Задачі 418 —423

Розділ ведуть Володимир Брайман, Дмитро Мітін та Володимир Некрашевич

418. Всередині трикутника ABC відмітили точки M і N так, що точка M лежить всередині трикутника ABN, а точка N лежить всередині трикутника ACM. Крім того, $\angle MAB = \angle NAC$, $\angle MBA = \angle NBC$ і $\angle MCB = \angle NCA$. Довести, що якщо точки B, M, N і C лежать на одному колі з центром W, то пряма AW ділить відрізок MN навпіл.

(В. Ясінський, Вінниця)

419. Нехай H та O — точка перетину висот та центр описаного кола трикутника ABC. Відомо, що $\angle BAO = \frac{1}{3}\angle BAC$ та $CO = CH$. Знайти кути трикутника ABC.

(М. Рожкова, Київ)

420. Нехай a, b, c — додатні дійсні числа. Довести, що

$$\frac{a^3+3b^3}{5a+b}+\frac{b^3+3c^3}{5b+c}+\frac{c^3+3a^3}{5c+a}\geq\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

(USAJMO)

421. Прямокутник $n\times m$, $n,m\geq 3$, розбито на прямокутники 1×2 та 2×1. Довести, що деякі три прямокутники розбиття утворюють прямокутник 3×2 або 2×3.

(О. Руденко, Київ)

422. Дано півколо з діаметром AB. На дузі AB цього півкола відмітили довільну точку C, відмінну від точок A і B. Нехай D — ортогональна проекція точки C на діаметр AB. Коло ω дотикається до відрізків AD, CD і дуги AB в точці P. Доведіть, що точка перетину бісектрис кутів $\angle APB$ і $\angle ACD$ лежить на діаметрі AB.

(В. Ясінський, Вінниця)

423. Знайти всі функції $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ (де $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел) такі, що $f(n!) = f(n)!$ для всіх натуральних n та $f(m)-f(n)$ ділиться на $m-n$ для всіх різних натуральних m, n.

(USAMO)

418. Points M and N are chosen inside triangle ABC such that point M lies inside triangle ABN and point N lies inside triangle ACM. Moreover $\angle MAB = \angle NAC$, $\angle MBA = \angle NBC$ and $\angle MCB = \angle NCA$. Prove that if points B, M, N and C belong to a circle with center W then the straight line AW bisects MN.

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

419. Let H and O be orthocenter and circumcenter of triangle ABC. It is known that $\angle BAO = \frac{1}{3}\angle BAC$ and $CO = CH$. Determine the angles of triangle ABC.

(M. Rozhkova, Kyiv)

420. Let a, b, c be positive real numbers. Prove that

$$\frac{a^3+3b^3}{5a+b} + \frac{b^3+3c^3}{5b+c} + \frac{c^3+3a^3}{5c+a} \geq \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

(USAJMO)

421. Rectangle of size $n \times m$, $n, m \geq 3$, is divided into 1×2 and 2×1 rectangles. Prove that some three of them form a rectangle of size 3×2 or 2×3.

(O. Rudenko, Kyiv)

422. A semicircle is given with diameter AB. On arc AB of the semicircle, an arbitrary point C is chosen that differs from points A and B. Let D be orthogonal projection of point C on the diameter AB. A circle ω touches segments AD, CD and arc AB at point P. Prove that the intersection point of bisectors of angles $\angle APB$ and $\angle ACD$ lies on the diameter AB.

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

423. Find all functions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (where $\mathbb{N}$ is the set of positive integers) such that $f(n!) = f(n)!$ for all positive integers n and such that $m - n$ divides $f(m) - f(n)$ for all distinct positive integers m, n.

(USAMO)