XVII Всеукраїнський турнір юних математиків імені професора М.Й. Ядренка

О.Г. Кукуш, І.М. Мітельман, Д.Ю. Мітін, В.М. Радченко, С.В. Слободянюк, В.А. Ясінський

З 28 жовтня по 1 листопада в м. Чернівці проходив XVII турнір юних математиків імені професора М.Й. Ядренка, в якому взяла участь 21 команда школярів із різних областей України. Обов'язки голови журі ТЮМу виконував В.М. Радченко, професор КНУ імені Тараса Шевченка, експертом-консультантом турніру був В.А. Ясінський, доцент Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського, заступниками голови журі — О.Г. Кукуш, професор КНУ імені Тараса Шевченка; І.М. Мітельман, заступник директора Рішельєвського ліцею при Одеському національному університеті імені І.І. Мечникова, доцент; І.М. Черевко, декан Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, професор.

За підсумками змагань ТЮМу дипломами переможців I-III ступенів було нагороджено 11 команд.

Дипломи I ступеня:
"Харків-27" Харківської області (абсолютний переможець турніру),
"ФМГ-17" Вінницької області.

Дипломи II ступеня:
"Харків-45" Харківської області,
"Всюди щільна множина" Львівської області,
"Альфа" Івано-Франківської області,
"КВАНТ.КОМ" Харківської області,
"Геліос" Чернівецької області.

Дипломи III ступеня:
"Вавилонська вежа" Чернівецької області,
"Тривед" Миколаївської області,
"2 x 2" Запорізької області,
"Волинь" Волинської області.

Учасникам були вручені дипломи і в окремих номінаціях. За перемогу в особистій першості були нагороджені Ганна Назаркевич (команда "Всюди щільна множина") і Тарас Жиленко (команда "Харків-27"). Диплом і відзнаку пам'яті професора В.М. Лейфури за абсолютну перемогу в особистій першості вручено Антону Зуєву, капітану команди "ФМГ-17".

Особливі призи отримали:

Назарчук Ірина, учасниця команди "Ліцей-Плюс" Хмельницької області — за змістовну доповідь по задачі "Рівні кути";

Ан Євгенія, учасниця команди "Альфа-Плюс" м. Краматорська Донецької області — за найкращу комп'ютерну презентацію доповіді;

Величко Петро з команди "2 x 2" — як наймолодший учасник турніру.

Для учасників команд, які не потрапили до півфіналу, було проведено традиційну математичну олімпіаду, переможців та призерів якої було нагороджено дипломами. Дипломами I ступеня нагороджені Мудрієвський Петро, Федоров Олександр, Пеккоєв Владислав, Єрмаков Артур. Дипломами II ступеня: Коваленко Юрій, Веремчук Максим, Іваненко Павло, Євдокімова Світлана, Політик Дмитро. Дипломами III ступеня: Солодовнікова Алевтина, Савицький Валерій, Шевчук Олександр, Борівець Богдан, Зубрійчук Євген, Ковальчук Ярослав, Герасимчук Денис, Мединський Микола, Перната Ольга, Рачек Владислав, Довганюк Олексій, Павлов Антон, Назарець Віталій.

Завдання фінального математичного бою

1. Знайдіть усі такі пари взаємно простих натуральних чисел m і n, що $m^3 - m = n^2 - n$.

2. Довжина найменшої сторони чотирикутника становить 1 см, а довжина найбільшої — 3 см. До того ж відомо, що серед сторін цього чотирикутника немає рівних між собою, а тангенси всіх його внутрішніх кутів є рівними між собою. Знайдіть довжини решти сторін цього чотирикутника.

3. Нехай дано дійсні числа $x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$. Доведіть, що

$$\frac{x^4 + y^4}{x^2(x+y)} + \frac{y^4 + z^4}{y^2(y+z)} + \frac{z^4 + x^4}{z^2(z+x)} \geq 3.$$

4. Знайдіть усі такі трійки натуральних чисел a, b і c, для яких виконується рівність $2^a + 3^b + 1 = c!$

5. Вписане коло ω трикутника ABC дотикається до його сторін AB, BC і AC в точках K, N і P відповідно. Нехай точка M — середина відрізка KN, L — точка перетину відрізків BP і KN, причому $KL = PL$. Доведіть, що прямі PM і BC паралельні.

6. Знайдіть усі такі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що для всіх дійсних чисел x та y виконується рівність $f(y - f(x)) = f(x^{2014} - y) - 2013yf(x)$.

7. На турнір юних математиків приїхали 2014 учнів з деяких міст. Відомо, що з кожного міста приїхали щонайбільше 25 учнів. Оргкомітет хоче на закритті розсадити учнів так, щоб учні з одного міста сиділи в одному ряду та в кожному з рядів сиділи не більше за 50 учнів. За якої найменшої кількості рядів оргкомітет завжди зможе це зробити (незалежно від кількості міст та кількостей учнів з кожного міста)?

