Задачі 430 —435

Розділ ведуть Володимир Брайман, Дмитро Мітін та Володимир Некрашевич

430. У чотирикутнику $ABCD$ сторони AB, BC, CD рівні, O — точка перетину діагоналей, $OE \perp BC$, точки M та N — середини AC і BD. Довести, що точка O є центром вписаного кола трикутника EMN.

(М. Рожкова, Київ)

431. Знайти всі натуральні n, для яких $3^n + 5^n + 7^n$ ділиться на $3^{n-1} + 5^{n-1} + 7^{n-1}$.

(В. Ясінський, Вінниця)

432. Про описану трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$) відомо, що $CD = \frac{2BC \cdot AD}{BC+AD}$. Знайти кут $\angle ADC$.

(І. Кушнір, Київ)

433. Двоє гравців A та B грають у таку гру. До початку гри A обирає 1000 не обов'язково різних непарних простих чисел, а B обирає половину з них та пише їх на дошці. Кожним ходом гравець обирає натуральне число n, витирає з дошки деякі прості числа $p_1, p_2, \ldots, p_n$ та пише замість них усі прості дільники числа $p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_n - 2$ (якщо просте число входить у розклад числа $p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_n - 2$ на прості множники більше одного разу, то його записують відповідну кількість разів). Гравець A починає, а програє той гравець, після ходу якого на дошці не залишається жодного числа. Довести, що один з гравців має виграшну стратегію, та визначити, хто саме.

Зауваження: Оскільки число 1 не має простих дільників, то видалення з дошки числа 3 є дозволеним ходом.

(Baltic Way)

434. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^5 - 10y^3 + 9z = 0, \\ y^5 - 10z^3 + 9x = 0, \\ z^5 - 10x^3 + 9y = 0. \end{cases}$$

(В. Ясінський, Вінниця)

435. Довести, що існує нескінченно багато пар цілих чисел (a, b) при яких серед коренів рівняння $x^{2012} = ax + b$ є два різні дійсні числа з добутком 1.

(Baltic Way)

430. Let $ABCD$ be a quadrilateral with three equal sides $AB = BC = CD$, O is the intersection point of the diagonals, $OE \perp BC$, M and N are midpoints of diagonals AC and BD respectively. Prove that O is the incenter of triangle EMN.

(M. Rozhkova, Kyiv)

431. Find all positive integers n such that $3^n + 5^n + 7^n$ is divisible by $3^{n-1} + 5^{n-1} + 7^{n-1}$.

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

432. A circumscribed trapezium $ABCD$ ($BC \parallel AD$) is such that $CD = \frac{2BC \cdot AD}{BC+AD}$. Find angle $\angle ADC$.

(I. Kushnir, Kyiv)

433. Two players A and B play the following game. Before the game starts, A chooses 1000 not necessarily different odd primes, and then B chooses half of them and writes them on a blackboard. In each turn a player chooses a positive integer n, erases some primes $p_1, p_2, \ldots, p_n$ from the blackboard and writes all the prime factors of $p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_n - 2$ instead (if a prime occurs several times in the prime factorization of $p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_n - 2$, it is written as many times as it occurs). Player A starts, and the player whose move leaves the blackboard empty loses the game. Prove that one of the two players has a winning strategy and determine who.

Remark: Since 1 has no prime factors, erasing a single 3 is a legal move.

(Baltic Way)

434. Solve the system of equations

$$\begin{cases} x^5 - 10y^3 + 9z = 0, \\ y^5 - 10z^3 + 9x = 0, \\ z^5 - 10x^3 + 9y = 0. \end{cases}$$

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

435. Prove that for infinitely many pairs (a, b) of integers the equation $x^{2012} = ax + b$ has among its solutions two distinct real numbers whose product is 1.

(Baltic Way)