Розв'язання задач 526 —531

Розділ ведуть Володимир Брайман та Олександр Толесніков

526. Нехай $ABCD$ — опуклий чотирикутник, в якому $AB = AD$. Точка T на діагоналі AC є такою, що $\angle ABT + \angle ADT = \angle BCD$. Довести, що $AT + AC \geq AB + AD$.

Розв'язок. Відмітимо на відрізку AC точку T' так, що $AT' \cdot AC = AB^2$ (рис. 1). Тоді трикутники ABC та $AT'B$ подібні, оскільки вони мають спільний кут A та $AT' : AB = AB : AC$. Звідси $\angle ABT' = \angle ACB$. Аналогічно $\angle ADT' = \angle ADB$, отже

$$\angle ABT' + \angle ADT' = \angle ACB + \angle ADB = \angle BCD.$$

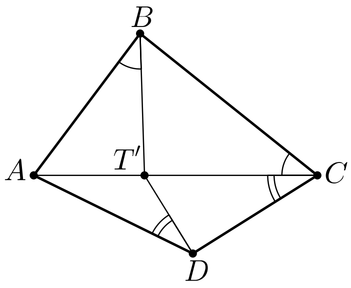


Рис. 1.

Покажемо, що точки T та T' збігаються. Справді, якщо $AT < AT'$, то $\angle ABT < \angle ABT'$ та $\angle ADT < \angle ADT'$, а якщо $AT > AT'$, то $\angle ABT > \angle ABT'$ та $\angle ADT > \angle ADT'$. Отже, рівність з умови задачі можлива лише при $AT = AT'$. Тоді за нерівністю між середніми $AB + AD = 2AB = 2AT \cdot AC \leq AT + AC$.

527. На дошці записано декілька натуральних чисел. За один хід дозволяється обрати записані на дошці числа $a \geq b$ та замінити їх на ab та залишок від ділення a на b. Процес завершується, якщо на дошці з'являється число 0. Чи може процес тривати нескінченно довго?

Розв'язок. Покажемо, що на дошці рано чи пізно з'явиться число 0. Припустимо, що це не завжди так, і нехай k — найменше число таке, що для деяких записаних на дошці k натуральних чисел процес може продовжуватися нескінченно довго без появи числа 0. Нехай $c \geq 1$ — найменше з чисел, які при цьому з'являються на дошці. Без обмеження загальності c записане на дошці з самого початку (якщо це не так, то відкинемо декілька перших кроків та будемо стежити за процесом лише з моменту появи числа c). Але тоді число c не бере участі у жодних операціях. Справді, якщо на деякому кроці обирають числа c та d, то $d \geq c$ та замість чисел c, d на дошці з'являться cd та остача від ділення d на c, менша за c, що суперечить вибору c. Тому всі числа на дошці, крім c, утворюють набір з $k - 1$ натуральних чисел, для яких процес продовжується нескінченно довго без появи числа 0, суперечність.

(Розв'язок автора)

528. Знайти найменше дійсне число x, яке задовольняє всі такі нерівності:

$$[x] < [x^2] < [x^3] < \ldots < [x^n] < [x^{n+1}] < \ldots,$$

де $[x]$ позначає цілу частину числа x.

Розв'язок. Оскільки $[x^3] > [x^2]$, то $x^3 > x^2$, звідки $x > 1$. Тоді $[x] \geq 1$, $[x^2] \geq 2$ та $[x^3] \geq 3$, а отже $x^3 \geq 3$ та $x \geq \sqrt[3]{3}$. Покажемо, що при $x_0 = \sqrt[3]{3}$ виконуються всі нерівності. Неважко перевірити, що $1 < \sqrt[3]{3} < 2$ та $2 < (\sqrt[3]{3}\,)^2 < 3$, тому

$$[x_0] = 1 < [x_0^2] = 2 < [x_0^3] = 3.$$

Доведемо, що $x_0^{n+1}-x_0^n > 1$ при всіх $n \geq 3$. Звідси буде випливати, що $[x_0^{n+1}] \geq [x_0^n]+1$, $n \geq 3$. Справді,

$$x_0^{n+1} - x_0^n = x_0^n(x_0-1) \geq x_0^3(x_0-1) = 3x_0 - 3 > 1,$$

оскільки $x_0^3 = 3 > \frac{64}{27} = \left(\frac{4}{3}\right)^3$, а отже $x_0 > \frac{4}{3}$.

529. Знайти всі дійсні розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1^3 + x_1 + x_2 &= x_1^2 + 3, \\ x_2^3 + x_2 + x_3 &= 2x_2^2 + 5, \\ x_3^3 + x_3 + x_4 &= 3x_3^2 + 7, \\ \dots \quad \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_{2016}^3 + x_{2016} + x_{2017} &= 2016x_{2016}^2 + 4033, \\ x_{2017}^3 + 2\,x_{2017} + x_1 &= 2017x_{2017}^2 + 4035. \end{cases}$$

Розв'язок. Запишемо систему рівнянь у вигляді

$$\begin{cases} (x_1-1)(x_1^2+1) &= 2 - x_2, \\ (x_2-2)(x_2^2+1) &= 3 - x_3, \\ \dots \quad \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \\ (x_{2016}-2016)(x_{2016}^2+1) &= 2017 - x_{2017}, \\ (x_{2017}-2017)(x_{2017}^2+2) &= 1 - x_1. \end{cases}$$

Звідси отримуємо єдиний розв'язок: $x_k = k$, $k = 1, 2, \dots, 2017$. Справді, якщо $x_1 > 1$, то послідовно дістаємо, що $x_2 < 2$, $x_3 > 3$, $\dots$, $x_{2017} > 2017$, $x_1 < 1$, суперечність. Аналогічно приходимо до суперечності при $x_1 < 1$.

