

Задачі 382 — 387

Розділ ведуть Володимир Брайман, Дмитро Мітін та Володимир Некрашевич

382. Нехай A, B, C та a, b, c — додатні дійсні числа. Довести нерівності
- а) $aA^2 + bB^2 + cC^2 \geq AB \cdot \min(a, b) + BC \cdot \min(b, c) + CA \cdot \min(c, a)$;
б) $A^2 \cdot \max(b, c) + B^2 \cdot \max(c, a) + C^2 \cdot \max(a, b) \geq ABc + BCa + CAb$.
- (Тут $\max(x, y)$ — найбільше серед чисел x, y , а $\min(x, y)$ — найменше серед них.)
(В. Ясінський, Вінниця)
383. Дано трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$). За допомогою циркуля та лінійки побудувати такі точки X та Y на сторонах AB та CD відповідно, що $XY \parallel AD$ та YX — бісектриса кута $\angle AYB$.
(В. Ткаченко, Київ)
384. Побудувати многочлен, який можна подати як суму квадратів одного, двох, ..., десяти многочленів таким чином, щоб для кожного з десяти подань степені многочленів у відповідному поданні були попарно різними.
(М. Рожкова, Київ)
385. На діагоналі BD рівнобедреної трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $BC < AD$, $\angle A = 60^\circ$) побудували рівносторонній трикутник BDM . Сторона BM перетинає AC та AD у точках P та K відповідно, CM перетинає BD у точці N , O — точка перетину діагоналей AC та BD . Довести, що прямі MO , DP та NK перетинаються в одній точці.
(І. Нагель, Євпаторія)
386. Дано гострий кут $\angle AOB$ та точку P всередині. Побудувати два перпендикулярні відрізки PM та PN , де M та N належать променям OA та OB відповідно, які відсікають від кута $\angle AOB$ чотирикутник найбільшої можливої площі.
(Н. Белухов, Стара Загора, Болгарія)
387. У кожній клітинці дошки з n стовпчиками та 2^n рядками знаходиться лампа, яка може перебувати в одному з двох станів: увімкнено або вимкнено. Рядок дошки називається освітленим, якщо у ньому усі лампи увімкнено. Дозволяється обирати довільний стовпчик та змінювати стан усіх ламп у цьому стовпчику на протилежний. Чи при всіх $n \geq 2$ існує такий початковий стан ламп на дошці, що після довільної серії з парної кількості таких операцій дошка містить освітлений рядок, а після довільної серії з непарної кількості таких операцій дошка не містить освітлених рядків?
(А. Оленко, Мельбурн, Австралія)

382. Let A, B, C and a, b, c be positive real numbers. Prove the inequalities
- a) $aA^2 + bB^2 + cC^2 \geq AB \cdot \min(a, b) + BC \cdot \min(b, c) + CA \cdot \min(c, a)$;
 b) $A^2 \cdot \max(b, c) + B^2 \cdot \max(c, a) + C^2 \cdot \max(a, b) \geq ABc + BCa + CAb$.
- (Here $\max(x, y)$ is the biggest number among x, y and $\min(x, y)$ is the smallest one among them.)

(*V. Yasinsky, Vinnytsya*)

383. A trapezoid $ABCD$ is given ($BC \parallel AD$). Construct with compass and ruler such points X and Y on the sides AB and CD respectively that $XY \parallel AD$ and YX is the angle bisector of $\angle AYB$.

(*V. Tkachenko, Kyiv*)

384. Construct a polynomial, which can be represented as a sum of squares of one, two, ..., ten polynomials in such a way that for each of these ten representations, the degrees of polynomials in a current representation are pairwise distinct.

(*M. Rozhkova, Kyiv*)

385. Equilateral triangle BDM is constructed on a diagonal BD of an isosceles trapezoid $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $BC < AD$, $\angle A = 60^\circ$). The side BM intersects AC and AD at points P and K respectively, CM intersects BD at a point N , O is the intersection point of diagonals AC and BD . Prove that the straight lines MO , DP and NK are concurrent.

(*I. Nagel, Evpatoria*)

386. An acute angle $\angle AOB$ and a point P inside it are given. Construct two perpendicular segments PM and PN , where M and N lie in the rays OA and OB correspondingly, so that the rays cut from $\angle AOB$ a quadrilateral with the maximal possible area.

(*N. Beluhov, Stara Zagora, Bulgaria*)

387. In every cell of a desk with n rows and 2^n columns there is a lamp, which can be in one of two states: switched on or switched off. A column on the desk is called illuminated if all the lamps in this column are switched on. One can choose a row and change the states of lamps in this row to the opposite. Is it true that for every $n \geq 2$ there is an initial state of lamps on the desk when after arbitrary even-length sequence of such operations the desk contains an illuminated column but after arbitrary odd-length sequence of such operations the desk does not contain any illuminated columns?

(*A. Olenko, Melbourne, Australia*)