right) > 0.$$

За теоремою Больцано—Вейєрштрасса, послідовність $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ має границю, яку позначимо через a. Переходячи до границі у вихідному рекурентному співвідношенні, з урахуванням неперервності функцій $y = \arcsin x$ та $y = \sin x$ знаходимо, що $a = 0$.

Неважко довести, застосовуючи *першу визначну границю*, що:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) = 1$ (залишаємо це зацікавленому читачеві як вправи).

За теоремою Штольца (*Дороговцев А. Я.* Математический анализ. — К.: Факт, 2004. — 560 с.), якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \alpha$.

Отже, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right) = 1$.

Звідси маємо:

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{a_{n+1}},$$
$$\lim_{n\to\infty} n a_{n+1} = 1.$$

А тому

$$\lim_{n\to\infty} n a_n = \lim_{n\to\infty} n a_{n+1} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1,$$

і для $\lambda < 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\lambda} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n a_n}{n^{1-\lambda}} = 0$.

Зауваження. Команда «Харків-45» запропонувала розв’язання цієї задачі, розглянувши граничну поведінку *орбіти* (див. коментарі до задачі 6—18: (*Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л., Раббот Ж. М., Тоом А. Л.* Заочные математические олимпиады. — М.: Наука, 1986. — 176 с.) точки $x_0 \in (0; h)$ для зростаючої неперервної на сегменті $[0; h]$ та двічі диференційованої на інтервалі $(0; h)$ функції f такої, що $f(0) = 0$ і $f(x) \ne x$ для всіх $x \in (0; h)$. ↑

ЗАВДАННЯ ОЛІМПІАДИ XIII ВСЕУКРАЇНСЬКОГО ТУРНІРУ ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ

1. Олігарх купив завод на 36 % дешевше ціни, встановленої Фондом держмайна, а потім продав його на 28 % дешевше тієї ж ціни. Скільки відсотків прибутку (відносно своїх витрат) отримав олігарх?

2. Чи існують такі цілі числа p і q, які задовольняють рівність

$$49q^2 - p^2 = 2010?$$

3. Нехай точка E лежить на стороні BC трикутника ABC, M — середина його сторони AC, причому $\angle BEA = \angle MEC$. Знайдіть відношення $\frac{AE}{EM}$.

4. За круглим столом сидять 30 інопланетян. Кожен з них прибув або з системи Сіріуса і завжди каже правду, або із системи Альдебарана і завжди каже неправду. Кожен з присутніх стверджує, що поряд з ним сидять представники Сіріуса та Альдебарана. Скільки інопланетян прилетіли з системи Альдебарана?

5. Знайдіть усі такі пари дійсних чисел x і y, для яких має місце рівність

$$x^2 - \frac{2x}{1+x^2y^2} + 1 = 0.$$

6. Фігура, яка складається з двох відрізків $AB = 2$ та $BC = 4$ зі спільним кінцем B, починає котитися без «ковзання» по прямій, що проходить через точки A і B. Якою має бути відстань між точками A і C, щоб точка B після одного повного «оберту» цієї фігури описала найкоротшу траєкторію?

7. У трикутнику ABC $\angle ABC = 120°$. Нехай AA_1, BB_1, CC_1 — бісектриси цього трикутника. Знайдіть величину кута $A_1B_1C_1$ (у градусах).

8. Обчисліть значення виразу $A = xy + 2yz + 3zx$, якщо x, y і z — додатні числа, які задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{y^2}{3} + z^2 = 9, \\ z^2 + zx + x^2 = 16, \\ x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25. \end{cases}$$

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОЛІМПІАДИ

1. Відповідь. 12,5 %.

Нехай S — ціна, встановлена Фондом держмайна. За умовою, олігарх витратив на придбання заводу

$$(1-0,36)S = 0,64S,$$

а продав завод за суму, що дорівнює

$$(1-0,28)S = 0,72S.$$

Тому його прибуток відносно витрат становить у відсотковому вимірі

$$\frac{0,72S - 0,64S}{0,64S} \cdot 100~\% = 12,5~\%.$$

2. Відповідь. Таких чисел не існує.

Очевидно, що числа p і q повинні бути однакової парності. Стандартним способом слід розглянути випадки:

$$p \equiv q \equiv 0 \pmod 2,$$

$$p \equiv q \equiv 1 \pmod 2.$$

3. Відповідь. 2.

