Задачі 364 —369

Розділ ведуть Володимир Брайман, Дмитро Мітін та Володимир Некрашевич

364. Нехай x та y — додатні числа, для яких $3(x+y) \geq 2(xy+1)$. Довести, що $9(x^3+y^3) \geq x^3y^3+1$.

(В. Ясінський, Вінниця)

365. На стороні AC трикутника ABC обрали такі точки K та N, що $AK+BC = CN+AB$. Точка M — середина відрізка KN, а BM — бісектриса кута ABC. Довести, що трикутник ABC рівнобедрений.

(І. Нагель, Євпаторія)

366. Нехай $a_k = \sqrt[3]{k+\sqrt{k^2-1}}+\sqrt[3]{k-\sqrt{k^2-1}}+1$, $k \in \mathbb{N}$. Довести, що $\{a_k^3\} = \{3a_k^2\}$, $k \geq 1$. (Тут $\{x\}$ — дробова частина числа x.)

(В. Ясінський, Вінниця)

367. Нехай ABC гострокутний трикутник, у якому $\angle B = 60^\circ$. Позначимо S точку перетину бісектриси BL та висоти CD. Довести, що $SO = SH$, де H — точка перетину висот, а O — центр описаного кола трикутника ABC.

(І. Нагель, Євпаторія)

368. Нехай n — парне число, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — дійсні числа. Довести нерівність

$$(n-1)\max_{1\leq i\leq n} x_i^2 + \left(\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| - \max_{1\leq i\leq n}|x_i|\right)^2 \geq \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

(Д. Мітін, Київ)

369. Нехай ABC — рівнобедрений гострокутний трикутник ($AB = AC$), у якому $\angle A \neq 45^\circ$, а ω — описане навколо нього коло з центром O. Коло ω_1 з центром на BC проходить через точки B та O та перетинає коло ω у точці $F \neq B$. Довести, що CF та AO перетинаються на колі ω_1 та $CF \parallel BO$.

(М. Рожкова, Київ)

364. Let x and y be positive numbers such that $3(x+y) \geq 2(xy+1)$. Prove that $9(x^3+y^3) \geq x^3y^3+1$.

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

365. Points K and N are chosen on the side AC of a triangle ABC so that $AK+BC = $ $= CN+AB$. A point M is the midpoint of the segment KN and BM is the bisector of the angle ABC. Prove that ABC is an isosceles triangle.

(I. Nagel, Evpatoria)

366. Let $a_k = \sqrt[3]{k+\sqrt{k^2-1}} + \sqrt[3]{k-\sqrt{k^2-1}} + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Prove that $\{a_k^3\} = \{3a_k^2\}$, $k \geq 1$. (Here $\{x\}$ denotes the fractional part of x.)

(V. Yasinskyy, Vinnytsya)

367. Let ABC be an acute triangle such that $\angle B = 60°$. Denote by S the intersection point of the bisector BL and altitude CD. Prove that $SO = SH$, where H is the orthocenter and O is the circumcenter of the triangle ABC.

(I. Nagel, Evpatoria)

368. Let n be even, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ be real numbers. Prove the inequality

$$(n-1)\max_{1\leq i\leq n} x_i^2 + \left(\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| - \max_{1\leq i\leq n} |x_i|\right)^2 \geq \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

(D. Mitin, Kyiv)

369. Let ABC be an isosceles acute triangle ($AB = AC$) with $\angle A \neq 45°$ and ω be its circumcircle with center O. A circle ω_1 with its center on BC passes through the points B and O and intersects the circle ω at a point $F \neq B$. Prove that CF and AO intersect on ω_1 and $CF \parallel BO$.

(M. Rozhkova, Kyiv)