XI Всеукраїнський турнір юних математиків

В.О.Борисова[1], О.О.Курченко[2], К.В.Рабець[3].

З 15 по 19 жовтня 2008 року відповідно до наказу МОН України відбувся XI Всеукраїнський турнір юних математиків.

Своє друге десятиліття ТЮМ розпочав на Волині. Його гостинно прийняв обласний ліцей з посиленою військово-фізичною підготовкою м. Луцька. Адміністрація та колектив ліцею створили чудові умови перебування учасників та проведення ігор ТЮМ-11. Визначальними рисами цьогорічного турніру стали злагодженість його керівних та робочих ланок, динамізм і чіткість перебігу всіх передбачених заходів ТЮМ. Цього вимагала екстремальність основних показників Одинадцятого турніру: найкоротший час підготовки (традиційно турнір проводився на осінніх канікулах чи після них), найстисліший термін проведення (5 замість звичних 6-7 днів), найбільша кількість команд за найменшої кількості членів журі. Щодо цифр — у XI Всеукраїнському турнірі юних математиків взяло участь 25 команд із 17 областей нашої країни.

Турнір проведено за активної підтримки Інституту інноваційних технологій і змісту освіти Міністерства освіти і науки України, управління освіти і науки Волинської обласної державної адміністрації, Волинської обласної Малої академії наук.

У складі журі працювали відомі вчені-математики провідних навчальних закладів України: професори Київського національного університету ім. Тараса Шевченка О.О. Курченко (заступник голови журі), О.Г. Кукуш та В.М. Радченко, професор Кам'янець-Подільського НУ ім. І. Огієнка І.М. Конет; доценти Прикарпатського державного університету ім. В. Стефаника І.В. Федак, Донецького НУ Л.Л. Оридорога, Сумського державного університету С.П. Шаповалов та О.М. Назаренко, Дніпропетровського НУ О.В. Поляков, КНУ ім. Тараса Шевченка О.Н. Нестеренко та Г.М. Шевченко, Волинського НУ ім. Лесі Українки Л.І. Філозоф, І.Р. Ковальчук, П.Й. Миронюк та ін.; студенти Київського та Харківського НУ С.В. Слободянюк та Л.В. Кадець, які свого часу були переможцями Всеукраїнських математичних турнірів. Очолював журі турніру член-кореспондент НАН України, професор, завідувач кафедри диференціальних та інтегральних рівнянь КНУ ім. Тараса Шевченка М.О. Перестюк. Експертом-консультантом турніру була докторантка КНУ ім. Тараса Шевченка К.В. Рабець.

Два дні тривали напружені чвертьфінальні бої, які визначили 12 кращих команд-півфіналістів.

Шляхом рейтингового опитування учасники обрали 10 задач для півфінальних ігор: *5. "Сума цифр", 6. "Точка в трикутнику", 7. "Траєкторії на полі", 8. "Тригонометричні суми", 10. "Нитка і кільце", 11. "Композиція функцій", 16. "Майже геометричні прогресії", 17. "Раціональні точки", 18. "Функціональне рівняння", 19. "Пошук*

[1]методист Інституту інноваційних технологій і змісту освіти Міністерства освіти і науки України, заступник голови оргкомітету;

[2]професор КНУ ім. Тараса Шевченка, доктор фізико-математичних наук, заступник голови журі;

[3]докторант КНУ ім. Тараса Шевченка, кандидат фізико-математичних наук, експерт-консультант турніру

стратегії успіху" (Умови усіх задач для відбірних етапів турніру були опубліковані у журналі "У світі математики" **14** (2008), №2).

За результатами чверть- та півфінальних боїв дипломи III ступеня вибороли команди Українського фізико-математичного ліцею КНУ ім. Тараса Шевченка (УФМЛ), Дніпропетровського ліцею інформаційних технологій при ДНУ (Дніпроліт), Луцької гімназії №21 ім. Михайла Кравчука, спеціалізованої школи I-III ст. №10 ім. Героя Радянського Союзу О.Бутка м. Суми (Суми "Дельта"), НВК "Гімназія №14" м. Луцьк (Луцьк-14), Луганської області, Луцького НВК №9, ЗОШ №35 м. Краматорськ Донецької області (Краматорськ-35); Волинського обласного ліцею з посиленою військово-фізичною підготовкою, а фіналістами XI Всеукраїнського турніру юних математиків, що мали змагатися за дипломи I-II ступенів, стали команди Харківського НВК №45 "Академічна гімназія", Дніпропетровського обласного ліцею-інтернату фізико-математичного профілю, Рішельєвського ліцею Одеського національного університету ім. І.І. Мечникова, збірна міст Луцька та Горохова.