Нехай на рисунку 1 зображено трикутник ABC, $\angle BEA = \angle MEC$, $AM = MC$. Добудуємо трикутник AEC до паралелограма $AECD$, у якому M — точка перетину діагоналей.

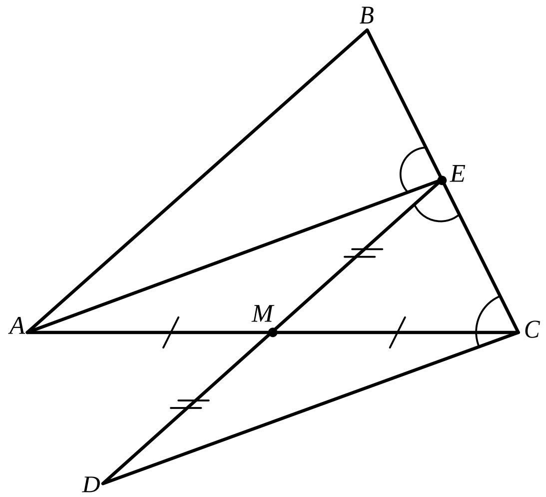

Рис. 1

Тоді $AE = DC$ і $\angle BEA = \angle ECD$. Оскільки $\angle BEA = \angle MEC$, то $\angle ECD = \angle MEC$. Отже, $DC = DE = 2ME = AE$.

Звідси $\frac{AE}{EM} = 2$.

4. Відповідь. Альдебаранців було 30 або 10.

Якщо за столом усі — представники Альдебарана, то вони можуть збрехати так, як зазначено в умові.

Розглянемо випадок, коли серед присутніх є хоча б один представник Сіріуса. Оскільки він каже правду, то з одного боку від нього сидить інший представник Сіріуса. З двох боків від цієї пари сіріусян сидить два альдебаранці (інакше сіріусянин бреше). З обох боків від цієї четвірки сидять сіріусяни (інакше альдебаранець каже правду). Таким чином, усі сіріусяни сидять парами, а ці пари розділені поодинокими альдебаранцями. Отже, маємо таке розміщення за столом: ...**АССАССАССАСС**...

5. Відповідь. (1; 0).

Дану рівність запишемо у вигляді:

$$\left(x-\frac{1}{1+x^2y^2}\right)^2+\frac{x^2y^2\left(2+x^2y^2\right)}{\left(1+x^2y^2\right)^2}=0.$$

Подальше є очевидним.

6. Відповідь. $AC = 2$.

Позначимо через α, β, γ радіанну міру кутів BAC, ABC, ACB відповідно.

Рух фігури складається з трьох «фаз»:

а) обертання навколо нерухомої точки A на кут $\pi-\alpha$, довжина траєкторії для точки B дорівнює

$$AB\cdot\frac{\pi-\alpha}{2\pi}\cdot\pi=2\pi\cdot\frac{\pi-\alpha}{2\pi}=\pi-\alpha;$$

б) обертання навколо нерухомої точки C на кут $\pi-\gamma$, довжина траєкторії для точки B дорівнює

$$AC\cdot\frac{\pi-\gamma}{2\pi}\cdot\pi=4\pi\cdot\frac{\pi-\gamma}{2\pi}=2(\pi-\gamma);$$

в) обертання навколо точки B, довжина траєкторії для точки B дорівнює нулю.

Отже, сумарна довжина траєкторії становить $2\pi+\beta-\gamma$.

За нерівністю трикутника
$AC\ge BC-AB=2=AB$.

Отже, $\beta\ge\gamma$.

Звідси легко випливає наведена відповідь.

7. Відповідь. $90°$.

Проведемо з точки A_1 перпендикуляри A_1M, A_1N та A_1K до прямих BB_1, AB та AC відповідно (рис. 2).

Оскільки AA_1 — бісектриса кута BAC, то $A_1N=A_1K$. Крім того, BA_1 — бісектриса кута NBB_1, а тому $A_1N=A_1M$. Отже, $A_1K=A_1M$, і B_1A_1 — бісектриса кута BB_1C.

Аналогічно доводимо, що BC_1 — бісектриса кута BB_1A.

Отже, $\angle A_1B_1C_1=90°$.

