Задачі 370 —375

Розділ ведуть Володимир Брайман, Дмитро Мітін та Володимир Некрашевич

370. Нехай $ABCD$ — опуклий чотирикутник, у якому $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 12$, $DA = 13$ та $S_{ACD} = 5S_{ABC}$. Обчислити S_{ABCD}.

(І. Федак, Івано-Франківсьъкк)

371. Нехай a, b, c — такі додатні числа, що $abc = 1$. Довести, що

$$\frac{a}{b^4 + c^4 + a} + \frac{b}{c^4 + a^4 + b} + \frac{c}{a^4 + b^4 + c} \leq 1.$$

(І. Нагель, Євпаторія)

372. Перестановка множини натуральних чисел $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ — це послідовність $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, у якій кожен елемент множини $[n]$ зустрічається рівно один раз. Наприклад, $(3, 5, 1, 2, 4)$ — перестановка множини $[5]$. Нехай $P(n)$ — кількість перестановок $[n]$, для яких ka_k є повним квадратом при всіх $1 \leq k \leq n$. Знайти найменше n, при якому $P(n)$ ділиться на 2010.

(USAJMO)

373. На сторонах AB, BC та CA трикутника ABC вибрали точки A_1, B_1 та C_1 відповідно такі, що $AA_1 : A_1B = BB_1 : B_1C = CC_1 : C_1A = 1 : 2$. Довести, що $P_{A_1B_1C_1} > \frac{1}{2}P_{ABC}$.

(Л. Оридорога, Донецьк)

374. Кожну клітинку таблиці $n \times n$ пофарбували у червоний, синій або зелений колір. Назвемо розфарбування *дивним*, якщо

   (i) жодні червона та синя клітинки не є сусідніми по горизонталі,

   (ii) жодні червона та зелена клітинки не є сусідніми по вертикалі,

   (iii) жодні синя та зелена клітинка не є сусідніми по діагоналі.

   Знайти кількість дивних розфарбувань.

(В. Брайман, О. Руденко, Київ)

375. У чотирикутник $ABCD$ вписали коло, яке дотикається сторін AB, BC, CD, DA у точках K, M, N, P відповідно. На прямій KN обрали точки R, S так, що $PR \perp KN$, $MS \perp KN$. Нехай Q — точка перетину прямих AR та BS, а T — точка перетину прямих CS та DR. Довести, що у чотирикутник $SQRT$ можна вписати коло.

(І. Нагель, Євпаторія)

370. Let $ABCD$ be a convex quadrangle such that $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 12$, $DA = 13$ and $S_{ACD} = 5S_{ABC}$. Find S_{ABCD}.

(I. Fedak, Ivano-Frankivsk)

371. Let a, b, c be positive numbers such that $abc = 1$. Prove that

$$\frac{a}{b^4 + c^4 + a} + \frac{b}{c^4 + a^4 + b} + \frac{c}{a^4 + b^4 + c} \leq 1.$$

(I. Nagel, Evpatoria)

372. A permutation of the set of positive integers $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ is a sequence $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ such that each element of $[n]$ appears precisely one time as a term of the sequence. For example, $(3, 5, 1, 2, 4)$ is a permutation of $[5]$. Let $P(n)$ be the number of permutations of $[n]$ for which ka_k is a perfect square for all $1 \leq k \leq n$. Find the smallest n such that $P(n)$ is a multiple of 2010.

(USAJMO)

373. Points A_1, B_1 and C_1 are chosen at sides AB, BC and CA of triangle ABC respectively such that $AA_1 : A_1B = BB_1 : B_1C = CC_1 : C_1A = 1 : 2$. Prove that $P_{A_1B_1C_1} > \frac{1}{2}P_{ABC}$.

(L. Orydoroga, Donetsk)

374. Each cell of a table of size $n \times n$ is coloured red, blue or green. The colouring is said to be *weird* if

(i) red and blue cells are never neighbours in a row,

(ii) red and green cells are never neighbours in a column,

(iii) blue and green cells are never neighbours in a diagonal.

Find the number of weird colourings.

(V. Brayman, O. Rudenko, Kyiv)

375. The incircle of quadrangle $ABCD$ touches the sides AB, BC, CD, DA at points K, M, N, P respectively. Points R, S are chosen at the straight line KN such that $PR \perp KN$, $MS \perp KN$. Let Q be the intersection point of the straight lines AR and BS, while T be the intersection point of the straight lines CS and DR. Prove that it is possible to inscribe a circle into the quadrangle $SQRT$.

(I. Nagel, Evpatoria)