Розв'язання та вказівки

1. Якщо $m = 1$, то з рівняння дістаємо $n = 1$ і навпаки. Пара $(1, 1)$ задовольняє умову задачі. Далі будемо вважати, що $m, n > 1$. Оскільки $n^2 - n = n(n-1)$ ділиться на m, $m^3 - m = m(m^2 - 1)$ ділиться на n та числа m, n взаємно прості, то $n - 1$ ділиться на m, а $m^2 - 1$ ділиться на n. Тому існують натуральні числа a, b такі, що $n = am + 1$ та $m^2 = bn + 1 = abm + b + 1$. Звідси випливає, що $ab < m$ та $b + 1$ ділиться на m, а отже $m-1 \le b < m$. Це можливо лише при $b=m-1$ та $a=1$. Таким чином, $n=m+1$ та вихідне рівняння набуває вигляду $m^3-m=(m+1)^2-(m+1)$, або $m^3-m^2-2m=0$. Звідси $m=2$ та $n=3$.

Відповідь: $(1,1)$ та $(2,3)$.

2. Нехай α — найменший кут даного чотирикутника, тоді кожен з інших кутів дорівнює α або $\pi+\alpha$. Якщо всі кути чотирикутника рівні, то $4\alpha=2\pi$, $\alpha=\frac{\pi}{2}$, але $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ не існує, тому такий чотирикутник (тобто прямокутник) не задовольняє умову. Оскільки в чотирикутнику лише один внутрішній кут може бути більше розгорнутого, то чотирикутник має кути α, α, α, $\pi+\alpha$. Звідси $4\alpha+\pi=2\pi$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Даний чотирикутник $ABCD$ не є опуклим (рис. 1).

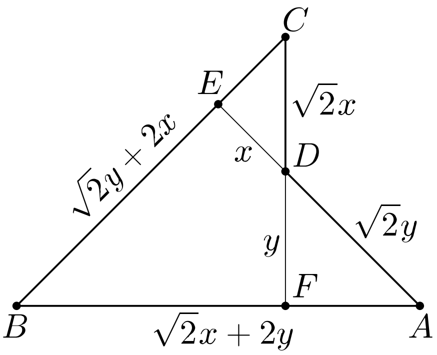

Рис. 1.

Продовжимо сторону AD до перетину з BC в точці E та сторону CD до перетину з AB в точці F. Трикутники ABE, BCF, ADF та CDE є рівнобедреними та прямокутними. Нехай $DE=x$, $DF=y$. Тоді послідовно знаходимо $CD=\sqrt{2}x$, $AD=\sqrt{2}y$, $AE=x+\sqrt{2}y$, $CF=y+\sqrt{2}x$, $AB=\sqrt{2}AE=\sqrt{2}x+2y$, $BC=\sqrt{2}CF=\sqrt{2}y+2x$. Без обмеження загальності $x\le y$. Тоді зрозуміло, що

$$\sqrt{2}x \le \sqrt{2}y < \sqrt{2}y+2x \le \sqrt{2}x+2y.$$

Отже, $\sqrt{2}x=1$, $\sqrt{2}x+2y=3$. Звідси $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=1$, $\sqrt{2}y=\sqrt{2}$ та $\sqrt{2}y+2x=2\sqrt{2}$.

Відповідь: $\sqrt{2}$ см, $2\sqrt{2}$ см.

3. За нерівністю Коші

$$\frac{x^4+y^4}{x^2(x+y)}+\frac{y^4+z^4}{y^2(y+z)}+\frac{z^4+x^4}{z^2(z+x)} \ge 3\sqrt[3]{\frac{(x^4+y^4)(y^4+z^4)(z^4+x^4)}{x^2(x+y)y^2(y+z)z^2(z+x)}},$$

тому достатньо довести, що вираз під коренем не менший за 1.

Оскільки $x, y \ge 1$, то

$$\frac{x^4+y^4}{x+y} \ge \frac{x^3+y^3}{x+y} = x^2-xy+y^2 \ge xy, \quad \text{звідки} \quad \frac{x^4+y^4}{xy(x+y)} \ge 1.$$

Залишається перемножити цю та дві аналогічні нерівності.

Зауваження. Доведемо, що при довільних $x, y, z > 0$ має місце більш сильна нерівність

$$\frac{x^4+y^4}{x^2(x+y)}+\frac{y^4+z^4}{y^2(y+z)}+\frac{z^4+x^4}{z^2(z+x)} \ge x+y+z.$$

Справді, за нерівністю Коші

$$\frac{x^4+y^4}{x^2(x+y)} \ge \frac{2x^2y^2}{x^2(x+y)} = \frac{2y^2}{x+y} \ge \frac{4y^2-(x-y)^2}{2(x+y)} = \frac{(3y-x)(x+y)}{2(x+y)} = \frac{3y-x}{2}.$$

Звідси дістаємо, що ліва частина нерівності, яку слід довести, не менша за

$$\frac{3y-x}{2}+\frac{3z-y}{2}+\frac{3x-z}{2}=x+y+z.$$

4. Оскільки $a \geq 1$, $b \geq 1$, то $c! \geq 2+3+1=6$, тобто $c \geq 3$. Якщо $c=3$, то $a=b=1$. Трійка $(1,1,3)$ задовольняє рівняння. Нехай тепер $c \geq 4$. Тоді $c!$ ділиться на 8. Число 2^a при діленні на 8 дає остачі 0, 2 або 4, а 3^b — остачі 1 або 3. Отже, сума 2^a+3^b+1 ділиться на 8 лише тоді, коли 2^a дає остачу 4, а 3^b дає остачу 3. Звідси $a=2$, але тоді $2^a+3^b+1=3^b+5$ не ділиться на 3, а $c!$ ділиться на 3. Тому рівняння не має розв'язків при $c \geq 4$.