8. Відповідь. $24\sqrt{3}$.

Від точки M на площині відкладемо відрізки MA, MB і MC так, як зображено на рисунку 3: $\angle AMB=150°$, $\angle CMB=90°$, $\angle AMC=120°$; $AM=x$, $BM=\frac{y}{\sqrt{3}}$, $CM=z$.

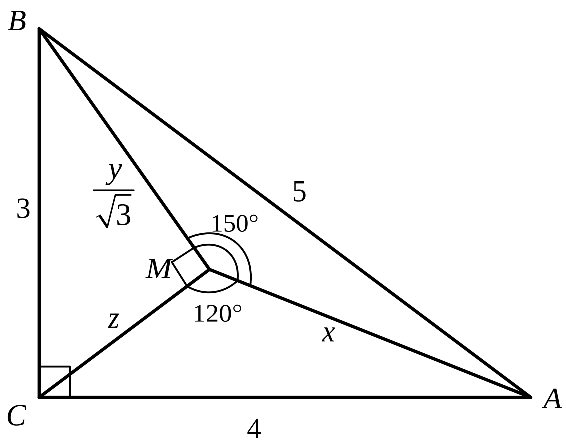

Рис. 3

Отримаємо трикутник ABC зі сторонами $AB=5$, $BC=3$, $CA=4$.

Тоді

$$xy+2yz+3zy=4\sqrt{3}S_{AMB}+4\sqrt{3}S_{CMB}+$$
$$+4\sqrt{3}S_{AMC}=4\sqrt{3}S_{ABC}=24\sqrt{3}.$$

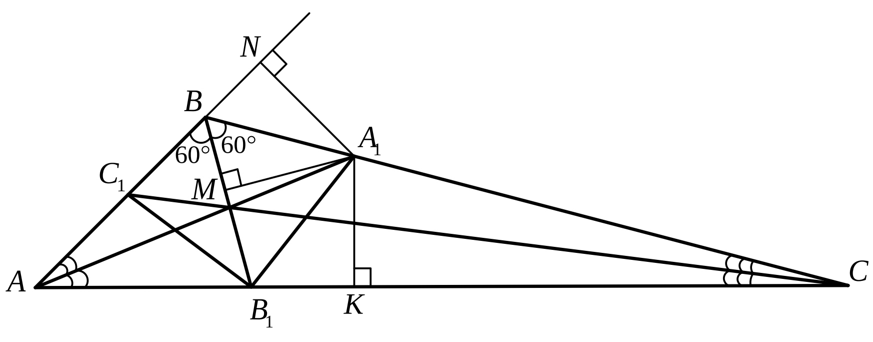

Рис. 2

ФІНАЛЬНИЙ БІЙ XIII ВСЕУКРАЇНСЬКОГО ТУРНІРУ ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ

1. Нехай h_a і h_b — висоти трикутника ABC, проведені з його вершин A і B відповідно, а r — радіус вписаного кола. Доведіть, якщо $\sin\frac{C}{2} \geq \frac{3}{4}$, то виконується нерівність $h_a + h_b \geq 7r$.

2. Чи існують такі 2010 натуральних чисел a_1, a_2, ..., a_{2010}, більших за одиницю, що будь-які два з них є взаємно простими, а число $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{2010} - 1$ — добуток двох послідовних:

а) непарних чисел?

б) парних чисел?

3. Знайдіть усі такі пари цілих чисел x та y, для яких виконується рівність

$$4^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{6}\right)^x = 3y^2 + 2^y - 1.$$

4. Два кола ω_1 та ω_2, які не мають спільних точок, дотикаються внутрішнім чином до кола ω. Дві внутрішні спільні дотичні кіл ω_1 та ω_2 перетинають коло ω у чотирьох точках. Нехай M і N — будь-які дві з них, що належать одній і тій самій дузі кола ω з кінцями в точках його дотику до кіл ω_1 та ω_2. Доведіть, що пряма MN паралельна якійсь із зовнішніх спільних дотичних до кіл ω_1 та ω_2.

5. Знайдіть усі такі функції $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, що

$$xf\left(x+\frac{1}{y}\right)+yf(y)+\frac{y}{x^2}+\frac{2y^2}{x}=$$

$$=yf\left(y+\frac{1}{x}\right)+xf(x)+\frac{x}{y^2}+\frac{2x^2}{y},$$

для всіх $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, та $y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, для яких $xy\neq -1$.

