Розв'язання задач 502 —507

Розділ ведуть Володимир Брайман та Олександр Толесніков

502. Позначимо $P(n)$ найбільший простий дільник числа n. Знайти всі цілі числа $n \geq 2$, для яких
$$P(n) + \left[\sqrt{n}\,\right] = P(n+1) + \left[\sqrt{n+1}\,\right]$$
(тут $[x]$ позначає цілу частину числа x.)

Розв'язок. Числа n та $n+1$ не мають спільних простих дільників, тому $P(n) \neq P(n+1)$, а отже $\left[\sqrt{n}\,\right] \neq \left[\sqrt{n+1}\,\right]$. Звідси $n+1$ — точний квадрат, $\left[\sqrt{n+1}\,\right] = \left[\sqrt{n}\,\right]+1$ та $P(n) = P(n+1)+1$. Але $P(n)$ та $P(n+1)$ — прості числа, тому остання рівність можлива лише при $P(n) = 3$ та $P(n+1) = 2$.

Таким чином, $n = 3^a$ та $n+1 = 2^b$, де $a, b \in \mathbb{N}$. Число $2^b = 3^a + 1$ дає остачу 1 при діленні на 3, звідки b парне. Покладемо $b = 2c$. Тоді $3^a = 2^{2c} - 1 = (2^b - 1)(2^b + 1)$. Числа $2^c - 1$ та $2^c + 1$ не можуть одночасно ділитися на 3, тому $2^c - 1 = 1$, $c = 1$ та $n = 3$. Залишається зробити перевірку.

Відповідь: $n = 3$.

503. У трикутнику ABC точка перетину висот H, центр описаного кола O та центр зовнівписаного кола I_a лежать на одній прямій. Чи обов'язково трикутник ABC рівнобедрений?

Розв'язок. Покажемо, що I_a лежить на бісектрисі зовнішнього кута при вершині B трикутника OHB. Справді, якщо трикутник ABC гострокутний (рис. 1), то $\angle ABO = \angle HBC = 90^\circ - \angle ACB$, тому бісектриси кутів $\angle ABC$ та $\angle OBH$ збігаються, а отже і бісектриси зовнішніх кутів при вершині B трикутників ABC та OHB збігаються. Випадки, коли трикутник ABC не є гострокутним, розглядаються аналогічно.

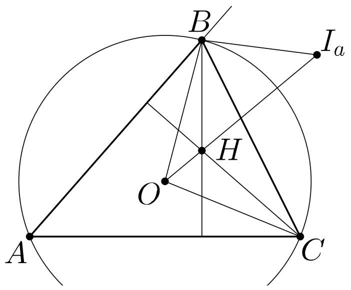

Рис. 1.

За властивістю бісектриси зовнішнього кута трикутника $I_aH : I_aO = BH : BO$. Аналогічно I_a лежить на бісектрисі зовнішнього кута при вершині C трикутника OHC, звідки $I_aH : I_aO = CH : CO$. Оскільки $BO = CO$ як радіуси, то звідси $BH = CH$. Тому H належить серединному перпендикуляру до BC, тобто AH — серединний перпендикуляр до BC, а отже $AB = AC$. *(Розв'язок автора)*

504. Три їжачки знаходились у вершинах правильного трикутника зі стороною 100 м. Потім один їжачок пройшов вздовж прямої 1 м, другий 2 м, третій 3 м (можливо, вздовж різних прямих). Чи можуть їжачки опинитись у вершинах

а) правильного трикутника?

б) правильного трикутника зі стороною 100 м?

Розв'язок. Покажемо, що потрібне пересування їжачків можливе, одразу для пункту б). Нехай спочатку їжачки знаходилися у точках A, B, C, а потім у точках A', B', C' відповідно. Якщо трикутник $A'B'C'$ є образом трикутника ABC при повороті на деякий кут навколо точки D, то ці трикутники рівні та $AA' : BB' : CC' = AD : BD : CD$.

Тому достатньо знайти точку D, для якої $AD : BD : CD = 1 : 2 : 3$, та вибрати кут повороту так, щоб основа AA' рівнобедреного трикутника $AA'D$ дорівнювала 1 м (це можливо, якщо $AD > 0{,}5$ м).

