Розв'язання задач 508 —513

Розділ ведуть Володимир Брайман та Олександр Толесніков

508. Кола ω_1 та ω_2 перетинаються в точках A та B. На колі ω_1 відмітили точки D, H, а на колі ω_2 відмітили точки E, G так, що точки D, A, E лежать на одній прямій, DG — дотична до ω_2 та EH — дотична до ω_1. Довести, що відрізки DE, DG та EH є сторонами прямокутного трикутника.

Розв'язок. Оскільки DE та DG — січна та дотична до ω_2 (рис. 1), то $DE \cdot DA = DG^2$. Аналогічно ED та EH — січна та дотична до ω_1, тому $ED \cdot EA = EH^2$. Звідси

$$DG^2 + EH^2 = \\ = DE(DA + EA) = DE^2.$$

(Розв'язок автора)

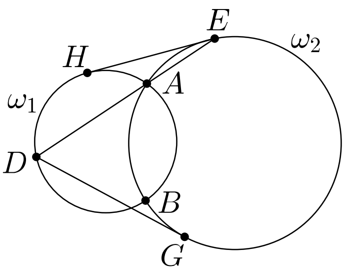

Рис. 1.

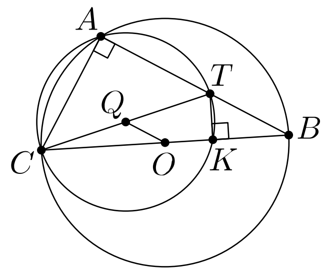

Рис. 2.

509. На хорді AB кола з центром O взяли точку T. Нехай K — основа перпендикуляра, опущеного з точки T на OB, Q — центр кола, описаного навколо трикутника ATK. Довести, що $OQ \parallel AB$.

Розв'язок. Нехай BC — діаметр кола з центром O (рис. 2). Оскільки $\angle CAT = \angle CKT = 90°$, то трикутник ATK є вписаним у коло з діаметром TC. Тому Q — середина TC та OQ — середня лінія трикутника BCT, звідки $OQ \parallel AB$.

(Розв'язок автора)

510. Нехай функцію $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ задано таким чином: якщо $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ — розклад числа n на прості множники, то $f(n)$ дорівнює кількості $i \le k$, для яких $\alpha_i = 1$ (наприклад, $f(2016) = f(2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^1) = 1$, $f(100) = f(2^2 \cdot 5^2) = 0$). Чи для кожного натурального числа N знайдеться множина з N послідовних натуральних чисел така, що для кожного числа n з цієї множини $f(n) = 2016$?

Розв'язок. Нехай $p_1, p_2, \dots, p_{2017}$ — попарно різні прості числа та $N = p_1^2 p_2^2 \dots p_{2017}^2$. Будь-яка множина з N послідовних натуральних чисел містить деяке число a, що ділиться на N, та містить принаймні одне з чисел

$$b = a - p_1 p_2 \dots p_{2017}, \quad c = a + p_1 p_2 \dots p_{2017}.$$

Але числа b та c діляться на p_i та не діляться на p_i^2 при кожному $1 \le i \le 2017$, тому $f(b) \ge 2017$ та $f(c) \ge 2017$. Отже, жодна множина з N послідовних натуральних чисел не задовольняє умову.

511. Шестикутна дошка на рис. 3 покрита плитками, які не перекриваються. Кожна плитка складається з двох шестикутних клітинок та має одну з трьох можливих орієнтацій. Довести, що плиток кожної орієнтації парна кількість.

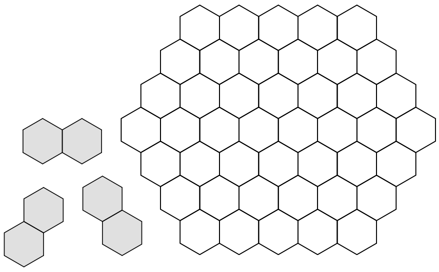

Рис. 3.

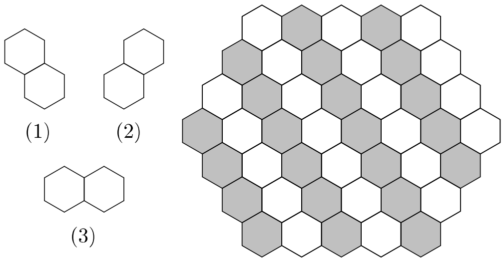

Рис. 4.