6. Згідно з регламентом парламенту кожна його фракція повинна мати принаймні 5 депутатів, і жодні дві фракції не можуть складатися з однакової кількості осіб. До парламентських канікул усі депутати були розподілені по 10 фракціях (кожен з депутатів має належати тільки до однієї фракції). Після канікул усі колишні фракції розформувались, було утворено кілька нових фракцій, а кілька депутатів залишилися позафракційними. З'ясувалось, що жодні два депутати, які раніше перебували в одній фракції, після канікул не потрапили до однієї й тієї самої фракції. Знайдіть найменшу можливу кількість депутатів, які стали позафракційними.

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ФІНАЛЬНОГО БОЮ

1. Легко помітити, що кут C — тупий, а тому кути A і B є гострими. Неважко довести, що

$$\frac{h_a+h_b}{r}=\left(\sin A+\sin B\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\right)=$$

$$2\sin^2\frac{A+B}{2}\left(1+\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\right).$$

Доведемо, що для гострих кутів A і B

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\ge\operatorname{ctg}^2\frac{A+B}{4}.$$

Остання нерівність рівносильна нерівності

$$\frac{\ln\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\ln\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}{2}\ge\ln\operatorname{ctg}\frac{A+B}{4},$$

яка випливає з опуклості донизу функції $y=\ln\operatorname{ctg}x$ на проміжку $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$.

Отже, маємо:

$$\frac{h_a+h_b}{r}\ge 2\sin^2\frac{A+B}{2}\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{A+B}{4}\right)=$$

$$=2\sin^2\frac{\pi-C}{2}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\pi-C}{4}}=4\left(1+\sin\frac{C}{2}\right)\ge 7.$$

2. а) **Відповідь**. Так, існують.

Нехай $a_1=p_1^2$, $a_2=p_2^2$, ... , $a_{2010}=p_{2010}^2$, де $p_1=2$, p_2, ... , p_{2010} — перші 2010 простих чисел. Зрозуміло, що всі вони попарно взаємно прості, а

$$a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{2010}-1=$$

$=\left(p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_{2010}-1\right)\left(p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_{2010}+1\right)$ — добуток двох непарних послідовних чисел.

б) **Відповідь**. Так, існують.

Будемо будувати такий набір індуктивно. Якщо $a_1=9$ і $a_2=49$, то $a_1a_2-1=20\cdot 22$.

Нехай a_1, a_2, ..., a_n — такі натуральні числа, що будь-які два з них є взаємно простими, а число

$$a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n-1=\left(b_n-2\right)b_n,$$

де b_n — парне число (у випадку двох шуканих чисел $b_n=22$).

Візьмемо $a_{n+1}=\left(b_n+1\right)^2$, тоді

$$a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n\cdot a_{n+1}=$$

$$=\left(b_n^2-2b_n+1\right)\left(b_n^2+2b_n+1\right)=b_n^4-2b_n^2+1,$$

при цьому число $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n\cdot a_{n+1}-1$ є добутком двох послідовних парних чисел b_n^2-2 та b_n^2. Залишилося довести, що нове число $a_{n+1}=\left(b_n+1\right)^2$ є взаємно простим з усіма іншими числами a_1, a_2, ... , a_n. Насправді, скориставшись алгоритмом Евкліда, матимемо:

$$\left(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n;\,a_{n+1}\right)=$$

$$=\left(b_n^2-2b_n+1;\,b_n^2+2b_n+1\right)=\left(4b_n;\,b_n^2+2b_n+1\right).$$

Оскільки число b_n парне, то число $a_{n+1}=b_n^2+2b_n+1$ є непарним. Тому

$$\left(4b_n;\,b_n^2+2b_n+1\right)=\left(b_n;\,b_n^2+2b_n+1\right)=1.$$

Отже, число a_{n+1} взаємно просте з добутком $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n$, а тому воно взаємно просте з кожним із чисел a_1, a_2, ... , a_n, що і завершує доведення.

3. Відповідь. $(0;1)$, $(-1;-2)$.

Для $y=0$ потрібних цілих x, очевидно, не існує.

