Розв'язання задач 490 —495

Розділ ведуть Володимир Брайман та Олександр Толесніков

490. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що

$$xf(y-z) + yf(z-x) + zf(x-y) = x + y + z$$

для всіх $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Розв'язок. Нехай $y = 0$, $z = 1$. Тоді для всіх $x \in \mathbb{R}$ маємо

$$xf(-1) + f(x) = x + 1,$$

тобто $f(x) = \big(1 - f(-1)\big)x + 1$. Таким чином, кожна функція, яка задовольняє рівняння, має вигляд $f(x) = cx + 1$, де $c \in \mathbb{R}$ — деяка стала. Перевірка показує, що всі такі функції задовольняють умову.

Відповідь: $f(x) = cx + 1$, де $c \in \mathbb{R}$ довільне. *(Розв'язок автора)*

491. Послідовність цілих чисел $\{a_n, n \geq 1\}$ є такою, що $a_1 = 2$ та $a_{n+1} = 2^{a_n}, n \geq 1$. Знайти всі такі номери n, для яких $a_n + 13$ — просте число.

Розв'язок. Маємо $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 16$, $\ldots$ Отже, $a_1 + 13 = 15$ не є простим, а $a_2 + 13 = 17$ та $a_3 + 13 = 29$ є простими. Доведемо, що при всіх $n \geq 4$ число $a_n + 13$ ділиться на 11, а тому не є простим. Для цього достатньо показати, що a_n дає остачу 9 при діленні на 11. Розглянемо остачі від ділення на 11 чисел 2^k, $k \geq 0$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\ldots$
$2^k \pmod{11}$	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1	2	$\ldots$

Оскільки $2^{k+10} - 2^k = 1023 \cdot 2^k$ ділиться на 11, то остачі повторюються з періодом 10, зокрема 2^k дає остачу 9 при діленні на 11, якщо k дає остачу 6 при діленні на 10. Тепер достатньо показати, що a_{n-1} закінчується на 6 при всіх $n \geq 4$. При $n \geq 4$ зрозуміло, що a_{n-2} ділиться на 4. Тому можна покласти $a_{n-2} = 4m$, звідки $a_{n-1} = 2^{a_{n-2}} = 2^{4m} = 16^m$ закінчується на 6, що завершує доведення.

Відповідь: $n = 2$, $n = 3$. *(Розв'язок автора)*

492. Комітет з 3366 кінокритиків голосує за премії "Оскар". Кожен критик голосує рівно за одного актора та рівно за одну актрису. Після голосування виявилося, що для кожного натурального числа $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ існує деякий актор або деяка актриса, за якого або яку проголосували рівно n разів. Довести, що існують два критики, які проголосували за одного й того самого актора та за одну й ту саму актрису.

Розв'язок. Нехай a_i — деякий актор або деяка актриса, за якого або яку проголосували рівно i разів, $1 \leq i \leq 100$. Покладемо $A = \{a_{34}, a_{35}, \ldots, a_{100}\}$. Усього було подано $2 \cdot 3366 = 6732$ голосів, причому $34 + 35 + \ldots + 100 = 4489$ голосів було подано за осіб з множини A. Отже, за акторів та актрис, які не належать множині A, було подано $6732 - 4489 = 2243$ голосів. Тому щонайбільше 2243 критиків подали хоча б один голос не за осіб з множини A. Таким чином, принаймні $3366 - 2243 = 1123$ критиків віддали голоси і за актора, і за актрису з множини A. Нехай множина A складається з x акторів та y актрис, $x+y=67$. Тоді існує xy способів обрати актора та актрису з множини A. Але

$$xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 33{,}5^2 = 1122{,}25.$$

Отже існує щонайбільше 1122 способів віддати голоси за актора та актрису з множини A. Тому за принципом Діріхле серед 1123 критиків, які віддали голоси і за актора, і за актрису з множини A, знайдуться двоє, які проголосували однаково.

493. Трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $BC < AD$) вписано в коло ω. Нехай точка M — середина AD, пряма CM перетинає коло ω в точці T, X — середина BT, пряма AX перетинає коло ω в точці Y. Довести, що $DY \parallel BT$.

Розв'язок. Оскільки $\smile AB = \smile CD$ як дуги, що стягуються паралельними хордами, то $\angle ATB = \angle CTD$ (рис. 1). Також $\angle ABT = \angle ADT$ як вписані кути, що спираются на спільну дугу $\smile AT$. Отже, трикутники TAB та TMD подібні. Нехай Z — середина TD. Тоді AX, MZ — відповідні медіани у подібних трикутниках TAB та TMD, звідки $\angle XAB = \angle ZMD$. Оскільки MZ — середня лінія у трикутнику ATD, то $MZ \parallel AT$, звідки $\angle ZMD = \angle TAD$. Отже,

$$\angle YAB = \angle XAB = \angle TAD,$$

тобто $\smile YB = \smile TD$. Оскільки рівні дуги стягуються паралельними хордами, то звідси випливає, що $DY \parallel BT$. *(Розв'язок автора)*

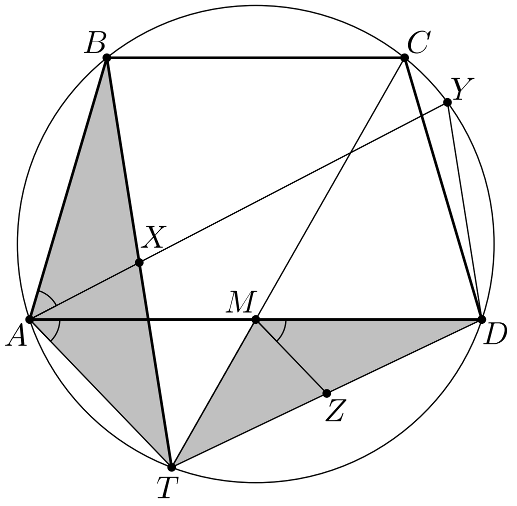

Рис. 1.