Нехай D — точка, для якої $AD : BD : CD = 1 : 2 : 3$, а при повороті навколо точки A на 60° трикутник ABD переходить у трикутник ACE (рис. 2). Тоді $CE = BD$, а оскільки трикутник ADE рівносторонній, то $ED = AD$. Отже, $CD = BD + AD = CE + ED$, звідки точка E належить відрізку CD. Тому $\angle ADC = \angle ADE = 60^\circ$ та $\angle ADB = \angle AEC = 180^\circ - \angle AED = 120^\circ$. Таким чином, з шуканої точки D сторони трикутника ABC має бути видно під кутами 60°, 60° та 120° відповідно. Якщо $AD = d$, $BD = 2d$, $CD = 3d$, $\angle ADC = \angle CDB = 60^\circ$ та $ADB = 120^\circ$, то за теоремою косинусів дістаємо, що $AB = BC = AC = \sqrt{7}d$. Звідси випливає, що існує точка D, відстані від якої до вершин трикутника ABC дорівнюють $\frac{100}{\sqrt{7}}$ м, $\frac{200}{\sqrt{7}}$ м та $\frac{300}{\sqrt{7}}$ м відповідно, та ця точка є шуканою.

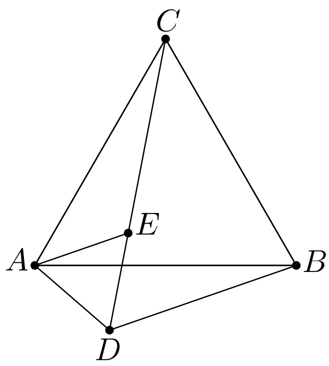

Рис. 2.

(Розв'язок автора)

505. Довести, що для будь-яких дійсних чисел x та y

$$(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1) \geq 2(x + y)(x - 1)(y - 1).$$

При яких x та y досягається рівність?

Розв'язок. Зафіксуємо y та розглянемо нерівність як квадратну відносно x:

$$(y^2 - 3y + 3)x^2 - (3y^2 - 5y + 3)x + (3y^2 - 3y + 1) \geq 0.$$

Старший коефіцієнт дорівнює $y^2 - 3y + 3 = \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, тому нерівність є правильною при всіх дійсних x тоді й лише тоді, коли дискримінант не є додатним. Залишається зауважити, що

$$\begin{aligned} D =& (3y^2 - 5y + 3)^2 - 4(y^2 - 3y + 3)(3y^2 - 3y + 1) = \\ =& -3y^4 + 18y^3 - 33y^2 + 18y - 3 = -3\left(y^2 - 3y + 1\right)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

при всіх дійсних y.

Рівність досягається, якщо $D = 0$, тобто $y^2 - 3y + 1 = 0$, та x є єдиним коренем квадратного рівняння

$$(y^2 - 3y + 3)x^2 - (3y^2 - 5y + 3)x + (3y^2 - 3y + 1) = 0.$$

При $y^2 + 1 = 3y$ маємо $y^2 - 3y + 3 = 2$, $3y^2 - 5y + 3 = 4y$ та $3y^2 - 3y + 1 = 2y^2$, тому квадратне рівняння набуває вигляду $2x^2 - 4xy + 2y^2 = 0$, або $2(x - y)^2 = 0$, звідки $x = y$. Таким чином, рівність досягається тоді й лише тоді, коли $x = y = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

(Розв'язок автора)

506. Нехай $n > 2$ — ціле число. Колода містить $\frac{n(n-1)}{2}$ карт, занумерованих числами

$$1, 2, 3, \ldots, \frac{n(n-1)}{2}.$$

Дві карти утворюють *магічну пару*, якщо числа на них є послідовними або числа на них це 1 та $\frac{n(n-1)}{2}$. Для яких n можна розкласти карти у n купок так, аби серед карток з будь-яких двох купок знайшлася рівно одна магічна пара?

Розв'язок. Зауважимо, що жодна купка не може містити магічну пару. Справді, нехай у деякій купці є карти з номерами i та $i+1$ (тут і далі номери карт розглядаються за модулем $\frac{n(n-1)}{2}$). Тоді у цій купці та купці, в якій знаходиться карта з номером $i+2$, (можливо, це та сама купка) містяться принаймні дві магічні пари, суперечність.

Нехай n парне. Кожна карта входить у дві магічні пари, а кожна купка має містити карти, які утворюють магічні пари з деякими картами з інших $n-1$ купок. Тому кожна купка містить не менше за $\frac{n-1}{2}$, а отже принаймні $\frac{n}{2}$ карт. Але тоді всі купки разом містять принаймні $\frac{n^2}{2} > \frac{n(n-1)}{2}$ карт, суперечність.