Нехай $y\ge 1$. Для $x<0$ рівність неможлива (в її правій частині ціле число, а в лівій — неціле).

Якщо $x=0$, то рівність виконується тільки для $y=1$.

Для $x=1$ маємо рівність $3y^2+2^y=6$, яка не справджується ані для $y=1$, ані для $y\ge 2$ ($3y^2+2^y>6$ для всіх $y\ge 2$).

Далі, якщо $x\ge 2$, то

$$0<\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x+\left(\frac{1}{6}\right)^x<1.$$

Нехай тепер $y\le -1$ та $x\ge 0$.

Для $x\in\{1;2\}$ вихідна рівність, як неважко переконатися, не може виконуватися.

Отже, розглядаємо $x\ge 2$. Оскільки $3y^2-1$ і 4^x — натуральні числа, а обидва числа 2^y і $\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x+\left(\frac{1}{6}\right)^x$ належать проміжку $(0;1)$, то $3y^2-1=4^x$. Але це є неможливим, оскільки $4^x+1\equiv 2\pmod 3$.

Залишається розглянути випадок, коли $y\le -1$ та $x\le -1$.

Для $x=-1$ знаходимо $y=-2$. Нехай $x\le -2$. Аналогічно наведеним вище міркуванням робимо висновок, що одночасно мають справджуватись рівності

$$2^{-x}+3^{-x}+6^{-x}=3y^2-1,\ 2^y=4^x.$$

Звідси маємо: $y=2x$.

Залишаємо читачам традиційне доведення методом математичної індукції, що для будь-якого натурального $n \geq 2$ виконується нерівність

$$2^n + 3^n + 6^n > 12n^2 - 1.$$

4. Розглянемо спочатку корисне допоміжне твердження.

Лема. Нехай два кола — ω_1 та ω_2 — дотикаються в точці S (зовнішнім або внутрішнім чином). Через точку S проведено дві прямі a і b, які перетинають удруге коло ω_2 у точках A і B відповідно. Нехай AP і BQ — дотичні до кола ω_1 (P і Q — точки дотику). Тоді $\frac{AP}{BQ} = \frac{SA}{SB}$.

Доведення. Нехай прямі SA і SB перетинають удруге коло ω_1 у точках A_1 і B_1 відповідно (рис. 4, 5).

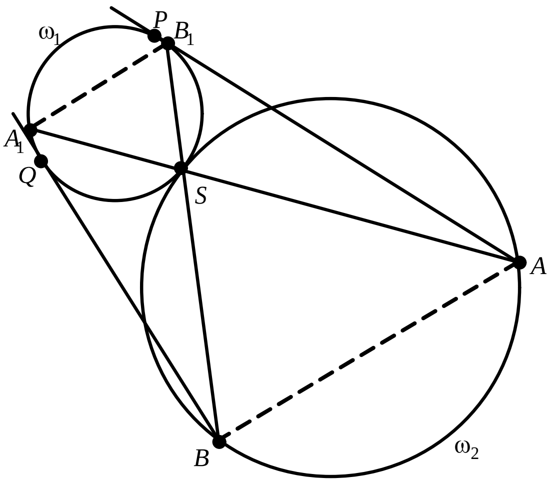

Рис. 4

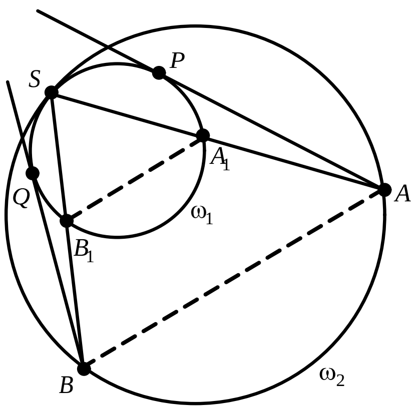

Рис. 5

Тоді $AB \parallel A_1B_1$, і трикутники SAB і SA_1B_1 подібні (це випливає з гомотетичності кіл ω_1 та ω_2 відносно точки S).

Далі, $AP^2 = AS \cdot AA_1$ і $BQ^2 = BS \cdot BB_1$.

Звідси випливає, що $\frac{AP^2}{BQ^2} = \frac{SA}{SB} \cdot \frac{AA_1}{BB_1}$.

