Розв'язання задач 496 —501

Розділ ведуть Володимир Брайман та Олександр Толесніков

496. Точка T симетрична центру квадрата $ABCD$ відносно точки A. Відновити квадрат за відомими точками B та T.

Розв'язок. Нехай O — центр квадрата, E — точка перетину прямої AD з відрізком AT (рис. 1). Точки A та O ділять відрізок TC на три рівні частини та $AE \parallel BC$, тому $TE : EB = 1 : 2$ та точку E можна побудувати. Оскільки $\angle TAE = 45°$ та $\angle EAB = 90°$, то вершину A можна знайти як точку перетину побудованих на TE та EB сегментів, які вміщують кути $45°$ та $90°$ відповідно. Подальша побудова є очевидною.

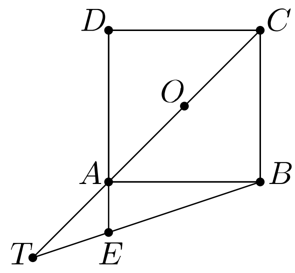

Рис. 1.

(Розв'язок автора)

497. Знайти всі прості числа a, b, c та натуральні числа k, які задовольняють рівняння
$$a^2 + b^2 + 16c^2 = 9k^2 + 1.$$

Розв'язок. Помітимо, що права частина рівняння дає остачу 1 при діленні на 3. З іншого боку, $a^2 + b^2 + 16c^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 \pmod 3$. Тому $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 1 \pmod 3$.

Квадрат натурального числа може давати при діленні на 3 тільки остачі 0 та 1. Отже, сума трьох квадратів натуральних чисел може давати остачу 1 при діленні на 3 тоді й лише тоді, коли два з трьох чисел діляться на 3. Єдине просте число, яке ділиться на 3, — це саме число 3. Тому два з чисел a, b, c дорівнюють 3. Помітимо, що вихідне рівняння симетричне відносно чисел a та b. Тому достатньо розібрати два випадки: $a = b = 3$ та $b = c = 3$.

1) нехай $a = b = 3$. У цьому випадку вихідне рівняння набуває вигляду
$$18 + 16c^2 = 9k^2 + 1, \quad 9k^2 - 16c^2 = 17, \quad (3k - 4c)(3k + 4c) = 17.$$
Оскільки 17 — просте число, воно єдиним чином подається у вигляді добутку натуральних множників: $17 = 1 \cdot 17$. Але $3k - 4c < 3k + 4c$, тому $3k - 4c = 1$ та $3k + 4c = 17$. Звідси $k = 3$, $c = 2$. Таким чином, ми дістали четвірку чисел $(3, 3, 2, 3)$, яка задовольняє умову.

2) нехай тепер $b = c = 3$. Тоді вихідне рівняння має вигляд
$$a^2 + 153 = 9k^2 + 1, \quad 9k^2 - a^2 = 152, \quad (3k - a)(3k + a) = 152.$$
Число 152 розкладається на прості множники таким чином: $152 = 2^3 \cdot 19$. Помітимо, що $3k - a < 3k + a$ і, крім того, числа $3k - a$ і $3k + a$ однієї парності. Тому можливі два випадки:
$$\begin{cases} 3k - a = 2, \\ 3k + a = 76 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 3k - a = 4, \\ 3k + a = 38. \end{cases}$$

З першої системи знаходимо $a = 37$, $k = 13$ і дістаємо дві четвірки, які задовольняють умову: $(37, 3, 3, 13)$ та $(3, 37, 3, 13)$. З другої системи знаходимо $a = 17$, $k = 7$, звідки дістаємо такі четвірки: $(17, 3, 3, 7)$, $(3, 17, 3, 7)$.

Відповідь: $(3, 3, 2, 3)$, $(37, 3, 3, 13)$, $(3, 37, 3, 13)$, $(17, 3, 3, 7)$, $(3, 17, 3, 7)$.

498. Бісектриса кута $\angle A$ трикутника ABC перетинає описане коло у точці W. Пряма $l \parallel AC$ проходить через точку W і перетинає AB та BC у точках P та K відповідно. Відомо, що $AK = CP$. Довести, що $BP = KW$.

Розв'язок. Оскільки діагоналі трапеції $ACKP$ рівні, то ця трапеція рівнобічна. Позначимо $\angle BCA = \angle CAB = \alpha$ (рис. 2). Тоді $\angle BKP = \angle BPK = \alpha$, трикутник BPK рівнобедрений та $BP = BK$. Далі,

$$\angle KBW = \angle CBW = \angle CAW = \tfrac{\alpha}{2}$$

та

$$\angle KWB = \angle BKP - \angle KBW = \tfrac{\alpha}{2} = \angle KBW.$$

Тому трикутник BKW теж рівнобедрений та $KW = BK = BP$.

(Розв'язок автора)

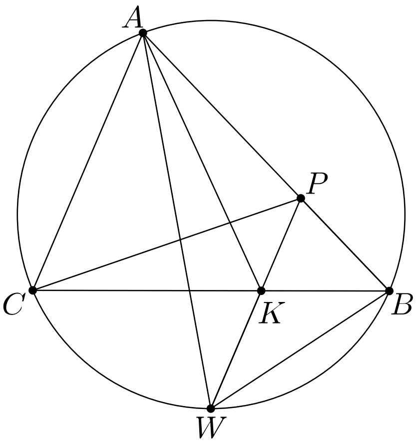

Рис. 2.

499. Знайти всі сюр'єктивні функції $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такі, що для будь-яких натуральних чисел a та b виконується рівно одна з таких рівностей:

$$f(a) = f(b),$$
$$f(a + b) = \min\{f(a), f(b)\}.$$

(Функція $f : X \to Y$ називається сюр'єктивною, якщо для кожного $y \in Y$ існує $x \in X$ такий, що $f(x) = y$.)