Тепер розглянемо довільне непарне $n = 2k+1 \geq 3$ та покажемо, що карти можна розкласти у n купок потрібним чином. Використаємо індукцію за $k \geq 1$. База індукції є очевидною: при $n = 3$ карти з номерами 1, 2, 3 можна покласти по одній у три купки. Нехай тепер при $n = 2k-1$ карти з номерами $1, 2, 3, \ldots, (2k-1)(k-1)$ розкладено в $2k-1$ купок. Без обмеження загальності карта з номером 1 знаходиться у купці з номером 1, а карта з номером $(2k-1)(k-1)$ — у купці з номером $2k-1$. При $n = 2k+1$ розкладемо карти з номерами від 1 до $(2k-1)(k-1)$ так само, як при $n = 2k-1$, а карти з номерами від $(2k-1)(k-1)+1$ до $(2k+1)k$ — у купки з номерами

$$1,\ 2k,\ 2,\ 2k+1,\ 3,\ 2k,\ 4,\ 2k+1,\ \ldots,\ 2k-2,\ 2k+1,\ 2k-1,\ 2k,\ 2k+1$$

відповідно. Неважко перевірити, що тоді будь-які купки разом містять рівно одну магічну пару.

Відповідь: для всіх непарних $n \geq 3$.

507. Кожну точку площини пофарбовано в один з чотирьох кольорів. Довести, що існує квадрат зі стороною 1 на цій площині, який має принаймні дві вершини одного кольору.

Розв'язок. Припустимо, що існує розфарбування площини, при якому вершини кожного квадрата зі стороною 1 мають чотири різні кольори. Тоді будь-які точки, відстань між якими дорівнює 1 або $\sqrt{2}$, мають різні кольори.

Покажемо, що якщо ABC — рівнобедрений трикутник, в якому $AC = 1$ та $\angle BAC = \angle BCA = 15^\circ$, то колір вершини B є таким самим, як колір A або C. Справді, розглянемо квадрат $ADEC$ та рівносторонній трикутник DEB' зі стороною 1 розташовані так, що точки B та B' знаходяться всередині квадрата (рис. 3). Тоді ADB' та $B'EC$ — рівнобедрені трикутники з кутом $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ при вершині, а отже з кутом 75° при основі.

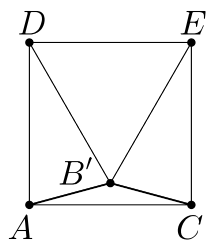

Рис. 3.

Звідси $\angle B'AC = \angle B'CA = 90° - 75° = 15°$, тобто точки B та B' збігаються. Але точки A, D, E, C мають чотири різні кольори, а колір точки $B' = B$ відрізняється від кольорів точок D та E. Тому цей колір є таким, як колір A або C.

Тепер доведемо, що будь-які дві точки на відстані 2 мають однаковий колір. Для цього розглянемо правильний дванадцятикутник $A_0A_1 \ldots A_{11}$, у якому дані точки є вершинами A_0 та A_6 (рис. 4). Нехай O — центр цього многокутника. Радіус кола, описаного навколо многокутника, дорівнює 1, тому $OA_i = 1$, $A_iA_{i+2} = 1$, $A_iA_{i+3} = \sqrt{2}$ при $0 \leq i \leq 11$ (тут і далі номери вершин розглядаються за модулем 12). У рівнобедреному трикутнику $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ основа дорівнює 1 та кут при основі дорівнює $15°$, тому за доведеним вище колір вершини A_i є таким самим, як колір A_{i-1} або A_{i+1}. Зокрема колір A_0 є таким самим, як колір A_1 або A_{11}. Без обмеження загальності кольори A_0 та A_1 однакові. Занумеруємо кольори числами 1,2,3,4 так, що A_0 та A_1 мають колір 1, A_2 має колір 2 та O має колір 4. Тоді A_3 теж має колір 2. Колір A_4 відрізняється від кольорів A_1, A_2 та O, тому A_4 має колір 3, а отже A_5 теж має колір 3. Нарешті, колір A_6 відрізняється від кольорів A_3, A_4 та O, тому A_6 має колір 1, тобто A_0 та A_6 мають однаковий колір.

Таким чином, якщо X, Y, Z — такі точки на площині, що $XY = XZ = 2$ та $YZ = 1$, то колір точок Y, Z є таким самим, як колір точки X, тобто існують точки на відстані 1, які мають спільний колір, суперечність. *(Розв'язок авторів)*

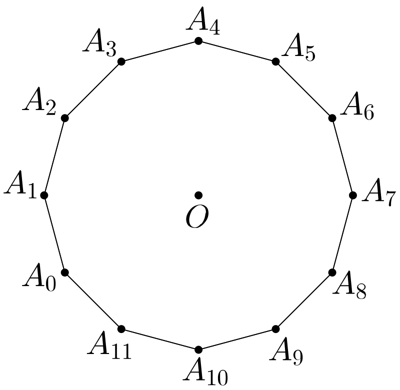

Рис. 4.