Оскільки $AB \parallel A_1B_1$, то $\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{SA_1}{SB_1}$, а з подібності трикутників SAB і SA_1B_1 одержуємо, що $\frac{SA_1}{SB_1} = \frac{SA}{SB}$.

Отже,

$$\frac{AP^2}{BQ^2} = \frac{SA}{SB} \cdot \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{SA}{SB} \cdot \frac{SA_1}{SB_1} = \frac{SA}{SB} \cdot \frac{SA}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2},$$

тобто $\frac{AP}{BQ} = \frac{SA}{SB}$, що й треба було довести.

Перейдемо до нашої задачі. Нехай спільна зовнішня дотична кіл ω_1 і ω_2, відносно якої відрізки MN і BC лежать у різних півплощинах, перетинає коло ω в точках P і Q. Нехай пряма PQ дотикається до кіл ω_1 і ω_2 в точках E і F відповідно. Внутрішні спільні дотичні кіл ω_1 і ω_2, які перетинають ω в точках M і N, дотикаються до кіл ω_1 і ω_2 в точках G і H та L і K відповідно (рис. 6).

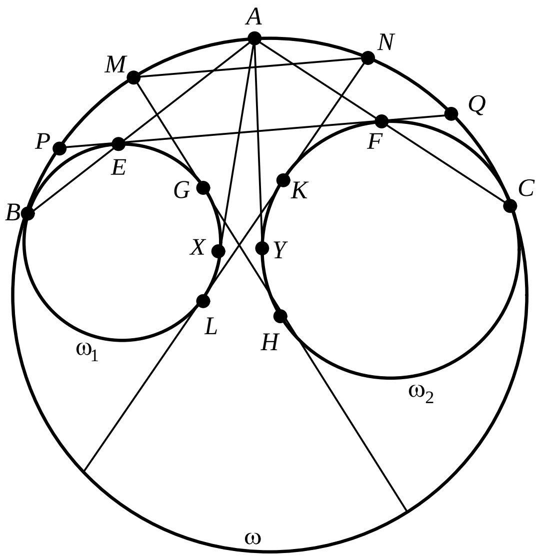

Рис. 6

Прямі BE і CF удруге перетинають ω у точці A, яка є серединою дуги PQ.

Пропонуємо довести це самостійно; див. задачу 10.8 (Зарубежные математические олимпиады / Под ред. И. Н. Сергеева. — М.: Наука, 1987. — 416 с.), задачу G16 (*Мітельман І. М.* Вибрані задачі відкритих математичних олімпіад та фестивалів Рішельєвського ліцею. — Одеса: ТЕС, 2010. — 245 с.).

Чотирикутник $BEFC$ є циклічним, бо

$$\angle BEP = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BP} + \overset{\frown}{AQ}\right) = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BP} + \overset{\frown}{AP}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} = \angle FCB.$$

Для доведення паралельності PQ і MN нам треба довести, що A — середина дуги MN, тобто $AM = AN$. Проведемо дотичні AX і AY із точка A до кіл ω_1 і ω_2. Тоді маємо:

$$AX^2 = AB \cdot AE = AC \cdot AF = AY^2,$$

тобто $AX = AY$.

За лемою виконуються співвідношення

$$\frac{BA}{AX} = \frac{MB}{MG} = \frac{BN}{NL}.$$

За теоремою Птоломея для чотирикутника $BMAN$

$$BA \cdot MN = MB \cdot AN + BN \cdot AM.$$

Отже, одержуємо: $AX \cdot MN = MG \cdot AN + NL \cdot AM$.

Аналогічно $AY \cdot MN = MH \cdot AN + NK \cdot AM$.

Ураховуючи, що $AX = AY$, із останніх двох рівностей одержуємо:

$$MG \cdot AN + NL \cdot AM = MH \cdot AN + NK \cdot AM,$$

тобто

$$(NL - NK) \cdot AM = (MH - MG) \cdot AN,$$

$$LK \cdot AM = GH \cdot AN.$$

Оскільки $LK = GH$, то $AM = AN$, що й треба було довести.

5. Відповідь. $f(x) = A + \frac{B}{x} + x^2$, де A і B — довільні дійсні числа.