Розв'язок. Розфарбуємо клітинки дошки двома кольорами як показано на рис. 4. Плитки орієнтації (1) завжди покривають або дві білі, або дві чорні клітинки, а плитки двох інших орієнтацій — білу та чорну клітинки. Оскільки на дошці є однакова кількість білих та чорних клітинок, то для покриття використано однакову кількість плиток, що покривають дві білі клітинки та плиток, що покривають дві чорні клітинки. Отже, кількість плиток орієнтації (1) є парною. Аналогічно доводиться, що парною є кількість плиток орієнтації (2). Але загальна кількість плиток на дошці парна, тому кількість плиток орієнтації (3) теж є парною. *(Розв'язок автора)*

512. Для довільних $a, b, c > 0$ довести нерівність

$$ab\left(1-\frac{c^2}{(a+b)^2}\right)+bc\left(1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right)+ca\left(1-\frac{b^2}{(c+a)^2}\right)\leq\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

Розв'язок. Перепишемо нерівність у рівносильному вигляді

$$\frac{abc^2}{(a+b)^2}+\frac{bca^2}{(b+c)^2}+\frac{cab^2}{(c+a)^2}+\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)\geq ab+bc+ca.$$

Маємо

$$\frac{abc^2}{(a+b)^2}+\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)\geq\frac{abc^2}{2(a^2+b^2)}+\frac{c^2}{4}+\frac{1}{4}(a^2+b^2)=$$
$$=\frac{(a+b)^2c^2}{4(a^2+b^2)}+\frac{1}{4}(a^2+b^2)\geq\frac{1}{2}(a+b)c=\frac{1}{2}(ca+bc).$$

Залишається додати цю та ще дві аналогічні нерівності. *(Розв'язок автора)*

513. Елісон впорядкувала список з 20 хокейних команд за її уявленнями про їх силу, але відмовляється повідомляти його. Коли Бенджамін називає три команди, вона обирає сказати йому, яка з цих трьох команд на її думку найслабша чи яка з цих трьох команд на її думку найсильніша. Бенджамін може робити це скільки завгодно разів. Визначити найбільше N, при якому Бенджамін гарантовано зможе знайти команди $T_1, T_2, \ldots, T_N$, про які йому відомо, що на думку Елісон команда T_i сильніша за T_{i+1} при всіх $1 \leq i < N$.

Розв'язок. Покажемо, що Бенджамін може знайти 10 команд. Нехай Елісон відповіла на запитання про всі можливі трійки команд. Розглянемо граф, вершинами якого є команди, причому вершини з'єднані ребром, якщо Бенджамін не може встановити, яка з команд сильніша. Покажемо, що з кожної вершини виходить щонайбільше одне ребро. Справді, нехай вершина A з'єднана ребрами з вершинами B та C. Але Елісон повідомила, яка з команд A, B, C є найсильнішою або найслабшою, тому між вершинами A, B, C є щонайбільше одне ребро, суперечність. Оскільки з кожної вершини виходить щонайбільше одне ребро, то кожна компонента зв'язності графа складається щонайбільше з двох вершин. Тому компонент зв'язності принаймні 10 та Бенджамін може обрати по одній команді з кожної компоненти. Про кожні дві з обраних команд він знає, яка з них сильніша, тобто ці команди є шуканими.

Покажемо, що Елісон може діяти так, аби Бенджамін не зміг знайти 11 команд. Справді, нехай $S_1, S_2, \ldots, S_{20}$ — список команд, який склала Елісон (тут команда S_i сильніша за S_{i+1} при $1 \leq i < 20$). Розглянемо пари команд S_{2j-1}, S_{2j}, $1 \leq j \leq 10$. Якщо дві команди з трійки утворюють пару, Елісон повідомить, найсильнішою чи найслабшою у трійці є команда, яка не входить у пару. Якщо ж жодні дві команди з трійки не утворюють пару, Елісон назве найсильнішу команду в трійці. Тоді для кожної пари команд S_{2j-1}, S_{2j} Бенджамін не зможе встановити, яка з них сильніша. Тому серед команд $T_1, T_2, \ldots, T_N$ буде щонайбільше по одній команді з кожної пари, а отже $N \leq 10$.

Відповідь: 10.