Розв'язання задач 514 —519

Розділ ведуть Володимир Брайман та Олександр Толесніков

514. Нехай n — натуральне число. Припустимо, що всі його додатні дільники можна розбити на пари таким чином, що сума чисел у кожній парі є простим числом. Довести, що ці прості числа є різними та жодне з них не є дільником n.

Розв'язок. Зрозуміло, що кількість дільників числа n є парною. Нехай n має $2k$ дільників. Якщо $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{2k} = n$ — всі дільники n, записані у порядку зростання, то $n = \frac{n}{d_1} > \frac{n}{d_2} > \ldots > \frac{n}{d_{2k}} = 1$ — всі дільники n, записані у порядку спадання. Отже, добуток усіх дільників дорівнює $d_1 \ldots d_{2k} = \dfrac{n^{2k}}{d_1 \ldots d_{2k}}$, звідки $d_1 \ldots d_{2k} = n^k$. Для розбиття з умови задачі дільники у кожній парі взаємно прості, бо інакше їх сума не буде простою. Тому добуток дільників у кожній парі є дільником n, а отже не перевищує n. Звідси випливає, що добуток всіх дільників не перевищує n^k, причому рівність можлива лише тоді, коли добуток дільників у кожній парі дорівнює n. Отже, всі дільники числа n розбито на пари вигляду $\left(d, \frac{n}{d}\right)$.

Якщо $d + \frac{n}{d} = e + \frac{n}{e}$, то $d^2 e + ne = e^2 d + nd$, $(d-e)(ed-n) = 0$, звідки $e = d$ або $e = \frac{n}{d}$. Отже, для різних пар дільників суми є різними.

Якщо $p = d + \frac{n}{d}$, то $d < p$ та $\frac{n}{d} < p$. Тому жодне з чисел d та $\frac{n}{d}$ не ділиться на просте число p, а отже n не ділиться на p.

515. Довести, що для кожного натурального числа a існують такі цілі числа b, c, що жодне з чисел $\dfrac{ab}{c+1}, \dfrac{bc}{a+1}, \dfrac{ca}{b+1}$ не є цілим, а їх сума є цілою.

Розв'язок. Покладемо $b = c = -2a - 3$. Тоді числа

$$\frac{ab}{c+1} = \frac{ca}{b+1} = \frac{2a^2+3a}{2a+2} = a + \frac{a}{2a+2}, \quad \frac{bc}{a+1} = \frac{4a^2+12a+9}{a+1} = 4a + 8 + \frac{1}{a+1}$$

не є цілими, оскільки $0 < \frac{a}{2a+2} < 1$, $0 < \frac{1}{a+1} < 1$. При цьому

$$\frac{ab}{c+1} + \frac{ca}{b+1} + \frac{bc}{a+1} = 2a + \frac{a}{a+1} + 4a + 8 + \frac{1}{a+1} = 6a + 9.$$

(Розв'язок автора)

516. Нехай BT — висота та H — точка перетину висот трикутника ABC. Точка N симетрична до H відносно BC. Описане коло трикутника ATN перетинає BC в точках F та K. Довести, що $FB = BK$.

Розв'язок. Нехай продовження висоти BT за точку B перетинає описане коло трикутника ATN у точці D (рис. 1). Тоді $\angle DNA = \angle DTA = 90°$. У прямокутному трикутнику DNH серединний перпендикуляр до HN перетинає гіпотенузу HD у точці B. Тому B — центр описаного кола трикутника DNH, а отже B належить серединному перпендикуляру до ND. Але FK та ND — паралельні хорди кола, описаного навколо трикутника ATN. Тому B належить серединному перпендикуляру до FK, тобто B — середина FK. *(Розв'язок автора)*

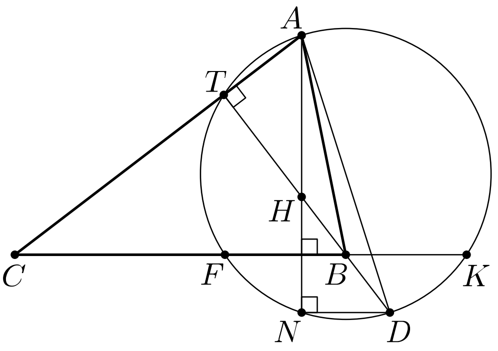

Рис. 1.

517. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що

$$xf(x-y) + yf(x+y) = xf(x) + yf(y)$$

для всіх $x, y \in \mathbb{R}$.