Оргкомітет та журі турніру нагородили дипломами та призами учасників, які відзначилися в особистій першості, тобто принесли найбільшу кількість балів своїм командам. Це Кузьменко Дмитро (ДОЛІФМП), Остапчук Маргарита (Луцький НВК №9), Задорожний Олександр (збірна міст Луцька та Горохова), Никифорчин Христина (ФТЛ при ІФНТУГ), Бондаренко Максим (ДОЛІФМП), Божко Микола (Рішельєвський ліцей). Дипломами за успішний виступ в особистій першості відзначені Шульга Олександр (УФМЛ), Кіслінська Маргарита (Харків-45), Запара Олексій (Краматорськ-35), Консевич Катерина (ПМЛ, м. Івано-Франківськ), Мартиненко Вікторія (Суми "Дельта").

Крім командних боїв, на турнірі було проведено особисту олімпіаду, в якій могли взяти участь представники тих команд, що не потрапили до півфіналу. Переможцями олімпіади ТЮМ-11 стали:

I місце: Лазарович Олег (м. Івано-Франківськ, ФТЛ), Проць Тарас (м. Дрогобич), Астаф'єв Ярослав (м. Запоріжжя);

II місце: Ігнатенко Микола (м. Запоріжжя), Остапчук Василь (м. Рівне), Маховський Іван (Закарпатська область), Лєпіхова Марія (м. Івано-Франківськ, ПМЛ), Івасюк Дмитро (м. Івано-Франківськ, ФТЛ);

III місце: Винницька Софія (м. Дрогобич), Михалевич Роман (с. Замшани, Ратнівський р., Волинська обл.), Гуйван Богдан (Закарпатська область), Повод Святослав (м. Запоріжжя).

Далі наводимо умови та розв'язання завдань олімпіади. Про завдання фіналу, їх розв'язання та підсумки фінального бою ми плануємо розповісти у окремій статті у наступному номері журналу.

Олімпіада ТЮМ-11

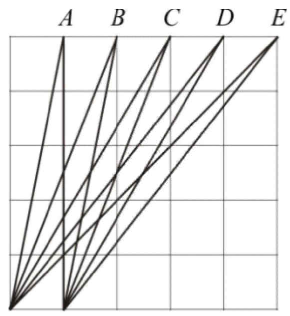
1. Сума 100 чисел дорівнює 1000. Найбільше з них збільшили вдвічі, ще одне зменшили на 10. Виявилось, що сума не змінилась. Знайдіть найменше число.

2. З точки поза колом проведено січну, яка перетинає коло в точках, віддалених від даної точки на a см і b см, $a < b$. Відстань від даної точки до центра кола дорівнює c см. Обчисліть радіус кола.

3. Порівняйте числа $\sqrt{2007} + \sqrt{2009}$ та $2\sqrt{2008}$.

Запропонуйте якомога більше способів порівняння.

4. Знайдіть суму кутів з вершинами у точках A, B, C, D, E.



5. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} (x+y)^3 = z, \\ (y+z)^3 = x, \\ (x+z)^3 = y. \end{cases}$$

6. Чи можна розрізати паперовий рівносторонній трикутник на 2008 рівносторонніх трикутників? Якщо можна, то як? Якщо ні, то чому?

7. Розв'яжіть рівняння у натуральних числах:

$$\frac{10}{x+10} + \frac{10 \cdot 9}{(x+10)(x+9)} + \ldots + \frac{10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(x+10)(x+9)\ldots(x+2)(x+1)} = 5.$$

Розв'язання та вказівки до завдань олімпіади

1. Нехай x — найбільше число, y — деяке число, яке зменшили на 10. Оскільки решта 98 чисел залишилися без змін, то $x + y = 2x + y - 10$, звідки $x = 10$. Середнє арифметичне цих 100 чисел дорівнює $\frac{1000}{100} = 10$, тобто дорівнює найбільшому числу. Отже, ці 100 чисел рівні між собою і рівні числу 10. Таким чином, найменше число дорівнює 10. *Відповідь: 10.*

2. Нехай з точки C поза колом з центром O провели січну, яка перетинає коло у точках A, B, та дотичну CK. За умовою $CA = a, CB = b, CO = c$. За властивістю дотичної і січної $CK^2 = CA \cdot CB$, звідки $CK = \sqrt{ab}$. З прямокутного трикутника OCK ($\angle K = 90°$) за теоремою Піфагора маємо $OK^2 = OC^2 - CK^2 = c^2 - ab$, звідки радіус кола $OK = \sqrt{c^2 - ab}$. *Відповідь:* $\sqrt{c^2 - ab}$.

