Задачі 358 —363

Розділ ведуть Володимир Брайман, Дмитро Мітін та Володимир Некрашевич

358. Побудувати на квадратному аркуші 9×9 см рівнобедрений трикутник з периметром 30 см, у якому точка перетину висот лежить на вписаному колі. Чи можна побудувати цей трикутник на меншому квадратному аркуші?

(А. Лебіга, Володарськ-Волинський)

359. Нехай a та b — такі цілі числа, що рівняння $x^3 - ax^2 - b = 0$ має три цілих корені. Довести, що $b = dk^2$, де d та k — цілі числа, причому d — дільник a.

(Baltic Way)

360. Нехай AA_1, BB_1, CC_1 — висоти гострокутного трикутника ABC. Позначимо A_2, B_2 та C_2 точки перетину висот трикутників AB_1C_1, A_1BC_1 та A_1B_1C відповідно. Довести, що прямі A_1A_2, B_1B_2 та C_1C_2 перетинаються в одній точці.

(М. Рожкова, Київ)

361. Нехай $F_0 = 0, F_1 = 1, F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, $k \geq 2$ — числа Фібоначчі. Довести, що при довільних натуральних $k \geq n$ число $2^k F_{3n+2k} + 3F_{k-n}$ ділиться на 5.

(Р. Ушаков, Київ)

362. Коло ω_1, вписане у трикутник ABC, має центр I та дотикається сторін AB та AC у точках M та N. Коло ω_2 проходить через точки A та I і перетинає сторони AB та AC у точках Q та P відповідно. Довести, що відрізок MN проходить через середину відрізка PQ.

(І. Нагель, Євпаторія)

363. Нехай $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \frac{\pi}{2}$ та $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Довести нерівність

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq 2(\sin\alpha\sin\beta + \sin\beta\sin\gamma + \sin\gamma\sin\alpha).$$

(М. Рожкова, Київ)

358. An isosceles triangle has perimeter 30 sm and its orthocenter lies on the incircle. Construct such triangle on a square 9×9 sm sheet of paper. Is it possible to construct such triangle on a smaller square sheet of paper?

(A. Lebiga, Volodarsk-Volynskyy)

359. Let a and b be integers such that the equation $x^3 - ax^2 - b = 0$ has three integer roots. Prove that $b = dk^2$, where d and k are integers and d divides a.

(Baltic Way)

360. Let AA_1, BB_1, CC_1 be the altitudes of an acute triangle ABC. Denote by A_2, B_2 and C_2 the orthocenters in triangles AB_1C_1, A_1BC_1 and A_1B_1C respectively. Prove that the straight lines A_1A_2, B_1B_2 and C_1C_2 are concurrent.

(M. Rozhkova, Kyiv)

361. Let $F_0 = 0, F_1 = 1, F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, $k \geq 2$, be the Fibonacci sequence. Prove that for every positive integers $k \geq n$ the number $2^k F_{3n+2k} + 3F_{k-n}$ is divisible by 5.

(R. Ushakov, Kyiv)

362. Let ω_1 be the incircle of a triangle ABC. The circle ω_1 has center I and touches the sides AB and AC at points M and N. A circle ω_2 passes through points A and I and intersects the sides AB and AC at points Q and P respectively. Prove that the line segment MN passes through the midpoint of line segment PQ.

(I. Nagel, Evpatoria)

363. Let $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \frac{\pi}{2}$ and $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Prove the inequality

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq 2(\sin\alpha\sin\beta + \sin\beta\sin\gamma + \sin\gamma\sin\alpha).$$

(M. Rozhkova, Kyiv)