Розв'язок. При $a = b$ дістаємо, що $f(2a) \neq \min\{f(a), f(a)\} = f(a)$ при всіх $a \in \mathbb{N}$, зокрема $f(4a) \neq f(2a)$, $a \in \mathbb{N}$. Доведемо, що $f(2a) > f(a)$ при всіх $a \in \mathbb{N}$. Припустимо, що існує таке число a_*, що $f(2a_*) < f(a_*)$. Тоді

$$f(3a_*) = \min\{f(a_*), f(2a_*)\} = f(2a_*) < f(a_*),$$

звідки

$$f(4a_*) = \min\{f(a_*), f(3a_*)\} = f(3a_*) = f(2a_*),$$

суперечність.

Тепер покажемо індукцією за l, що $f(la) = f(a)$ при всіх $a \in \mathbb{N}$ та при всіх непарних $l \in \mathbb{N}$. Справді, база індукції є очевидною, а якщо $f\big((l-2)a\big) = f(a) < f(2a)$, то

$$f(la) = \min\big\{f\big((l-2)a\big), f\big(2a\big)\big\} = \min\{f(a), f(2a)\} = f(a).$$

Таким чином, якщо $n = 2^k l$, де l непарне та $k \geq 0$, то $f(n) = f\big(2^k\big)$. Отже, кожне значення функції f дорівнює одному з чисел $f(1), f(2), f(4), \ldots, f\big(2^k\big), \ldots$ Оскільки

$$f(1) < f(2) < f(4) < \ldots < f\big(2^k\big) < \ldots$$

та f має набувати всі натуральні значення, то $f(2^k) = k+1$, $k \geq 0$, а тому $f(2^k l) = k+1$ при всіх непарних l та $k \geq 0$. Залишається перевірити, що знайдена функція задовольняє умову задачі.

Відповідь: якщо $n = 2^k l$, де l непарне та $k \geq 0$, то $f(n) = k+1$.

500. На стороні BC гострокутного трикутника ABC взято довільну точку D. Серединний перпендикуляр до відрізка BD перетинає AB в точці X, а серединний перпендикуляр до відрізка DC перетинає AC в точці Y. Описане коло трикутника DXY перетинає вдруге сторону BC в точці Z. Довести, що ортоцентр трикутника XYZ не залежить від вибору точки D.

Розв'язок. Доведемо, що ортоцентр H трикутника XYZ є центром описаного кола трикутника ABC.

Спочатку покажемо, що трикутники XYZ та CBA подібні. Справді, оскільки $BX = XD$, $CY = YD$, а точки X, Y, Z та D лежать на одному колі, то (рис. 3) $\angle XYZ = \angle XDB = \angle B$ та $\angle YXZ = \angle YDC = \angle C$.

Оскільки H — ортоцентр трикутника XYZ, то $\angle XHY = 180° - \angle XZY = 180° - \angle A$. Тому чотирикутник $AXHY$ вписаний. Аналогічно чотирикутники $BXHZ$ та $CYHZ$ вписані. Звідси

$$\angle HBZ = \angle HXZ = 90° - \angle XZY = \angle HYZ = \angle HCZ.$$

Отже, трикутник BHC рівнобедрений. Аналогічно доводиться, що трикутник AHB рівнобедрений. Таким чином, $AH = BH = CH$, тобто H — центр описаного кола трикутника ABC. *(Розв'язок автора)*

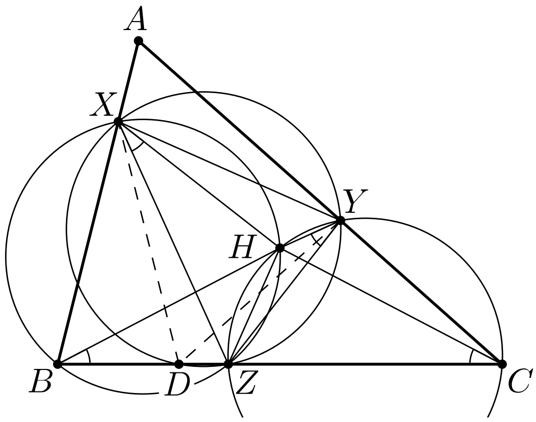

Рис. 3.

501. На шахівниці розміру $n \times n$ сидять муха та два павуки. Кожним ходом муха може переповзти у клітинку, яка має спільну вершину з клітинкою, де вона знаходиться (вона також може залишитися на місці). Кожним ходом павуків кожен павук може переміститися у клітинку, яка має спільну сторону з клітинкою, де він знаходиться (він також може залишитися на місці). Якщо павук та муха опинилися в одній клітинці, то павуки виграють. Чи мають павуки виграшну стратегію?

Розв'язок. Опишемо одну з можливих виграшних стратегій павуків. На першому етапі один з павуків починає з найлівішої клітинки першого знизу рядка шахівниці та рухається вправо, доки не опиниться в одному стовпчику з мухою. На другому етапі перший павук переміщається по клітинках нижнього рядка так, аби після кожного свого ходу знаходитися в одному стовпчику з мухою. Тепер муха вимушена завжди знаходитися у другому знизу рядку або вище, бо як тільки вона потрапить у нижній рядок павуки виграють. В цей час другий павук починає з найлівішої клітинки другого знизу рядка шахівниці та рухається вправо, доки не опиниться в одному стовпчику з мухою. На третьому етапі і далі кожен павук повторює дії іншого павука на попередньому етапі, але на рядок вище. При цьому починаючи з k-го етапу муха вимушена завжди знаходитися у k-му знизу рядку або вище. Тому щонайбільше після восьмого етапу павуки виграють. *(Розв'язок автора)*