494. Розв'язати в цілих числах рівняння

$$x^2 + xy + y^2 = \left(\frac{x+y}{3} + 1\right)^3.$$

Розв'язок. Покладемо $\frac{x+y}{3} = k \in \mathbb{Z}$. Тоді $y = 3k - x$ та рівняння набуває вигляду

$$x^2 + x(3k - x) + (3k - x)^2 = (k+1)^3,$$

або після спрощення
$$x^2 - 3kx - (k^3 - 6k^2 + 3k + 1) = 0.$$
Дістали квадратне рівняння відносно x, дискримінант якого дорівнює
$$D = 9k^2 + 4(k^3 - 6k^2 + 3k + 1) = 4k^3 - 15k^2 + 12k + 4 = (k-2)^2(4k+1).$$
Аби квадратне рівняння мало цілий корінь, його дискримінант має бути повним квадратом. Тому $4k + 1 = (2t+1)^2$ при деякому $t \in \mathbb{Z}$. Отже, $k = t^2 + t$, звідки $D = (t^2 + t - 2)^2(2t+1)^2$. Тоді
$$x = \tfrac{1}{2}\big(3(t^2+t) \pm (t^2+t-2)(2t+1)\big),$$
тобто $x = t^3 + 3t^2 - 1$ або $x = -t^3 + 3t + 1$, $t \in \mathbb{Z}$. Залишається знайти відповідні значення $y = 3(t^2+t) - x$.

Відповідь: $(x, y) = (t^3 + 3t^2 - 1, -t^3 + 3t + 1)$ або $(x, y) = (-t^3 + 3t + 1, t^3 + 3t^2 - 1)$, $t \in \mathbb{Z}$.

495. Том пофарбував круговий паркан з 2015 секцій таким чином, що кожну секцію пофарбовано в один з чотирьох кольорів. Потім він повторює таку операцію доки це можливо: обирає три сусідні секції різних кольорів та перефарбовує їх у четвертий колір. Довести, що Том не зможе перефарбовувати паркан вказаним чином нескінченну кількість разів.

Розв'язок. Припустимо, що нескінченна кількість перефарбовувань можлива. Покажемо, що тоді кожну секцію буде перефарбовано нескінченно багато разів. Справді, якщо це не так, то знайдеться момент часу, після якого принаймні одна секція ніколи не змінює колір. Занумеруємо інші секції послідовно числами від 1 до 2014. Розглянемо секцію з найбільшим номером k, яку Том перефарбовує нескінченно багато разів, та момент часу, після якого всі секції з більшими номерами не змінюють колір. Після цього в деякий момент часу будуть перефарбовані секції з номерами $k-2, k-1, k$. Тепер ці секції мають спільний колір та перед тим, як їх знову можна буде перефарбувати, потрібно перефарбувати секції з номерами $k-4, k-3, k-2$. Перед тим, як перефарбувати ці секції, потрібно перефарбувати секції з номерами $k-6, k-5, k-4$ і так далі. Продовжуючи ці міркування, ми дійдемо до секції без номера та дістанемо суперечність.

Надалі будемо нумерувати секції цілими числами, а початок відліку оберемо так, аби секції, які Том перефарбував першими, дістали номери $-1, 0, 1$. Нехай $a < 0 < b$ — непарні числа. Назвемо паркан (a, b)-*невдалим*, якщо кольори секцій з номерами $a, a+1$ однакові, кольори секцій з номерами $b, b-1$ однакові, а при кожному непарному $a < c < b$ колір секції з номером c збігається з кольором секції з номером $c-1$ або $c+1$. Тоді за вибором початку відліку після першого перефарбовування паркан є $(-1, 1)$-невдалим. Покажемо, що (a, b)-невдалий паркан, де $b - a \le 2014$, залишається (a, b)-невдалим, поки не буде перефарбовано секцію з номером a або b. Справді, якщо на черговому кроці перефарбовуються секції з номерами $c-1, c, c+1$, де $c+1 < a$ або $c-1 > b$, то це очевидно. Якщо ж перефарбовуються секції з номерами $c-1, c, c+1$, де $a+1 < c < b-1$, то c парне (інакше деякі з секцій $c-1, c, c+1$ одного кольору) та після перефарбовування знову дістаємо (a,b)-невдалий паркан. За доведеним раніше кожну секцію буде перефарбовано нескінченно багато разів, тому рано чи пізно буде перефарбовано секцію з номером a або b. Оскільки кольори секцій з номерами $a, a+1$ однакові та кольори секцій з номерами $b, b-1$ однакові, то має бути перефарбовано секції з номерами $a-2, a-1, a$ або з номерами $b, b+1, b+2$. Якщо $b-a < 2014$, то після цього дістанемо $(a-2, b)$-невдалий паркан або $(a, b+2)$-невдалий паркан відповідно. Тому починаючи з $(-1, 1)$-невдалого паркану рано чи пізно дістанемо (a,b)-невдалий паркан, для якого $b-a = 2014$. Але тоді секції з номерами $b-1, b, a, a+1$ послідовні, а тому не можна перефарбувати жодні три секції, одна з яких має номер a або b, суперечність. *(Розв'язок автора)*