Задачі 388 —393

Розділ ведуть Володимир Брайман, Дмитро Мітін та Володимир Некрашевич

388. На дошці виписані 11 натуральних чисел. Довести, що можна вибрати деякі (можливо, всі) з цих чисел та розставити знаки "+" та "−" між ними так, аби значення отриманого виразу ділилось на 2011.

(Швейцарія)

389. Для натурального числа a позначимо через $P(a)$ добуток всіх різних простих дільників a. Чи для будь-якого n існують натуральні числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ такі, що для $k = 1, 2, \ldots, n$ маємо $a_k = a_{k-1} - P(a_{k-1})$?

(В. Брайман, Київ)

390. Нехай O, H — центр описаного кола та точка перетину висот трикутника ABC відповідно, D — середина сторони BC та E — точка перетину AD з описаним колом трикутника ABC. Побудувати трикутник ABC за відомими точками D, E та прямою OH.

(Г. Філіпповський, Київ)

391. Про трикутник ABC відомо, що $\angle A = 2\angle B \leq 90°$. За допомого двох прямолінійних розрізів розділити трикутник ABC на три рівнобедрені трикутники двома способами.

(М. Рожкова, Київ)

392. Довести, що при всіх $x > 0$ та $n \in \mathbb{N}$ має місце нерівність

$$\frac{x^n(x^{n+1}+1)}{x^n+1} \leq \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n+1}.$$

(В'єтнам)

393. Довести, що для кожного натурального k існує нескінченно багато пар взаємно простих чисел (u, v), для яких $u^2 + kuv + v^2$ є точним квадратом.

(М. Рожкова, Київ)

388. On a blackboard, there are 11 positive integers. Show that one can choose some (maybe all) of these numbers and place "+" and "−" in between such that the result is divisible by 2011.

(Switzerland)

389. For positive integer a denote by $P(a)$ the product of all distinct prime divisors of a. Prove or disprove that for every n there exist positive integers $a_0, a_1, \ldots, a_n$ such that $a_k = a_{k-1} - P(a_{k-1})$ for $k = 1, 2, \ldots, n$.

(V. Brayman, Kyiv)

390. Let O, H be the circumcenter and the orthocenter of triangle ABC respectively, D be the midpoint of BC and E be the intersection point of AD and circumcircle of triangle ABC. Construct triangle ABC if known are points D, E and the straight line OH.

(G. Filippovskyy, Kyiv)

391. Let ABC be a triangle such that $\angle A = 2\angle B \le 90^\circ$. Find two ways of dissecting the triangle ABC into three isosceles triangles by straight cuts.

(M. Rozhkova, Kyiv)

392. Prove that if $x > 0$ and $n \in \mathbb{N}$, then we have

$$\frac{x^n(x^{n+1}+1)}{x^n+1} \le \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n+1}.$$

(Vietnam)

393. Prove that for every positive integer k there exist infinitely many pairs of relatively prime numbers (u, v) such that $u^2 + kuv + v^2$ is a perfect square.

(M. Rozhkova, Kyiv)