Відповідь: $x_k = k$, $k = 1, 2, \dots, 2017$. *(Розв'язок автора)*

530. Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція ($AD \parallel BC$). На сторонах AB та CD відмітили точки K та N так, що $AK = CN$. Відрізок KN перетинає діагоналі AC та BD у точках S та T відповідно. Довести, що описані кола трикутників AKS, BKT, CNS та DNT мають спільну точку.

Розв'язок. Нехай O — центр кола, описаного навколо трапеції $ABCD$ (рис. 2). Трикутник AOB переходить у трикутник COD при повороті з центром O на кут $\angle AOC$, а точка K переходить при цьому повороті у точку N. Тому $OK = ON$ та $\angle KON = \angle AOC = \angle BOD$, а отже рівнобедрені трикутники KON, AOC та BOD подібні. Кути при основах цих трикутників рівні, зокрема $\angle OAS = \angle OKS$. Тому точки O, A, K, S лежать на одному колі, тобто описане коло трикутника AKS проходить через точку O. Аналогічно перевіряється, що описані кола трикутників BKT, CNS та DNT теж проходять через точку O. *(Розв'язок автора)*

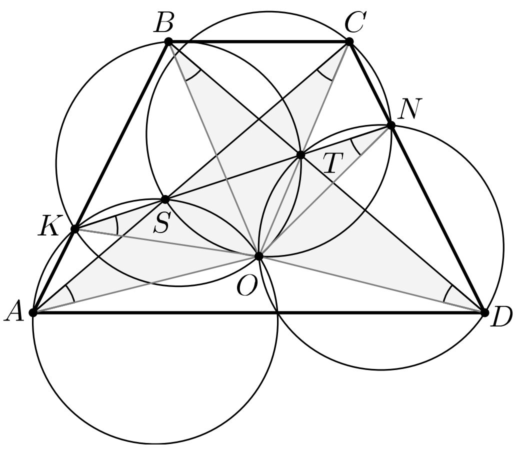
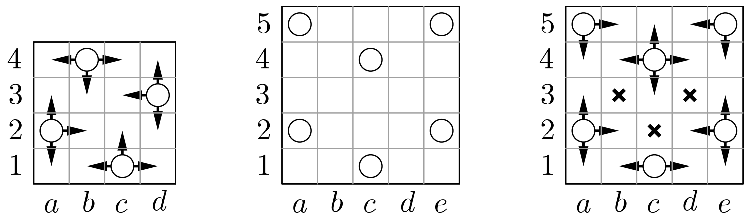


Рис. 2.

531. На кожній клітинці дошки $n \times n$ спить дракон. Двох драконів вважають сусідами, якщо їх клітинки мають спільну сторону. Кожним ходом Мінні будить дракона, в якого є живий сусід, а Макс спрямовує його у бік одного з живих сусідів. Дракон дихає вогнем на цього сусіда та знищує його, а потім знову засинає. Мінні хоче мінімізувати хропіння драконів та залишити найменшу можливу кількість живих драконів. Макс є членом ЛЕПД (Люди за Етичне Поводження з Драконами) та хоче врятувати якнайбільше драконів. Скільки драконів виживуть наприкінці, якщо а) $n = 4$? б) $n = 5$?

Розв'язок. а) Занумеруємо рядки числами $1, 2, 3, 4$ та стовпчики літерами a, b, c, d. Якщо Мінні будить драконів у клітинках $a2$, $b4$, $c1$, $d3$ доти, доки вони не знищать всіх своїх сусідів, то виживуть лише чотири дракони (рис. 3а). Покажемо, що Макс може діяти так, аби вижили принаймні чотири дракони. Нехай він взяв під захист драконів у клітинках $a2$, $b4$, $c1$, $d3$ та ніколи не спрямовує у їх бік інших драконів, якщо у нього є вибір. Якщо деякий дракон під захистом не вижив, то його знищив сусід, у якого на той момент вже не було інших живих сусідів. Тому для кожного дракона під захистом виживає або цей дракон, або той сусід, який його знищив. Оскільки дракони під захистом не є сусідами та не мають спільних сусідів, то виживуть принаймні чотири дракони. Таким чином, якщо обидва гравці дотримуються описаних стратегій, то виживуть рівно чотири дракони.



а) б) в)

Рис. 3.

б) Занумеруємо рядки числами $1, 2, 3, 4, 5$ та стовпчики літерами a, b, c, d, e. Покажемо, що Макс може діяти так, аби вижили принаймні шість драконів. Для цього йому достатньо взяти під захист драконів у клітинках $a2, a5, c1, c4, e2, e5$ (рис. 3б) та ніколи не спрямовувати у їх бік інших драконів, якщо у нього є вибір. Тоді для кожного дракона під захистом виживе або цей дракон, або той сусід, який його знищив, усього не менше за шість драконів. Залишилося показати, що Мінні може забезпечити, що виживуть щонайбільше шість драконів. Нехай вона спочатку тричі розбудить дракона у клітинці $c3$. Тоді з його сусідів виживе лише один. Нехай для визначеності це дракон у клітинці $c4$. Тепер Мінні будить драконів у клітинках $a2, a5, c1, c4, e2, e5$ доти, доки вони не знищать всіх своїх сусідів, та виживають лише шість драконів (рис. 3в). Таким чином, якщо обидва гравці дотримуються описаних стратегій, то виживуть рівно шість драконів. *(Розв'язок авторів)*