Задачі 406 —411

Розділ ведуть Володимир Брайман, Дмитро Мітін та Володимир Некрашевич

406. Для довільних дійсних чисел $0 \leq x, y, z \leq 1$ довести нерівність

$$(x^4 + y^4 + z^4) + (x^5 + y^5 + z^5) + (x - y)^6 + (y - z)^6 + (z - x)^6 \leq 6.$$

(В. Ясінський, Вінниця)

407. Нехай Q — середина діагоналі BD трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Відомо, що $AB^2 = AD \cdot BC$ та $AQ = AC$. Знайти $BC : AD$.

(М. Рожкова, Київ)

408. Многочлен $a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \ldots + a_{n-k-1} x^{n-k-1} + a_{n-k} x^{n-k}$ назвемо *універсальним*, якщо $a_i = a_{n-i}$ та $a_i \leq a_{i+1}$ для всіх $0 \leq k \leq i < \frac{n}{2}$, причому $a_k > 0$. Довести, що добуток довільних двох універсальних многочленів є універсальним многочленом.

(В. Ясінський, Вінниця та В. Лейфура, Миколаїв)

409. Нехай H — точка перетину висот AF та BE гострокутного трикутника ABC, M — середина сторони AB, а MP, MQ — діаметри кіл, описаних навколо трикутників AME і BMF відповідно. Довести, що точки P, H і Q лежать на одній прямій.

(В. Ясінський, Вінниця)

410. Нехай n — додатне ціле число. Довести, що кількість прямих, які проходять через початок координат та рівно одну іншу точку з цілими координатами $(x; y)$, $0 \leq x, y \leq n$, є не меншою за $\frac{n^2}{4}$.

(Baltic Way)

411. Нехай $ABCD$ — квадрат. На сторонах BC та CD обрали точки P та Q відповідно так, що $\angle PAQ = 45^\circ$. Кути $\angle QAD$, $\angle PQC$ та $\angle APB$ утворюють геометричну прогресію. Знайти $\angle QAD$.

(М. Рожкова, Київ)

406. For every real numbers $0 \leq x, y, z \leq 1$ prove the inequality

$$(x^4 + y^4 + z^4) + (x^5 + y^5 + z^5) + (x - y)^6 + (y - z)^6 + (z - x)^6 \leq 6.$$

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

407. Let Q be the midpoint of diagonal BD of trapezium $ABCD$ ($AD \parallel BC$). It is given that $AB^2 = AD \cdot BC$ and $AQ = AC$. Find $BC : AD$.

(M. Rozhkova, Kyiv)

408. Polynomial $a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \ldots + a_{n-k-1} x^{n-k-1} + a_{n-k} x^{n-k}$ is said to be *universal* if $a_i = a_{n-i}$ and $a_i \leq a_{i+1}$ for every $0 \leq k \leq i < \frac{n}{2}$ and, moreover, $a_k > 0$. Prove that the product of any two universal polynomials is an universal polynomial.

(V. Yasinskyy, Vinnytsya and V. Leifura, Mykolaiv)

409. Let H be the intersection point of the altitudes AF and BE of acute triangle ABC, M be the midpoint of AB and MP, MQ be the diameters of circumcircles of triangles AME and BMF respectively. Prove that points P, H and Q are collinear.

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

410. Let n be a positive integer. Prove that the number of lines which go through the origin and precisely one other point with integer coordinates $(x; y)$, $0 \leq x, y \leq n$, is at least $\frac{n^2}{4}$.

(Baltic Way)

411. Let $ABCD$ be a square. Points P and Q are chosen at sides BC and CD respectively such that $\angle PAQ = 45°$. Angles $\angle QAD$, $\angle PQC$ and $\angle APB$ are in geometric progression. Find $\angle QAD$.

(M. Rozhkova, Kyiv)