Задачі 424 —429

Розділ ведуть Володимир Брайман, Дмитро Мітін та Володимир Некрашевич

424. Нехай a, b та c — додатні дійсні числа. Довести, що

$$\frac{1}{ab^2+bc^2+ca^2}+\frac{1}{3abc}\geq\frac{2}{a^2b+b^2c+c^2a}.$$

(В. Ясінський, Вінниця)

425. Знайти усі четвірки додатних дійсних чисел (a,b,c,d), для яких

$$abcd=1,\ \ a^{2012}+2012b=2012c+d^{2012}\ \ \text{та}\ \ 2012a+b^{2012}=c^{2012}+2012d.$$

(Бенілюкс)

426. Дано трикутник ABC. Точка M рухається по стороні BA, а точка N рухається по продовженню сторони AC за точку C так, що $BM=CN$. Довести, що центр кола, описаного навколо трикутника AMN, рухається по прямій лінії.

(В. Ясінський, Вінниця)

427. Нехай CC_1 — бісектриса та I — центр вписаного кола трикутника ABC, $\angle A=60^\circ$, $\angle B=80^\circ$. Довести, що $P_{\triangle BIC_1}=BC$.

(М. Рожкова, Київ)

428. Знайти усі натуральні числа n, для яких існує така перестановка $(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ чисел $(1,2,\ldots,n)$, що числа кожної з множин

$$\{p_1+1,p_2+2,\ldots,p_n+n\}\ \ \text{та}\ \ \{p_1-1,p_2-2,\ldots,p_n-n\}$$

дають усі можливі остачі від ділення на n.

(Сербія)

429. Дано гострокутний трикутник ABC. Нехай ω — коло, яке перетинає сторону AB у точках C_1, C_2 ($AC_1<AC_2$), сторону BC у точках A_1, A_2 ($BA_1<BA_2$), сторону CA у точках B_1, B_2 ($CB_1<CB_2$). Довести, що ω можна вибрати так, щоб відрізки A_1B_2, B_1C_2 і C_1A_2 були його діаметрами.

(В. Ясінський, Вінниця)

424. Let a, b and c be positive real numbers. Prove that

$$\frac{1}{ab^2+bc^2+ca^2}+\frac{1}{3abc}\geq\frac{2}{a^2b+b^2c+c^2a}.$$

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

425. Find all quadruples (a,b,c,d) of positive real numbers such that

$$abcd=1,\ \ a^{2012}+2012b=2012c+d^{2012}\ \text{ and }\ 2012a+b^{2012}=c^{2012}+2012d.$$

(Benelux)

426. Triangle ABC is given. Point M moves along the side BA, and point N moves along the extension of the side AC after point C in such a way that $BM=CN$. Prove that the circumcenter of triangle AMN moves along a straight line.

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

427. Let CC_1 be the angle bisector and I the incenter of triangle ABC, $\angle A=60^\circ$, $\angle B=80^\circ$. Prove that $P_{\triangle BIC_1}=BC$.

(M. Rozhkova, Kyiv)

428. Find all natural numbers n for which there is a permutation $(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ of numbers $(1,2,\ldots,n)$ such that sets

$$\{p_1+1,p_2+2,\ldots,p_n+n\}\ \text{ and }\ \{p_1-1,p_2-2,\ldots,p_n-n\}$$

are complete residue systems mod n.

(Serbia)

429. Acute triangle ABC is given. Let ω be a circle that intersects the side AB in points C_1 and C_2 ($AC_1<AC_2$), the side BC in points A_1 and A_2 ($BA_1<BA_2$), and the side CA in points B_1 and B_2 ($CB_1<CB_2$). Prove that ω can be chosen in such a way that segments A_1B_2, B_1C_2 and C_1A_2 are its diameters.

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)