Нехай $g(x) = f(x) - x^2$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тоді вихідне співвідношення набуде вигляду

$$xg\left(x + \frac{1}{y}\right) + yg(y) = yg\left(y + \frac{1}{x}\right) + xg(x). \qquad (1)$$

Далі, нехай $y = 1$, тоді з (1) одержимо:

$$xg(x+1) + g(1) = g\left(1 + \frac{1}{x}\right) + xg(x), \qquad (2)$$

$$g\left(1 + \frac{1}{x}\right) = xg(x+1) + g\left(\frac{1}{x}\right) - xg(1). \qquad (3)$$

З рівностей (2) і (3) випливає, що

$$xg(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) = g(1)(x+1). \qquad (*)$$

Візьмемо тепер $y = -1$, тоді з (1) знаходимо:

$$xg(x-1) - g(-1) = -g\left(\frac{1}{x} - 1\right) + xg(x), \qquad (2')$$

$$g\left(\frac{1}{x} - 1\right) = -xg(x-1) + g\left(\frac{1}{x}\right) + xg(-1). \qquad (3')$$

З рівностей (2′) і (3′) одержуємо:

$$xg(x) - g\left(\frac{1}{x}\right) = g(-1)(x-1). \qquad (**)$$

Із співвідношень (*) і (**) маємо:

$$2xg(x) = g(1)(x+1) + g(-1)(x-1).$$

Звідси

$$2xg(x) = \left(g(1)+g(-1)\right)x + \left(g(1)-g(-1)\right),$$

тобто $g(x) = A + \dfrac{B}{x}$, а $f(x) = A + \dfrac{B}{x} + x^2$, де A і B — довільні дійсні числа.

Безпосередня перевірка показує, що всі функції наведеного вигляду задовольняють умову задачі.

6. Відповідь. 50 депутатів.

Нехай у парламенті n депутатів. Позначимо S початкову кількість фракцій; s — кількість фракцій, сформованих після канікул; m — кількість депутатів у найбільшій з «нових» фракцій; k — кількість позафракційних депутатів після парламентських канікул.

Очевидно, що $m \le S$, оскільки жодні два депутати, що перебували в одній і тій самій «старій» фракції, не можуть опинитися разом в якійсь «новій» фракції.

Матимемо тоді, що

$5 + 6 + \ldots + m + k \ge n \ge 5 + 6 + \ldots m + \ldots + (S + 4)$.

Звідси випливає, що для $m \le S$

$k \ge (S + 1) + \ldots + (S + 4) = 4S + 10$.

Якщо $S = 10$, то $k \ge 50$.

Залишається навести приклад, коли k набуватиме значення $4S + 10$. Нехай 5, 6, ..., $S + 4$ — кількість депутатів у «старих» фракціях парламенту. Розподілимо всіх депутатів найбільшої фракції серед $S + 4$ «нових» фракцій. Після чого найбільшою залишається фракція з $S + 3$ депутатів, яких по одному розподіляємо серед перших $S + 3$ «нових» фракцій, і т. д. Перші 5 «нових» фракцій складатимуться з S депутатів кожна, а останні 4 «нові» фракції міститимуть 1, 2, 3 та 4 депутати відповідно. Проголосимо тепер *незалежними* всіх депутатів з перших п'яти та з останніх чотирьох «нових» фракцій. Отже, решта $S - 4$ «нових» фракцій складатимуться з 5, 6, ... , S депутатів, а незалежних депутатів буде саме $4S + 10$.

***Валентина БОРИСОВА**, методист Інституту інноваційних технологій і змісту освіти МОН України, заступник голови оргкомітету турніру*

***Ігор МІТЕЛЬМАН**, заслужений вчитель України, доцент, Рішельєвський ліцей при Одеському національному університеті імені І. І. Мечникова, заступник голови журі турніру*

***Олександр КУРЧЕНКО**, професор Київського національного університету імені Тараса Шевченка, заступник голови журі турніру*

***Катерина РАБЕЦЬ**, доцент Сумського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти, експерт-консультант турніру*

***Валентин ЛЕЙФУРА**, заслужений вчитель України, професор Чорноморського державного університету імені Петра Могили, заступник голови журі турніру*

***В'ячеслав ЯСІНСЬКИЙ**, заслужений вчитель України, доцент Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського, заступник голови журі турніру*

Докладну інформацію щодо підсумків та перебігу турніру розміщено на його web-сторінці
www.ukrtym.blogspot.com