# Задачі 400 —405

*Розділ ведуть Володимир Брайман, Дмитро Мітін та Володимир Некрашевич*

400. У трикутник $ABC$ вписали коло $\omega$, яке дотикається сторін $AB$ та $AC$ у точках $K$ та $N$ відповідно. Відомо, що точка перетину медіан трикутника $M$ належить відрізку $KN$. Довести, що середня лінія цього трикутника, яка паралельна $BC$, є дотичною до кола $\omega$.

*(І. Кушнір, Київ)*

401. Знайти усі пари дійсних чисел $(x, y)$, які задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2}+\frac{|x+y|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}, \\ \sqrt{|x+2|}=2-y. \end{cases}$$

*(В. Ясінський, Вінниця)*

402. Нехай $a, b, c$ — додатні дійсні числа. Довести, що

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{5}{2},$$

та визначити, коли досягається рівність.

*(Іспанія)*

403. Нехай $ABCD$ — вписаний чотирикутник. На його діагоналях $AC$ та $BD$ обрали точки $X$ та $Y$ відповідно так, що чотирикутник $ABXY$ є паралелограмом. Довести, що кола, описані навколо трикутників $BXD$ та $AYC$, мають рівні радіуси.

*(В. Ясінський, Вінниця)*

404. Нехай $A$ та $B$ — непорожні множини, що не перетинаються, для яких $A \cup B = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Довести, що існують такі $a \in A$ та $b \in B$, що число $a^3 + ab^2 + b^3$ ділиться на 11.

*(Middle European Mathematical Olympiad)*

405. Чи існують такі цілі числа $a, b, c, d$, що $a \neq 0$ та кожне з рівнянь

$$ax^3+bx^2+cx+d=0, \quad bx^2+cx+d=0, \quad cx+d=0$$

має таку ж кількість різних натуральних коренів, як його степінь?

*(В. Брайман, Київ)*

400. Incircle $\omega$ of triangle $ABC$ touches the sides $AB$ and $AC$ at points $K$ and $N$ respectively. It is known that the centroid $M$ of this triangle lies at the segment $KN$. Prove that the midsegment of triangle parallel to $BC$ is a tangent to the circle $\omega$.

*(I. Kushnir, Kyiv)*

401. Find all pairs of real numbers $(x, y)$ which satisfy the system of equations

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2}+\frac{|x+y|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}, \\ \sqrt{|x+2|}=2-y. \end{cases}$$

*(V. Yasinskyy, Vinnytsya)*

402. Let $a, b, c$ be positive real numbers. Prove that

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{5}{2}$$

and determine when equality holds.

*(Spain)*

403. Let $ABCD$ be inscribed quadrilateral. Points $X$ and $Y$ are chosen at diagonals $AC$ and $BD$ respectively such that $ABXY$ is a parallelogram. Prove that the radii of circumcircles of triangles $BXD$ and $AYC$ are equal.

*(V. Yasinskyy, Vinnytsya)*

404. Let $A$ and $B$ be disjoint nonempty sets with $A \cup B = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Show that there exist elements $a \in A$ and $b \in B$ such that the number $a^3 + ab^2 + b^3$ is divisible by 11.

*(Middle European Mathematical Olympiad)*

405. Do there exist integers $a, b, c, d$ such that $a \neq 0$ and each of equations

$$ax^3+bx^2+cx+d=0, \quad bx^2+cx+d=0, \quad cx+d=0$$

has as many distinct positive integer solutions as its power?

*(V. Brayman, Kyiv)*