Розв'язок. Якщо функція $f(x)$ задовольняє умову, то при довільному $b \in \mathbb{R}$ функція $f(x)+b$ теж задовольняє умову. Тому без обмеження загальності можна вважати, що $f(0) = 0$. При $y = x$ та при $y = -x$ маємо

$$xf(2x) = 2xf(x), \quad xf(2x) = xf(x) - xf(-x),$$

отже $-xf(-x) = xf(x)$. Підставимо $-y$ замість y у вихідне рівняння. Дістанемо

$$xf(x+y) - yf(x-y) = xf(x) - yf(-y) = xf(x) + yf(y) = xf(x-y) + yf(x+y),$$

звідки $(x-y)f(x+y) = (x+y)f(x-y)$. Тепер для довільного $t \in \mathbb{R}$ при $x = \frac{t+1}{2}$, $y = \frac{t-1}{2}$ маємо $f(t) = tf(1)$. Покладемо $f(1) = a$. Тоді $f(x) = ax$. Неважко перевірити, що ця функція задовольняє умову при будь-якому $a \in \mathbb{R}$. Тому функція $f(x) = ax + b$ задовольняє умову при будь-яких $a, b \in \mathbb{R}$.

Відповідь: $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. *(Розв'язок автора)*

518. Нехай n, k — такі натуральні числа, що $n \geq 2$ та $k \geq \frac{5}{2}n - 1$. Довести, що для будь-яких k точок з цілими координатами від 1 до n включно існує коло, яке проходить принаймні через чотири з цих точок.

Розв'язок. Покажемо, що якщо на площині обрано T точок зі спільною ординатою та до кожного відрізка з кінцями в цих точках проведено серединний перпендикуляр, то серед цих перпендикулярів є принаймні $2T-3$ різних. Справді, якщо точки мають абсциси $a_1 < a_2 < \cdots < a_T$, то

$$\tfrac{a_1+a_2}{2} < \tfrac{a_1+a_3}{2} < \ldots < \tfrac{a_1+a_T}{2} < \tfrac{a_2+a_T}{2} < \ldots < \tfrac{a_{T-1}+a_T}{2},$$

а отже $x = \frac{a_1+a_2}{2}$, $x = \frac{a_1+a_3}{2}$, $\ldots$, $x = \frac{a_1+a_T}{2}$, $x = \frac{a_2+a_T}{2}$, $\ldots$, $x = \frac{a_{T-1}+a_T}{2}$ — різні серединні перпендикуляри.

Назвемо k точок, про які йдеться в умові задачі, відміченими. Для $1 \leq i \leq n$ позначимо d_i кількість відмічених точок з ординатою i та x_i кількість різних серединних перпендикулярів до відрізків з кінцями в цих точках. Тоді $x_i \geq 2d_i - 3$, а оскільки $d_1 + \ldots + d_n = k \geq \frac{5}{2}n - 1$, то $x_1 + \ldots + x_n \geq 2(\frac{5}{2}n - 1) - 3n = 2n - 2$. Але існує лише $2n - 3$ серединних перпендикулярів до відрізків, кінці яких мають цілі абсциси від 1 до n та спільну ординату (а саме, $x = \frac{3}{2}$, $x = 2$, $\ldots$, $x = \frac{2n-1}{2}$). Тому знайдеться серединний перпендикуляр, який є спільним для деякого відрізка з кінцями у відмічених точках з ординатою j_1 та деякого відрізка з кінцями у відмічених точках з ординатою j_2, де $j_1 \neq j_2$. Кінці цих відрізків є вершинами рівнобічної трапеції або прямокутника, а отже лежать на одному колі.

519. Чи існує 6-значне число $\overline{a_1 a_2 \ldots a_6}$ таке, що сума кубів

$$\overline{a_1 a_2 \ldots a_6}^3 + \overline{a_6 \ldots a_2 a_1}^3$$

закінчується на 6 нулів?

Розв'язок. Покажемо, що шуканим є, наприклад, число $\overline{a_1 a_2 \ldots a_6} = 520175$. Справді, кожне з чисел 520175 та 571025 ділиться на 25, тому сума кубів цих чисел ділиться на $25^3 = 5^6$. Сума $520175 + 571025 = 1091200$ ділиться на 1600, а отже і на 2^6, тому $520175^3 + 571025^3$ ділиться на $5^6 \cdot 2^6 = 10^6$. *(Розв'язок автора)*