Відповідь: $(1,1,3)$.

5. Проведемо через точку B паралельну до AC пряму, яка перетинає продовження відрізків PN та PK у точках D та E відповідно (рис. 2). За властивістю дотичних $BN=BK$, $CN=CP$ та $AK=AP$. Трикутники BDN та BEK гомотетичні до рівнобедрених трикутників CPN та APK відповідно, тому вони теж є рівнобедреними. Отже, $BD=BN=BK=BE$, звідки PB — медіана трикутника PDE.

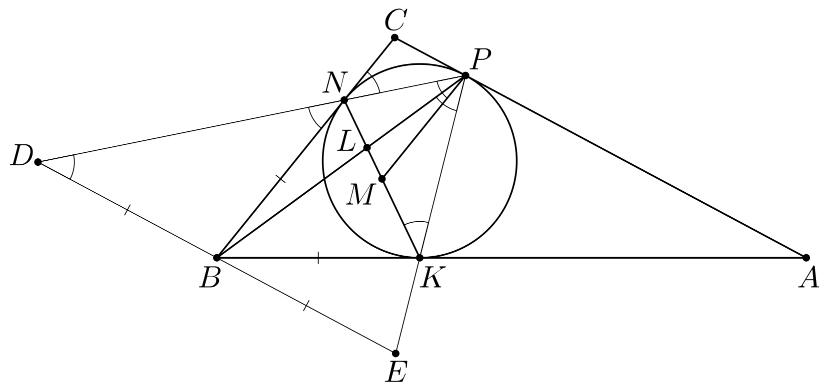

Рис. 2.

Покладемо $\angle PKN=\alpha$. Оскільки за умовою трикутник KLP рівнобедрений, то $\angle KPL=\angle PKL=\alpha$. Також маємо $\angle CNP=\angle PKN=\alpha$ як кут між хордою та дотичною, а отже $\angle BDN=\angle BND=\angle CNP=\alpha$. З доведеного випливає, що трикутники PKN та PDE подібні за двома кутами (кут при вершині P спільний та $\angle PDE=\angle PKN=\alpha$). Оскільки PM, PB — відповідні медіани цих трикутників, то $\angle NPM=\angle EPB=\angle KPL=\alpha$. Отже, $\angle NPM=\angle CNP$, звідки $MP \parallel BC$.

6. При $y=\frac{1}{2}(f(x)+x^{2014})$ дістаємо, що

$$f\left(\tfrac{x^{2014}-f(x)}{2}\right)=f\left(\tfrac{x^{2014}-f(x)}{2}\right)-\tfrac{2013}{2}\big(f(x)+x^{2014}\big)f(x),$$

тобто $(f(x)+x^{2014})f(x)=0,\ x\in\mathbb{R}$. Отже, при кожному $x\in\mathbb{R}$ маємо $f(x)=0$ або $f(x)=-x^{2014}$. Зокрема $f(0)=0$ та $f(x)\leq 0$, $x\in\mathbb{R}$.

Тепер підставимо у вихідне рівняння $y=x^{2014}$, де $x\neq 0$. Дістанемо

$$0\geq f(x^{2014}-f(x))=f(0)-2013\,x^{2014}f(x)=-2013\,x^{2014}f(x)\geq 0,$$

тому $f(x) = 0$ при будь-якому $x \neq 0$. Залишається перевірити, що функція $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, задовольняє умову задачі.

Відповідь: $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

7. Спочатку доведемо, що 58 рядів може не вистачити. Для цього розглянемо випадок, коли із 117 міст прибуло по 17 учнів, а з одного міста — 25 учнів. Тоді в кожному ряді можуть сидіти учні щонайбільше з двох міст, а отже кількість рядів не менша за $118/2 = 59$.

Тепер покажемо, що 59 рядів завжди вистачає. Назвемо делегацією сукупність учнів з одного міста. Будемо розсаджувати делегації в порядку спадання їх чисельності так, що кожна делегація займає ряд з найменшим номером, у якому для неї вистачає місць. Припустимо, що 58 рядів не вистачило. Зрозуміло, що в кожному ряді сидять принаймні дві делегації. Якщо в деякому ряді сидять 33 або менше учнів, то перша делегація, яке там не помістилася, складається принаймні з 18 учнів, а тому в цьому ряді сидять дві не менші делегації, які складаються принаймні з $2 \cdot 18 = 36$ учнів, що неможливо. Отже, в перших 58 рядах сидять принаймні $58 \cdot 34 = 1972$ учнів. Тоді всіх учнів, які залишилися (їх щонайбільше 42), можна посадити в 59-ий ряд.