3. *I спосіб.* Порівняємо квадрати чисел:

$$\left(\sqrt{2007} + \sqrt{2009}\right)^2 = 4016 + 2\sqrt{2007 \cdot 2009} < 4016 + 2\sqrt{2008^2} = \left(2\sqrt{2008}\right)^2,$$

бо $2007 \cdot 2009 = 2008^2 - 1 < 2008^2$. Звідси $\sqrt{2007} + \sqrt{2009} < 2\sqrt{2008}$.

II спосіб. Маємо

$$\sqrt{2009} - \sqrt{2008} = \frac{1}{\sqrt{2008} + \sqrt{2009}} < \frac{1}{\sqrt{2007} + \sqrt{2008}} = \sqrt{2008} - \sqrt{2007},$$

тому $\sqrt{2007} + \sqrt{2009} < 2\sqrt{2008}$.

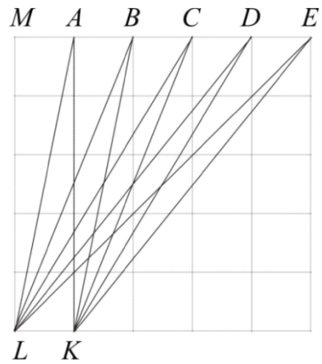
III спосіб. За нерівністю між середнім арифметичним і середнім квадратичним

$$\frac{\sqrt{2007} + \sqrt{2009}}{2} < \sqrt{\frac{2007 + 2009}{2}} = \sqrt{2008}.$$

Відповідь: $\sqrt{2007}+\sqrt{2009}<2\sqrt{2008}$.

4. Позначимо точки M, K, L як на малюнку. Кути $\angle LAK$ та $\angle MLA$ рівні як внутрішні протилежні при паралельних прямих ML і AK та січній AL. Аналогічно

$$\angle ALB=\angle LBK,\ \angle LCK=\angle BLC,$$
$$\angle LDK=\angle CLD,\ \angle LEK=\angle DLE.$$



Таким чином, $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=$

$$=\angle MLA+\angle ALB+\angle MLC+\angle CLD+\angle DLE=$$
$$=\angle MLE=45^\circ.$$

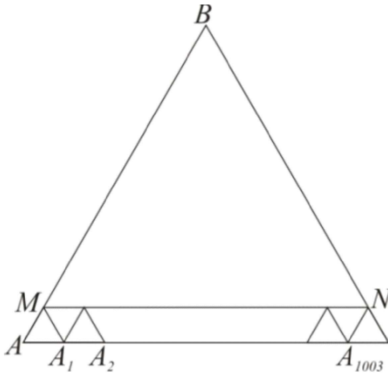
Відповідь: 45°.

5. З перших двох рівнянь маємо $x-z=\sqrt[3]{z}-\sqrt[3]{x}$, або $x+\sqrt[3]{x}=z+\sqrt[3]{z}$. Функція $f(t)=t+\sqrt[3]{t}$, $t\in\mathbb{R}$, зростає на інтервалі $(-\infty;+\infty)$, тому кожне своє значення вона набуває лише при одному значенні аргументу. Отже, $x=z$.

Аналогічно з другого та третього рівнянь маємо $x=y$. Але за умови $x=y=z$ система зводиться до рівняння $8x^3=x$, звідки $x=0$ або $x=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$. *Відповідь:*

$(0,0,0)\,,\left(\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right).$

6. Поділимо сторону даного трикутника на 1004 рівних відрізка (див. малюнок) і відріжемо смугу AMNC, яку розріжемо на 2007 рівних між собою рівносторонніх трикутників. Трикутник BMN також очевидно рівносторонній.



7. Функція

$$f(x)=\frac{10}{x+10}+\frac{10\cdot 9}{(x+10)\,(x+9)}+\ldots+\frac{10\cdot 9\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(x+10)\,(x+9)\ldots(x+2)\,(x+1)}$$

спадає на проміжку $[0,+\infty)$. Помітимо, що $f(1)=\frac{10}{11}+\frac{9}{11}+\frac{8}{11}+\ldots+\frac{1}{11}=\frac{55}{11}=5$. Тому рівняння має єдиний корінь $x=1$. *Відповідь*: $x=1$.