# Розв'язання задач 520 —525

*Розділ ведуть Володимир Брайман та Олександр Толесніков*

**520.** Нехай $O$ — центр кола $\omega$, $KA$ та $KB$ — дотичні до $\omega$, $Q$ — довільна точка на хорді $AB$. Пряма $l \perp OQ$ проходить через точку $Q$ та перетинає $KA$, $KB$ в точках $E$, $F$ відповідно. Довести, що $Q$ — середина $EF$.

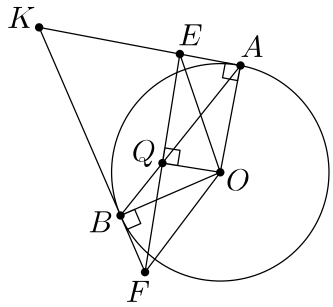


Рис. 1.

*Розв'язок.* Оскільки $\angle FBO = \angle FQO = 90^\circ$ та $\angle OQE = \angle OAE = 90^\circ$, то чотирикутники $FBQO$ та $OQEA$ вписані у кола з діаметрами $OF$ та $OE$ відповідно (рис. 1). Тоді

$$\angle OFQ = \angle OBQ = \angle OAQ = \angle OEQ.$$

Отже, трикутник $OEF$ рівнобедрений та його висота $OQ$ є медіаною. *(Розв'язок автора)*

**521.** Для додатних чисел $a, b, c, x$ довести, що

$$\frac{a^3}{ax^2+2bx+c} + \frac{b^3}{bx^2+2cx+a} + \frac{c^3}{cx^2+2ax+b} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{(x+1)^2}.$$

*Розв'язок.* Доведемо більш загальну нерівність: для додатних чисел $a, b, c, u, v, w$

$$\frac{a^3}{au+bv+cw} + \frac{b^3}{bu+cv+aw} + \frac{c^3}{cu+av+bw} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{u+v+w}.$$

Нерівність з умови задачі дістанемо при $u = x^2, v = 2x, w = 1$.

За нерівністю Коші-Буняковського

$$\Big(\frac{a^3}{au+bv+cw} + \frac{b^3}{bu+cv+aw} + \frac{c^3}{cu+av+bw}\Big) \cdot$$
$$\cdot \big(a(au+bv+cw) + b(bu+cv+aw) + c(cu+av+bw)\big) \geq (a^2+b^2+c^2)^2.$$

Оскільки $a(au+bv+cw) + b(bu+cv+aw) + c(cu+av+bw) =$

$$= (a^2+b^2+c^2)u + (ab+bc+ac)(v+w) \leq (a^2+b^2+c^2)(u+v+w),$$

то

$$\frac{a^3}{au+bv+cw} + \frac{b^3}{bu+cv+aw} + \frac{c^3}{cu+av+bw} \geq$$
$$\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^2+b^2+c^2)(u+v+w)} = \frac{a^2+b^2+c^2}{u+v+w}.$$

**522.** Нехай точка $D$ лежить всередині трикутника $ABC$. Бісектриси кутів $\angle BAC$ та $\angle ACD$ перетинаються в точці $N$. Бісектриса кута $\angle ABD$ та пряма, яка містить бісектрису кута $\angle BDC$, перетинаються в точці $T$. Нехай $Q$ — точка перетину прямих $AB$ та $CD$. Довести, що точки $N, T, Q$ лежать на одній прямій.

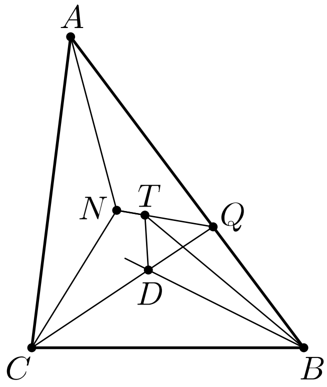

Рис. 2.

*Розв'язок.* Точка $N$ лежить на бісектрисах кутів $\angle CAQ$ та $\angle ACQ$ (рис. 2). Тому $N$ — центр вписаного кола трикутника $CAQ$. Отже, $N$ належить бісектрисі кута $\angle CQA$. Точка $T$ лежить на бісектрисі кута $\angle QBD$ та на бісектрисі зовнішнього кута при вершині $D$ трикутника $BDQ$. Тому $N$ — центр зовнівписаного кола трикутника $BDQ$, яке дотикається до сторони $DQ$. Отже, $T$ належить бісектрисі зовнішнього кута при вершині $Q$ трикутника $BDQ$, тобто $T$ належить бісектрисі кута $\angle CQA$. Таким чином, точки $N, T, Q$ лежать на одній прямій. *(Розв'язок автора)*

**523.** Знайти всі трійки цілих чисел $(a, b, c)$ такі, що число

$$N = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{2} + 2$$

є степенем 2016.

(Степінь 2016 це ціле число вигляду $2016^n$, де $n$ — невід'ємне ціле число.)

*Розв'язок.* Нехай $(a-b)(b-c)(c-a)+4 = 2\cdot 2016^n$. Покладемо $a-b = -x$, $b-c = -y$, $c-a = x+y$ та перепишемо рівняння у вигляді

$$xy(x+y) + 4 = 2 \cdot 2016^n.$$

При $n \geq 1$ права частина ділиться на 9. Тому $xy(x+y)$ має давати остачу 5 при діленні на 9. Отже, $x$, $y$ та $x+y$ не діляться на 3, звідки $x$ та $y$ одночасно дають остачу 1 або 2 при діленні на 3. Якщо $x$ та $y$ дають остачу 2 при діленні на 3, то $xy(x+y)$ дає остачу 1 при діленні на 3 та не може давати остачу 5 при діленні на 9. Якщо $x = 3i+1$, $y = 3j+1$, то

$$\begin{aligned} xy(x+y) =&(3i+1)(3j+1)(3i+3j+2) \equiv (3i+3j+1)(3i+3j+2) = \\ =&9(i+j)^2 + 9(i+j) + 2 \equiv 2 \pmod 9, \end{aligned}$$

тобто $xy(x+y)$ дає остачу 2 при діленні на 9.

