Задачі 376 —381

Розділ ведуть Володимир Брайман, Дмитро Мітін та Володимир Некрашевич

376. Знайти всі $k > 1$, при яких число 1 можна подати як суму k дробів вигляду $\frac{1}{10^n}$, $\frac{1}{2\cdot 10^n}$ або $\frac{1}{5\cdot 10^n}$, $n \geq 0$.

(Л. Майзліш, Шепетівка)

377. Медіани AD та BE трикутника ABC перетинаються в точці M. Відомо, що навколо чотирикутника $DCEM$ можна описати коло і в нього можна вписати коло. Довести, що трикутник ABC рівносторонній.

(І. Нагель, Євпаторія)

378. Довести нерівність

$$(\cos^4 x)^{\sin^2 x} \cdot (\sin^4 x)^{\cos^2 x} \leq \frac{1}{4}.$$

(І. Федак, Івано-Франківськ)

379. У трикутнику AKN коло ω перетинає сторону AK у точках P, L $(KP < KL)$, перетинає сторону KN у точках H, M $(KH < KM)$ та дотикається до сторони AN у її середині Q. Прямі PH та AN перетинаються в точці I. За допомогою циркуля та лінійки знайти точку K, якщо відомі лише точки H, I, N, A.

(І. Нагель, Євпаторія)

380. Всередині тетраедра $ABCD$ вибрали точку X. Довести, що

$$AX \cdot S_{\triangle BCD} + BX \cdot S_{\triangle ACD} + CX \cdot S_{\triangle ABD} + DX \cdot S_{\triangle ABC} \geq 9V_{ABCD}.$$

(С. Слободянюк, Київ)

381. Розглянемо квадрат $(p-1)\times(p-1)$, де p — просте число, поділений на квадратики 1×1 зі сторонами, паралельними сторонам вихідного квадрата. Довести, що можна вибрати p вершин квадратиків, жодні три з яких не лежать на одній прямій.

(Португалія)

376. Find all $k > 1$ for which it is possible to represent number 1 as a sum of k fractions of the form $\frac{1}{10^n}$, $\frac{1}{2\cdot 10^n}$ or $\frac{1}{5\cdot 10^n}$, $n \geq 0$.

(L. Mayzlish, Shepetivka)

377. Medians AD and BE of a triangle ABC intersect at a point M. It is known that the quadrilateral $DCEM$ is both inscriptable and cyclic. Prove that ABC is an equilateral triangle.

(I. Nagel, Evpatoria)

378. Prove the inequality

$$(\cos^4 x)^{\sin^2 x} \cdot (\sin^4 x)^{\cos^2 x} \leq \frac{1}{4}.$$

(I. Fedak, Ivano-Frankivsk)

379. A circle ω intersects the side AK of a triangle AKN at points P, L ($KP < KL$), intersects the side KN at points H, M ($KH < KM$) and touches the side AN at its midpoint Q. The straight lines PH and AN intersect at a point I. Find the point K with compass and ruler, provided that only points H, I, N, A are known.

(I. Nagel, Evpatoria)

380. A point X is chosen inside a tetrahedron $ABCD$. Prove that

$$AX \cdot S_{\triangle BCD} + BX \cdot S_{\triangle ACD} + CX \cdot S_{\triangle ABD} + DX \cdot S_{\triangle ABC} \geq 9V_{ABCD}.$$

(S. Slobodyanyuk, Kyiv)

381. Consider a square $(p-1) \times (p-1)$, where p is a prime number. This square is divided into small squares 1×1 whose sides are parallel to the initial square's sides. Show that it is possible to select p vertices of small squares so that no three vertices are collinear.

(Portugal)