Задачі 394 —399

Розділ ведуть Володимир Брайман, Дмитро Мітін та Володимир Некрашевич

394. Нехай $f(t) = [\frac{t+1}{2}]+[\frac{t+2}{2}]+[\frac{t+3}{2}]$, $t \in \mathbb{R}$ (тут $[a]$ — ціла частина числа a). Розглянемо множину точок (x, y) координатної площини, для яких $|x| \leq 100$, $|y| \leq 100$ та $f(x) + f(y)$ ділиться на 3. Знайти площу цієї множини.

(В. Ясінський, Вінниця)

395. На дошці записано $n \geq 2$ чисел: $1, 2, \ldots, n$. Дозволяється стерти два числа x, y та замість них записати число $2x - y$. Знайти всі значення n, при яких після таких операцій на дошці може залишитися 0.

(О. Руденко, Київ)

396. Нехай O — точка перетину діагоналей прямокутника $ABCD$. На BO побудували квадрат $BKLO$ так, що відрізки OL та BC перетинаються. Відрізок AL перетинає BC у точці E. Довести, що прямі AB, CL та KE перетинаються в одній точці.

(М. Рожкова, Київ)

397. Знайти найбільше можливе значення $(a - a^2)(b - b^2)(a - b)^2$ при $0 \leq a, b \leq 1$.

(О. Руденко, Київ)

398. Нехай I_A — центр зовнівписаного кола трикутника ABC, яке дотикається до сторони BC і до продовжень сторін AC та BC. Нехай P та Q — центри кіл, описаних навколо трикутників ABI_A та ACI_A відповідно. Доведіть, що точки B, C, P та Q лежать на одному колі.

(В. Ясінський, Вінниця)

399. Нехай a, b, c — додатні дійсні числа такі, що $a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2 \leq 4$. Довести, що

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2} + \frac{bc+1}{(b+c)^2} + \frac{ca+1}{(c+a)^2} \geq 3.$$

(USAJMO)

394. Let $f(t) = [\frac{t+1}{2}] + [\frac{t+2}{2}] + [\frac{t+3}{2}]$, $t \in \mathbb{R}$ (here $[a]$ denotes the integer part of a). Consider the set of points (x, y) of coordinate plane such that $|x| \leq 100$, $|y| \leq 100$, and $f(x) + f(y)$ is divisible by 3. Find the area of this set.

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

395. There are $n \geqslant 2$ numbers on the blackboard: $1, 2, \ldots, n$. It is allowed to erase two of those numbers x and y and write $2x - y$ instead. Find all values of n such that it is possible to leave 0 on the blackboard after $n - 1$ such operations.

(O. Rudenko, Kyiv)

396. Let O be the intersection point of diagonals of rectangle $ABCD$. The square $BKLO$ is constructed on BO such that segments OL and BC intersect. Let E be the intersection point of AL and BC. Prove that the straight lines AB, CL and KE are concurrent.

(M. Rozhkova, Kyiv)

397. Find the largest possible value of $(a - a^2)(b - b^2)(a - b)^2$ for $0 \leq a, b \leq 1$.

(O. Rudenko, Kyiv)

398. Let I_A be the center of an excircle of the triangle ABC, tangent to BC and tangent to the extensions of AC and BC. Let P and Q be the circumcenters of triangles ABI_A and ACI_A, respectively. Prove that points B, C, P and Q are concyclic.

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

399. Let a, b, c be positive real numbers such that $a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)^2 \leq 4$. Prove that

$$\frac{ab + 1}{(a + b)^2} + \frac{bc + 1}{(b + c)^2} + \frac{ca + 1}{(c + a)^2} \geq 3.$$

(USAJMO)