Задачі 412 —417

Розділ ведуть Володимир Брайман, Дмитро Мітін та Володимир Некрашевич

412. Нехай BM — медіана рівнобедреного трикутника ABC ($AC = BC$). На цій медіані відмітили точку N так, що $\angle BAN = \angle CBM$. Довести, що бісектриса кута CNM перпендикулярна прямій AN.

(В. Ясінський, Вінниця)

413. Нехай m, n — такі натуральні числа, що у множині $\{1, 2, \ldots, n\}$ містяться рівно m різних простих чисел. Довести, що якщо вибрати довільні $m+1$ різних чисел з множини $\{1, 2, \ldots, n\}$, серед них завжди знайдеться число, яке є дільником добутку решти m вибраних чисел.

(Польща)

414. Нехай H та O — ортоцентр та центр описаного кола гострокутного трикутника ABC відповідно. Відомо, що $AB < BC$, пряма BO перетинає пряму AC в точці P, а пряма, яка проходить через точку H і паралельна прямій BO, перетинає пряму AC в точці Q. Довести, що $OP = OQ$.

(В. Ясінський, Вінниця)

413. Внутрішня точка P трикутника ABC є гарною, якщо з неї можна провести 27 променів, які перетинають сторони трикутника ABC та ділять його на 27 менших трикутників з однаковими площами. Обчислити кількість хороших точок у трикутнику ABC.

(Індія)

416. Нехай $0 < a, b, c < 1$, причому $8abc \geq 1$. Довести, що

$$(ab-1)(bc-1)(ac-1) < \ln a \ln b \ln c.$$

(В. Брайман, Київ)

417. Нехай $L_0 = 2, L_1 = 1, L_k = L_{k-1} + L_{k-2}$, $k \geq 2$ — числа Люка. Довести, що при всіх цілих $n \geq 0$ та непарних $p \geq 1$ число $L_{p(n+1)} + L_{pn} - 2$ ділиться на L_p.

(Р. Ушаков, Київ)

412. Let BM be a median of isosceles triangle ABC ($AC = BC$). Point N is chosen at BM such that $\angle BAN = \angle CBM$. Prove that the angle bisector of angle CNM is orthogonal to AN.

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

413. Let $m, n \in \mathbb{N}$ be such numbers that set $\{1, 2, \ldots, n\}$ contains exactly m different prime numbers. Prove that if we choose any $m+1$ different numbers from $\{1, 2, \ldots, n\}$ then we can find number from $m+1$ chosen numbers, which divide product of other m numbers.

(Poland)

414. Let H and O be the orthocenter and the circumcenter of acute triangle ABC respectively. It is known that $AB < BC$. Straight line BO intersects AC at point P, while straight line through H parallel to BO intersects AC at point Q. Prove that $OP = OQ$.

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

415. Let ABC be a triangle. An interior point P of ABC is said to be good if we can find exactly 27 rays emanating from P intersecting the sides of the triangle ABC such that the triangle is divided by these rays into 27 smaller triangles of equal area. Determine the number of good points for a given triangle ABC.

(India)

416. Let $0 < a, b, c < 1$ be such that $8abc \geq 1$. Prove that

$$(ab-1)(bc-1)(ac-1) < \ln a \ln b \ln c.$$

(V. Brayman, Kyiv)

417. Let $L_0 = 2, L_1 = 1, L_k = L_{k-1} + L_{k-2}$, $k \geq 2$ be the Lucas numbers. Prove that for every integer $n \geq 0$ and for every odd number $p \geq 1$ the number $L_{p(n+1)} + L_{pn} - 2$ is divisible by L_p.

(R. Ushakov, Kyiv)