При $n = 0$ маємо $xy(x+y) = -2$, звідки $x = -1, y = -1$, або $x = 2, y = -1$, або $x = -1, y = 2$. Відповідно $(a, b, c) = (k+2, k+1, k)$, або $(a, b, c) = (k, k+2, k+1)$, або $(a, b, c) = (k+1, k, k+2)$ при деякому $k \in \mathbb{Z}$.

*Відповідь:* $(a, b, c) \in \{(k+2, k+1, k), (k, k+2, k+1), (k+1, k, k+2),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

**524.** Чи можна розташувати на площині 100 опуклих п'ятикутників так, аби перетин кожних двох з них був семикутником?

*Розв'язок.* Розглянемо вписаний 302-кутник

$$ABC_1C_2\ldots C_{100}D_1D_2\ldots D_{100}E_1E_2\ldots E_{100}.$$

Тоді при довільних $1 \le i < j \le 100$ перетин п'ятикутників $ABC_iD_iE_i$ та $ABC_jD_jE_j$ є семикутником (рис. 3). *(Розв'язок автора)*

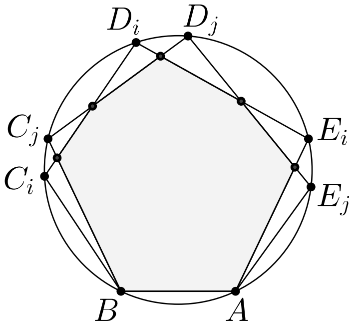


Рис. 3.

**525.** Довести, що

$$\frac{15}{2}\Big(\big(\sqrt{3}+1\big)\sqrt{3-\sqrt{5}}-\big(\sqrt{3}-1\big)\sqrt{5+\sqrt{5}}\Big) < \pi < 60\cdot\frac{\big(\sqrt{3}+1\big)\sqrt{3-\sqrt{5}}-\big(\sqrt{3}-1\big)\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\big(\sqrt{3}+1\big)\sqrt{5+\sqrt{5}}+\big(\sqrt{3}-1\big)\sqrt{3-\sqrt{5}}}.$$

*Розв'язок.* Відомо, що $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$ при всіх $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Отже, $\sin\frac{\pi}{60} < \frac{\pi}{60} < \operatorname{tg}\frac{\pi}{60}$, тобто

$$60\sin\frac{\pi}{60} < \pi < 60\operatorname{tg}\frac{\pi}{60}. \qquad (*)$$

Використаємо рівності

$$\sin 15^\circ = \tfrac14\big(\sqrt{6}-\sqrt{2}\big), \quad \cos 15^\circ = \tfrac14\big(\sqrt{6}+\sqrt{2}\big),$$
$$\sin 18^\circ = \tfrac14\big(\sqrt{5}-1\big), \quad \cos 18^\circ = \tfrac14\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Далі маємо

$$\begin{aligned}\sin\tfrac{\pi}{60} &= \sin 3^\circ = \sin(18^\circ-15^\circ) = \sin 18^\circ\cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ = \\ &= \tfrac14\big(\sqrt{5}-1\big)\cdot\tfrac14\big(\sqrt{6}+\sqrt{2}\big) - \tfrac14\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cdot\tfrac14\big(\sqrt{6}-\sqrt{2}\big) = \\ &= \tfrac{1}{16}\Big(\sqrt{6-2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{2}(\sqrt{3}+1) - \sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)\Big) = \\ &= \tfrac{1}{16}\Big(\sqrt{2}\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot\sqrt{2}(\sqrt{3}+1) - 2\sqrt{5+\sqrt{5}}(\sqrt{3}-1)\Big) = \\ &= \tfrac18\Big((\sqrt{3}+1)\sqrt{3-\sqrt{5}} - (\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}\Big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\tfrac{\pi}{60} &= \cos 3^\circ = \cos(18^\circ-15^\circ) = \cos 18^\circ\cos 15^\circ + \sin 18^\circ \sin 15^\circ = \\ &= \tfrac14\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cdot\tfrac14\big(\sqrt{6}+\sqrt{2}\big) + \tfrac14\big(\sqrt{5}-1\big)\cdot\tfrac14\big(\sqrt{6}-\sqrt{2}\big) = \\ &= \tfrac{1}{16}\Big(2\sqrt{5+\sqrt{5}}\cdot(\sqrt{3}+1) + 2\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot(\sqrt{3}-1)\Big) = \\ &= \tfrac18\Big((\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}} + (\sqrt{3}-1)\sqrt{3-\sqrt{5}}\Big),\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{60} = \frac{\sin\frac{\pi}{60}}{\cos\frac{\pi}{60}} = \frac{\big(\sqrt{3}+1\big)\sqrt{3-\sqrt{5}}-\big(\sqrt{3}-1\big)\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\big(\sqrt{3}+1\big)\sqrt{5+\sqrt{5}}+\big(\sqrt{3}-1\big)\sqrt{3-\sqrt{5}}}.$$

Залишається підставити знайдені значення у нерівність $(*)$. *(Розв'язок автора)*